

24. Tipovaya tekhnologicheskaya skhema dobychi peska, graviya i peschano-graviynoy smesi sudokhodnykh rek i drugikh vodoemov [Typical technological scheme of production of sand, gravel and sand-gravel aggregate shipbuilding output of the rivers and other water bodies]. Moscow: Transport, 1980.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор А.А. Илюхин.

Сухинов Андрей Александрович – Южный федеральный университет; e-mail: andreysukhinov@gmail.com; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634315638; аспирант.

Чистяков Александр Евгеньевич – e-mail: cheese_05@mail.ru; тел.: 88634371606; к. ф.-м. н.; доцент.

Проценко Елена Анатольевна – Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (РИНХ); e-mail: rab55555@rambler.ru; 347936, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48; тел.: 88634601258; к. ф.-м. н.; старший преподаватель.

Шретер Сергей Алексеевич – e-mail: sergshre@yandex.ru; тел.: 89885307372; старший преподаватель.

Sukhinov Andrey Alexandrovich – Southern Federal University; e-mail: andreysukhinov@gmail.com; 44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634315638; postgraduate student.

Chistyakov Alexander Evgenjevich – e-mail: cheese_05@mail.ru; phone: +78634371606; cand. of phis.-math. sc.; associate professor.

Protsenko Elena Anatol'evna – Anton Chekhov Taganrog State Institute; e-mail: rab55555@rambler.ru; 48, Iniciativnaya street, Taganrog, 347936, Russia; cand. of phis.-math. sc.; senior lecturer.

Shreter Sergei Alekseevich – e-mail: sergshre@yandex.ru; phone: +79885307372; senior lecturer.

УДК 519.6

А.В. Шишня, А.И. Сухинов

**ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРИЗИРОВАННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
МОДЕЛИ ГИДРОДИНАМИКИ И СГОННО-НАГОННЫХ ЯВЛЕНИЙ
В МЕЛКОВОДНЫХ ВОДОЕМАХ И ЕЁ ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ
НА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С ОБЩЕЙ
ПАМЯТЬЮ**

Рассматриваются математические модели гидродинамики мелководных водоемов со свободной поверхностью на основе классической системы уравнений Навье-Стокса и на основе уравнений движения с регуляризатором. Выполнена постановка уточненных граничных условий для обеих моделей, а для аппроксимации операторов производных по пространственным направлениям применен интегроинтерполяционный метод, учитывающий частичную заполненность ячеек расчетной сетки. Это позволяет повысить точность получаемых результатов, а также учитывать движение свободной поверхности и изменение береговой линии за счет сгонно-нагонных явлений. Уточненная постановка граничных условий особенно важна при моделировании мелководных водоемов, так как в этом случае близкое расположение горизонтальных границ оказывает значительное влияние на поля скорости и давления внутри расчетной области. Применение построенных математических моделей для предсказания неблагоприятных и опасных явлений в водных системах в режиме реального времени требует их эффективной параллельной реализации. Повышения эффективности параллельной реализации можно добиться путем использования явных схем при численном решении уравнений модели. Известно, что явные схемы имеют более жесткое ограничение на шаг по времени, чем неявные, поэтому предлагается использовать

регуляризатор, который позволяет заменить это ограничение на менее обременительное. Получены асимптотические условия, при которых регуляризованная модель становится вычислительно более эффективной по сравнению с классической моделью на основе уравнений Навье-Стокса. Выполнена параллельная программная реализация построенной регуляризованной модели на вычислительной системе с распределенной памятью, а также измерены ускорение и эффективность построенной параллельной программы.

Гидродинамика; свободная поверхность; мелководные водоемы; гиперболизированная система уравнений гидродинамики; параллельные алгоритмы для систем с общей памятью.

A.V. Shishenya, A.I. Sukhinov

**DEVELOPMENT OF REGULARIZED MATHEMATICAL MODEL
FOR SIMULATION HYDRODYNAMICS AND SURGE PHENOMENA
IN SHALLOW WATER BASINS AND ITS PARALLEL IMPLEMENTATION
FOR SHRED MEMORY COMPUTER SYSTEMS**

In the paper we develop mathematical models for free-surface hydrodynamics simulation based on both classical Navies-Stokes equations and it's hyperbolized analogous. We also pose adjusted boundary conditions for both models and perform discretization with finite volume method accounting fullness of the grid cells that allows us to improve precision of the obtaining results. It allows to improve the accuracy of the results, as well as to take into account the motion of the free surface and the change in the coastline due to surge phenomena. Adjusted boundary conditions are especially important for shallow water basins due to close location of horizontal boundaries, which introduce approximation errors into velocity and pressure fields inside the computational domain. The application of the created mathematical models for predicting adverse and dangerous phenomena in water media requires it's effective parallel implementation. It could be reached by using explicit stencils when solving PDEs numerically. It is well-known that using explicit stencil imposes hard stability conditions on temporal step that's why we suggest to use regularizer, that allows to ease this restriction. We also derived asymptotic condition of efficiency of the hyperbolized model compared to the classical one. Parallel implementation of the regularized model is performed for shared memory supercomputer system; efficiency and speed-up of the parallel program were measured.

Hydrodynamics; free surface; shallow water basin; hyperbolized system of hydrodynamics; parallel algorithms for shared memory supercomputer systems.

Введение. В современном мире водные объекты стали важнейшими природными ресурсами и поэтому подвергаются активному антропогенному воздействию, что оказывает воздействие на гидрологические режимы, температуру, состав воды и, как следствие, подвергает изменениям экосистему водоема, поэтому охрана и мониторинг состояния водных объектов является необходимой составляющей их эксплуатации [1, 2].

В случае возникновения чрезвычайных ситуаций (ЧС), связанных с выбросом опасных веществ в водоем, заморными явлениями, затоплением прибрежных районов, предпринятые в течение первых нескольких часов адекватные меры, основанные на прогнозе развития ЧС, позволяют сократить материальный ущерб, и, что важнее, спасти человеческие жизни.

Следствием мелководности водоема является близкое расположение горизонтальных границ, поэтому неточности аппроксимации границы вносят более значимый вклад в конечный результат, чем при моделировании глубоководных водоемов [3]. Таким образом, основная цель работы – построение алгоритмов численного решения задач гидродинамики со свободной поверхностью и с уточненными граничными условиями на параллельных вычислительных системах [4] и моделирования сгонно-нагонных процессов и затопления прибрежных районов суши.

Для сравнения построены два варианта непрерывной модели: на основе классических уравнений Навье–Стокса и на основе гиперболизированных уравнений гидродинамики. Последняя модель допускает аппроксимацию с помощью явных схем, что может оказаться более выгодным с точки зрения программной реализации на параллельных вычислительных системах, поскольку позволяет избежать синхронизаций и передач данных при решении сеточных уравнений, аппроксимирующих исходную задачу. С другой стороны, условие устойчивости явной схемы налагает более жесткое ограничение на шаг по времени, что увеличивает количество шагов по времени, необходимых для получения решения в заданный момент времени.

1. Математическая модель мелководной гидродинамики для прогнозирования затопления прибрежных районов на основе уравнений Навье–Стокса. 1.1. Формулировка непрерывной модели

В модель входят [5–7]:

Уравнения движения (Навье–Стокса) в векторном виде:

$$(\rho \mathbf{v})'_t + \text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\text{grad}P + \text{div}(\eta \text{grad} \mathbf{v}) + \rho \mathbf{f}, \quad (1)$$

– уравнение неразрывности:

$$\rho'_t + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2)$$

– уравнение, описывающее эволюцию функции заполненности:

$$q'_t + (\text{grad}q)^T \cdot \mathbf{v} = |\text{grad}q| \cdot \omega, \quad (3)$$

где η – тензор динамической вязкости; μ – тензор кинематической вязкости; ρ – функция плотности жидкости; \mathbf{v} – вектор скорости движения среды; P – давление; \mathbf{g} – вектор ускорения свободного падения; \mathbf{a} – сила Кориолиса, $\mathbf{f} = \kappa + \mathbf{g}$.

Граничные условия модели следуют из уравнений модели в предположении соблюдения физических свойств границы. В работе получено уточненное граничное условие для свободной поверхности:

Граничное условие для давления получено из уравнений (1) и (3):

$$\left| \mathbf{n} \right| \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} = -(\rho q'_t)'_t + (\rho \mathbf{n} \omega)'_t + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}'_t - \text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + \text{div}(\eta \text{grad} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}. \quad (4)$$

Граничное условие для скорости учитывает касательные напряжения, вызываемые ветром, и использует закон Ван-Дорна [7].

Условие для нахождения формы свободной поверхности:

$$q = \eta(P - P_a),$$

где P_a – атмосферное давление. Последнее граничное условие справедливо только при ограничении $\|\mathbf{v}'_t\| \ll g$.

Для непрерывной модели изучено влияние источников на суммарную механическую энергию системы, показано отсутствие нефизичных источников.

1.2. Расщепление непрерывной модели по физическим процессам. При решении задачи гидродинамики (1)–(3) основной сложностью является нахождение поля давления. Компоненты поля скоростей входят во все уравнения (1) – (3), а поле давления содержится в уравнении (1), поэтому непонятно, какое уравнение следует использовать для нахождения поля давления. Один из способов разрешения этой проблемы базируется на методе поправки к давлению [8].

Будем искать поле скоростей в два этапа. Для этого введём в рассмотрение поле скоростей $\tilde{\mathbf{v}}$, которое не обязательно удовлетворяет уравнению неразрывности:

$$\frac{\rho^n \tilde{\mathbf{v}}^n - \rho^n \mathbf{v}^n}{h_t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}^{n+\sigma} \cdot \mathbf{v}^n) = \operatorname{div}(\boldsymbol{\eta} \operatorname{grad} \mathbf{v}^{n+\sigma}) + \rho f. \quad (5)$$

Требуемое поле скоростей \mathbf{v} найдем исходя из уравнения неразрывности и используя вспомогательное поле $\tilde{\mathbf{v}}$ и поле давления:

$$\frac{\rho^{n+1} \mathbf{v}^{n+1} - \rho^n \tilde{\mathbf{v}}^n}{h_t} = -\operatorname{grad} P^n. \quad (6)$$

Поле давления рассчитывается таким образом, чтобы полученное поле скорости удовлетворяло уравнению неразрывности:

$$\tau \cdot \operatorname{div}(\operatorname{grad} P^n) = \rho_t^n + \operatorname{div}(\rho^n \tilde{\mathbf{v}}^n). \quad (7)$$

Граничные условия выводятся из физических свойств границы и уравнений (5)–(7) и согласуются с граничными условиями непрерывной модели.

Так, граничное условие для свободной границы примет следующий вид:

$$|\mathbf{n}| \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\rho^n (\tilde{\mathbf{v}}^n, \mathbf{n})}{h_t} - \frac{\rho^{n+1} q_t^n}{h_t}. \quad (8)$$

Граничное условие для непроницаемой границы можно получить из (8), полагая, что граница области не изменяется во времени, т.е. что $q \equiv \text{const}$.

1.3. Дискретизация уравнений модели. Для аппроксимации уравнений модели по времени используется метод поправки к давлению. Также для улучшения аппроксимации границы для дискретизации пространственных производных используется интегроинтерполяционный метод, учитывающий частичную заполненность ячеек расчетной сетки [1]. Приведем аппроксимацию конвективных и диффузионных слагаемых:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_{i,j,k}} (\rho u \phi)'_x d\omega &\cong q_{i+1, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} \frac{(\rho u \phi)_{i+1, j, k} - (\rho u \phi)_{i, j, k}}{2} h_y h_z + \\ &+ q_{i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} \frac{(\rho u \phi)_{i, j, k} - (\rho u \phi)_{i-1, j, k}}{2} h_y h_z, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_{i,j,k}} (\eta \phi_x)'_x d\omega &\cong q_{i+1, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \eta_{i+\frac{1}{2}, j, k} \frac{\phi_{i+1, j, k} - \phi_{i, j, k}}{h_x} h_y h_z - \\ &- q_{i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \eta_{i-\frac{1}{2}, j, k} \frac{\phi_{i, j, k} - \phi_{i-1, j, k}}{h_x} h_y h_z + \\ &+ \left(q_{i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} - q_{i+1, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} \right) \eta_{i, j, k} \phi'_{xi, j, k} h_y h_z, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\Omega_{i,j,k}$ – ячейка расчетной сетки.

Показано, что модель является консервативной, погрешность аппроксимации дискретной модели имеет второй порядок по пространству во внутренних узлах и первый порядок – в приграничных узлах. Также показано, что при использовании обычного интегроинтерполяционного метода в приграничных узлах имеет место нулевой порядок погрешности аппроксимации, т.е. допускается константная ошибка. Условия устойчивости модели имеют следующий вид:

$$h_x < \frac{2\mu}{\rho|u|}, \quad h_x < \frac{2\mu}{\rho|v|}, \quad h_x < \frac{2\mu}{\rho|w|}.$$

$$h_t < \frac{\|\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

2. Математическая модель мелководной гидродинамики для прогнозирования затопления прибрежных районов на основе гиперболизированных уравнений гидродинамики. 2.1. Формулировка непрерывной модели. Построенная в предыдущем пункте модель гидродинамики, как и сами уравнения Навье-Стокса, основаны на уравнениях параболического типа, которые, как известно, не способны описывать передачу рассматриваемых физических величин с конечной скоростью, что противоречит реально протекающему физическому процессу. В то же время уравнения гиперболического типа лишены этого недостатка, при этом образуется фронт волны, а скорость его движения зависит от коэффициента при второй производной по времени [9–11]. К тому же вторая производная по времени выступает в качестве регуляризирующего слагаемого, которое сглаживает решение по времени и позволяет ослабить ограничения устойчивости на шаг по времени при использовании явной разностной схемы.

Описание распространения возмущений в водной среде с конечной скоростью становится возможным благодаря введению сжимаемости, т.е. зависимости плотности от давления. Будем полагать, что имеет место следующее уравнение состояния [12–15]:

$$P = P_0 + \beta(\rho - \rho_0), \quad (11)$$

где β – коэффициент сжимаемости жидкости, который имеет достаточно большие значения для слабосжимаемых жидкостей (для воды $\beta = 2.13 \cdot 10^6 \frac{H \cdot M}{K^2}$).

С учетом выше сказанного, гиперболизированная система уравнений движения жидкости с учетом (11) примет следующий вид:

$$\tau \cdot (\rho \mathbf{v})''_{t^2} + (\rho \mathbf{v})'_t + \text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\text{grad}P + \text{div}(\eta \text{grad} \mathbf{v}) + \rho \mathbf{f}, \quad (12)$$

$$\tau \cdot \rho''_{t^2} + \rho'_t + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (13)$$

$$\tau \cdot q''_{t^2} + q'_t + (\text{grad}q)^T \cdot \mathbf{v} = |\text{grad}q| \cdot \omega, \quad (14)$$

где τ – регуляризирующий параметр, определяющий время между взаимодействиями, которое по порядку равно времени, за которое акустическая волна проходит ячейку расчетной сетки:

$$\tau = \alpha \frac{\|\mathbf{h}\|}{c}, \quad (15)$$

где c – скорость звука в воде, а безразмерный параметр $\alpha \in [0; 1]$.

Граничное условие для давления для уравнений (12) – (14) на свободной границе имеет следующий вид:

$$\left| \mathbf{n} \right| \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} = -(\tau \rho q''_{t^2} + \rho q'_t)'_t + (\rho \mathbf{n} \omega)'_t + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}'_t - \text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + \text{div}(\eta \text{grad} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}. \quad (16)$$

2.2. Расщепление по физическим процессам и дискретизация. Расщепленная гиперболизированная система уравнений (12)–(14) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \tau \cdot \frac{\rho^n \tilde{\mathbf{v}}^n - 2\rho^n \mathbf{v}^n + \rho^{n-1} \mathbf{v}^{n-1}}{h_t^2} + \frac{\rho^n \tilde{\mathbf{v}}^n - \rho^{n-1} \mathbf{v}^{n-1}}{2h_t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}^{n+\sigma} \cdot \mathbf{v}^n) &= \operatorname{div}(\boldsymbol{\eta} \operatorname{grad} \mathbf{v}^{n+\sigma}) + \rho f, \\ \tau \cdot \rho_{it}^n + \rho_o^n &= h_t \cdot \beta \cdot \operatorname{div}(\operatorname{grad} \rho^n) - \operatorname{div}(\rho^n \tilde{\mathbf{v}}^n), \\ \tau \cdot \frac{\rho^{n+l} \mathbf{v}^{n+l} - \rho^n \tilde{\mathbf{v}}^n}{h_t^2} + \frac{\rho^{n+l} \mathbf{v}^{n+l} - \rho^n \tilde{\mathbf{v}}^n}{2h_t} &= -\operatorname{grad} P^n. \end{aligned}$$

Граничное условие (16) для расщепленной модели переписывается в виде

$$\mathbf{n} \left| \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} \right. = \left(\frac{\tau}{h_t^2} + \frac{1}{2h_t} \right) (\rho^n (\tilde{\mathbf{v}}^n, \mathbf{n}) - \rho^{n+1} q_i^n - \tau \rho^{n+1} q_{it}^n).$$

Аппроксимация операторов дифференцирования по пространственным направлениям выполнена согласно (9), (10). Для устойчивости полученной разностной схемы необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} \tau \leq h_t, \quad h_t \leq \frac{\|\mathbf{h}\|}{\sqrt{2\beta}}, \quad \|\mathbf{v}\| \leq \sqrt{2\beta}, \\ h_t \leq \min \left(\frac{\rho h_x}{2\mu}, \frac{\rho h_y}{2\mu}, \frac{\rho h_z}{2\eta} \right), \quad h_x \leq \frac{2\mu}{\rho|u|}, \quad h_y \leq \frac{2\mu}{\rho|v|}, \quad h_z \leq \frac{2\mu}{\rho|w|}. \end{aligned}$$

Наибольший интерес представляет ограничение на шаг по времени. Оценим величину допустимого шага по времени для реального расчета. Примем $\|\mathbf{h}\| = 1000 \text{ м}$, $\beta = 2.13 \cdot 10^6 \frac{H \cdot \text{м}}{\text{кг}}$, тогда $h_t \leq 0.48 \text{ с}$.

3. Аналитическое сравнение вычислительной сложности алгоритмов на основе классических уравнений Навье-Стокса и гиперболизированной системы гидродинамики. Найдем количество полных проходов по всем ячейкам расчетной сетки, необходимых для получения решения в заданный момент времени для обоих алгоритмов. Положим, что расчетная сетка содержит $N_1 \times N_2 \times N_3$ узлов, расчетная область имеет характерные размеры $l_1 \times l_2 \times l_3$, u , v , w – характерные скорости по трем пространственным направлениям.

Для простоты будем полагать, что необходимо получить решение в момент времени $T = \min \left(\frac{h_x}{|u|}, \frac{h_y}{|v|}, \frac{h_z}{|w|} \right)$, т.е. необходимо выполнить один шаг по времени.

При этом необходимо решить уравнения типа диффузии-конвекции-реакции, что, в случае применения ПТМ совместно с методами градиентного спуска займет порядка $\max(N_1, N_2, N_3)$ итераций [16–18], а в случае применения ПТМ совместно с методами сопряженных и бисопряженных направлений займет порядка $\max(\sqrt{N_1}, \sqrt{N_2}, \sqrt{N_3})$ итераций.

В случае использования гиперболизированной системы уравнений для получения решения в момент времени T необходимо выполнить $\sqrt{2\beta} \min \left(\frac{h_x}{|u|}, \frac{h_y}{|v|}, \frac{h_z}{|w|} \right) / \min(h_x, h_y, h_z)$ явных шагов по времени [19–20]. Таким

образом, использование гиперболизированной системы уравнений является более предпочтительным с вычислительной точки зрения при выполнении условия:

$$\max(\sqrt{N_1}, \sqrt{N_2}, \sqrt{N_3}) > \sqrt{2\beta} \min\left(\frac{h_x}{|u|}, \frac{h_y}{|v|}, \frac{h_z}{|w|}\right) / \min(h_x, h_y, h_z). \quad (17)$$

При решении задач гидродинамики мелководных водоемов на основе трехмерной системы уравнений Навье-Стокса ограничение на шаг по времени определяется вертикальной составляющей скорости и пространственным шагом по вертикальному направлению, поэтому формула (17) примет следующий вид:

$$\max(\sqrt{N_1}, \sqrt{N_2}, \sqrt{N_3}) > \frac{\sqrt{2\beta}}{|w|}, \quad (18)$$

где $\sqrt{\beta} = c$ – скорость звука в воде.

Таким образом, в случае большой размерности расчетной сетки и больших скоростях течений регуляризованная явная модель является вычислительно более эффективной по сравнению с моделью, основанной на классических уравнениях Навье-Стокса.

4. Численные эксперименты. Для проверки физичности получаемых результатов, а также сравнения прогнозируемых гидродинамических параметров и быстродействия программ на основе классических и гиперболизированных уравнений Навье-Стокса выполнено математическое моделирование затопления прибрежных регионов Азовского моря вследствие штормового нагона, который имел место 24–25 сентября. Скорость и направление ветра приведены в табл. 1.

Таблица 1

Скорость и направление ветра, а также уровень воды в районе порта г. Таганрога во время штормового нагона 24–25 сентября

Момент времени	00:00 24.09	04:00 24.09	08:00 24.09	12:00 24.09	16:00 24.09	20:00 24.09	24:00 24.09	04:00 25.09
Направление	Ю-В	Ю-В	Ю	Ю-Ю-З	Ю-Ю-З	З	Ю-З	Ю-З
Скорость	17 м/с	18 м/с	27 м/с	33 м/с	37 м/с	33 м/с	22 м/с	18 м/с
Уровень воды, см	12	24	66	160	380	420	300	280

В качестве начального приближения использовался расчет гидродинамики Азовского моря со свободной поверхностью в условиях отсутствия ветра. При выполнении расчета полагалось, что возрастание ветра от начального приближения до юго-восточного ветра со скоростью 17 м/с (первый столбец таблицы 1) происходило постепенно в течение 5 часов. Из графиков на рис. 1 видно, что рассчитанные значения располагаются достаточно близко к наблюдаемым, что подтверждает точность построенной модели.

Также выполнена параллельная программная реализация расчета математической модели гидродинамики и сгонно-нагонных явлений в мелководных водоемах на основе регуляризованных уравнений Навье-Стокса на параллельной вычислительной системе с общей памятью с помощью библиотеки OpenMP. Результаты измерений ускорения представлены на рис. 2, а эффективности – на рис. 3.

Из рис. 3 видно, что эффективность параллельной программы превышает единицу, это означает, что программа показывает суперлинейное ускорение. Это происходит вследствие независимости вычислений в пределах каждой итерации по времени, единственными дополнительными расходами является барьерная синхронизация. Фактором, позволяющим достичь суперлинейного ускорения, является уменьшение объема вычислений, выполняемых каждым процессором при увеличении их числа, что позволяет сократить число синхронизаций КЭШ процессоров с ОЗУ.

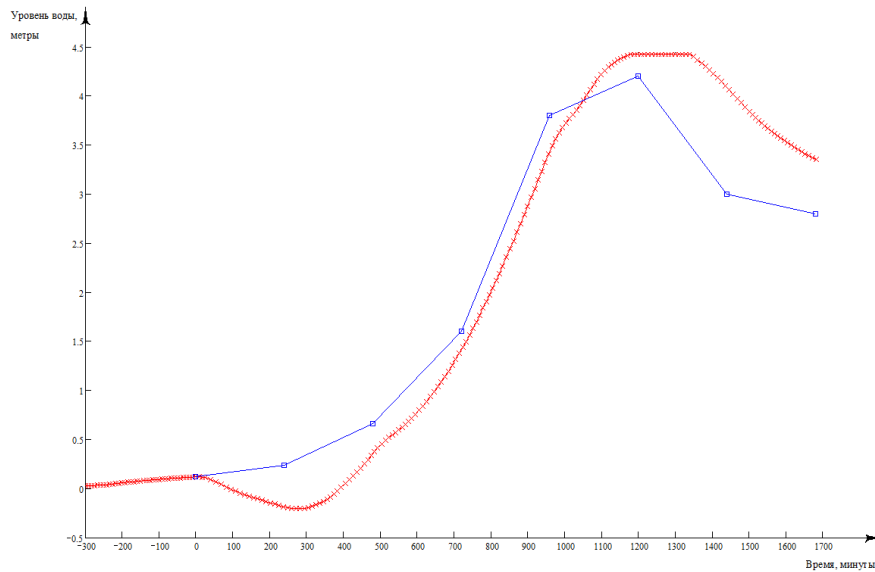


Рис. 1. График зависимости высоты уровня жидкости в районе набережной г. Таганрога от времени (метки «×» – рассчитанные значения, метки «□» – наблюдаемые значения)

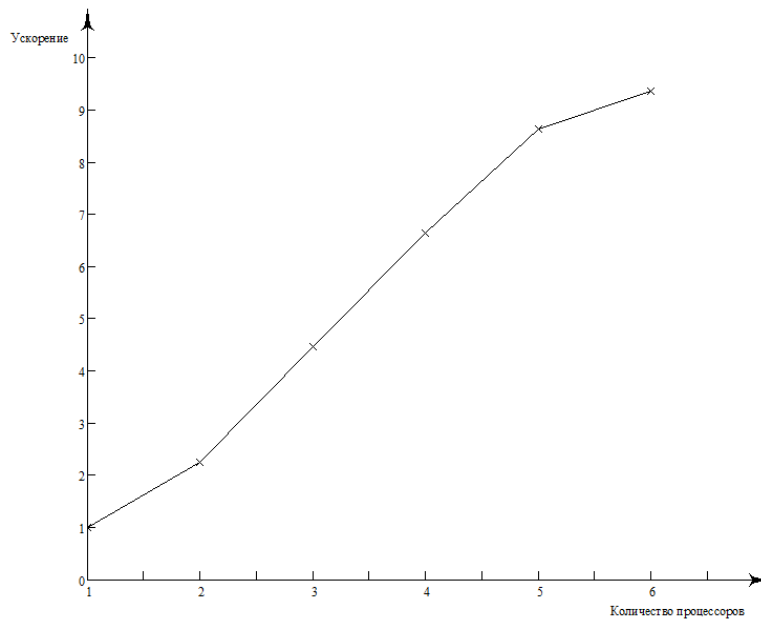


Рис. 2. Зависимость ускорения параллельной программы от количества процессоров

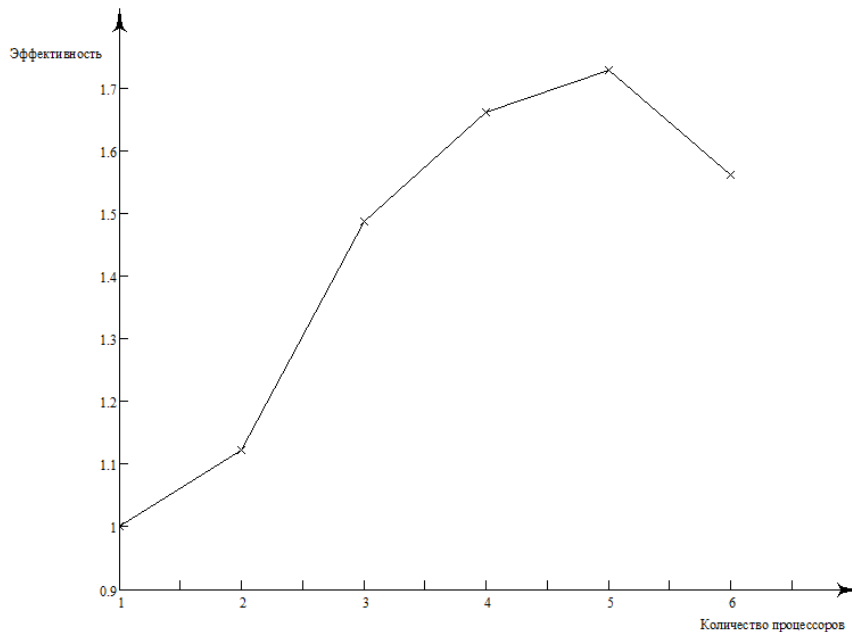


Рис. 3. Зависимость эффективности параллельной программы от количества процессоров.

Выводы. Построена математическая модель гидродинамики и сгонно-нагонных явлений в мелководных водоемах на основе введения регуляризирующего слагаемого, что позволило увеличить шаг по времени при решении уравнений модели на основе явных схем и повысить эффективность реализации алгоритма, в том числе на параллельных вычислительных системах по сравнению с моделью на основе классических уравнений Навье-Стокса. Регуляризирующий параметр τ определяется из условий устойчивости явной разностной схемы и несет физический смысл времени между взаимодействиями, которое по порядку равно времени, за которое акустическая волна проходит ячейку расчетной сетки, и определяется по формуле (15).

Выполнено аналитическое исследование эффективности применения гиперболизированных уравнений по сравнению с классическими моделями и показано, что модель с регуляризатором обладает вычислительным преимуществом по сравнению с классической моделью на основе уравнений Навье-Стокса при выполнении неравенства (18). Таким образом, из формулы (18) видно, что при малых значениях скорости течений и грубой расчетной сетке вычислительным преимуществом обладает модель на основе классических уравнений Навье-Стокса, а в случае измельчения сетки или возрастания скоростей течений имеет смысл использовать регуляризованную модель.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шишениа А.В. Трехмерная модель гидродинамики и процессов переноса тепла и солей в акватории Азовского моря с учетом сгонно-нагонных явлений // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 44-57.
2. Васильев В.С, Сухинов А.И. Прецизионные двумерные модели мелких водоемов // Математическое моделирование. – 2003. – Т. 15, № 10. – С. 17-34.

3. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Тимофеева Е.Ф., Шишения А.В. Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 8. – С. 32-44.
4. Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е. Моделирование сценария биологической реабилитации Азовского моря // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 9. – С. 3-21.
5. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Alekseenko E.V. Numerical realization of the three-dimensional model of hydrodynamics for shallow water basins on a high-performance system // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2011. – Vol. 3, № 5. – P. 562-574.
6. Alekseenko E., Roux B., Sukhinov A., Kotarba R., Fougere D. Nonlinear hydrodynamics in a Mediterranean lagoon // Nonlinear Processes in Geophysics. – 2013. – № 20 (2). – С. 189-198.
7. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., E.F. Timofeeva E.F., Shishenya A.V. Mathematical model for calculating coastal wave processes // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2013. – № 5 (2).
8. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Фоменко Н.А. Методика построения разностных схем для задачи диффузии-конвекции-реакции, учитывающих степень заполненности контрольных ячеек // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – № 4 (141). – С. 87-98.
9. Alekseenko E., Sukhinov A., Roux B., Kotarba R., Fougere D. coastal hydrodynamics in a windy lagoon // Computers & Fluids. – 2013. – Т. 77. – С. 24-35.
10. Четверушкин Б.Н. Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 11. – С. 33-52.
11. Chetverushkin B.N. Resolution limits of continuous media models and their mathematical formulations // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2013. – Vol. 5, № 3. – P. 266.
12. Chetverushkin B.N., Shilnikov E.V., Davydov A.A. Numerical simulation of the continuous media problems on hybrid computer systems // Advances in engineering software. – 2013. – Vol. 60-61. – P. 42-47.
13. Шильников Е.В. Моделирование течений вязкого газа на основе КГД системы уравнений на неортогональных индексных сетках // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2014. – № 33. – С. 1-20.
14. Четверушкин Б.Н., Абалакин И.В., Антонов М.А., Дородницын Л.В., Елизарова Т.Г., Косарев Л.В., Лукин А.В., Трапезникова М.А., Шеретов Ю.В., Шобухов А.В., Гуров Д.Б., Чайка А.С. Кинетически-согласованные разностные схемы газовой динамики, отчет о НИР № 94-01-01526 (Российский фонд фундаментальных исследований).
15. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E. Adaptive modified alternating triangular iterative method for solving grid equations with a non-self-adjoint operator // Nonlinear Processes in Geophysics. – 2013. – № 20 (2). – P. 189-198.
16. Sukhinov A.I., Shishenya A.V. Increasing efficiency of alternating triangular method based on improved spectral estimates // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2013. – № 5(3).
17. Сухинов А.И., Шишения А.В. Улучшение оценки параметра γ_1 попеременно-треугольного итерационного метода с априорной информацией // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 7-15.
18. Trapeznikova M.A., Chetverushkin B.N., Churbanova N.G., Morozov D.N. A kinetically based algorithm for porous medium flow simulation on multicore computer systems, ECCOMAS 2012 – European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, e-Book Full Papers 2012. – P. 2702-2708.
19. Chetverushkin B.N., Davydov A.A., Shilnikov E.V. Simulating flows of incompressible and weakly compressible fluids on multicore hybrid computer systems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2010. – Т. 50, № 12. – P. 2157-2165.

REFERENCES

1. Shishenya A.V. Trekhmernaya model' gidrodinamiki i protsessov perenosa tepla i soley v akvatorii Azovskogo morya s uchetom sgonno-nagonnykh yavleniy [Three-dimensional model of hydrodynamics and heat and salinity transfer in the sea of Azov taking into account wind-surge phenomena], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2011, No. 8 (121), pp. 44-57.

2. Vasil'ev V.S., Sukhinov A.I. Precizionnye dvumernye modeli melkikh vodoemov [Precision two-dimensional model of shallow pools], *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling], 2003, Vol. 15, No. 10, pp. 17-34.
3. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Timofeeva E.F., Shishenya A.V. Matematicheskaya model' rascheta pribrezhnykh volnovykh protsessov [The mathematical model of calculation of coastal wave processes], *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling], 2012, Vol. 24, No. 8, pp. 32-44.
4. Sukhinov A.I., Nikitina A.V., Chistyakov A.E. Modelirovanie stseneriya biologicheskoy reabilitatsii Azovskogo morya [The scenario modeling biological rehabilitation of the Azov sea], *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling], 2012, Vol. 24, No. 9, pp. 3-21.
5. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Alekseenko E.V. Numerical realization of the three-dimensional model of hydrodynamics for shallow water basins on a high-performance system, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2011, Vol. 3, No. 5, pp. 562-574.
6. Alekseenko E., Roux B., Sukhinov A., Kotarba R., Fougere D. Nonlinear hydrodynamics in a Mediterranean lagoon, *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2013, No. 20 (2), pp. 189-198.
7. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., E.F. Timofeeva E.F., Shishenya A.V. Mathematical model for calculating coastal wave processes, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2013, No. 5(2).
8. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Fomenko N.A. Metodika postroeniya raznostnykh skhem dlya zadachi diffuzii-konveksii-reaktsii, uchityvayushchikh stepen' zapolnennosti kontrol'nykh yacheek [Method of construction difference scheme for problems of diffusion-convection-reaction, takes into the degree filling of the control volume], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2013, No. 4 (141), pp. 87-98.
9. Alekseenko E., Sukhinov A., Roux B., Kotarba R., Fougere D. coastal hydrodynamics in a windy lagoon, *Computers & Fluids*, 2013, T. 77, pp. 24-35.
10. Chetverushkin B.N. Predely detalizatsii i formulirovka modeley uravneniy sploshnykh sred [The limits of detail and formulation of the model equations of continuous media], *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling], 2012, Vol. 24, No. 11, pp. 33-52.
11. Chetverushkin B.N. Resolution limits of continuous media models and their mathematical formulations, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2013, Vol. 5, No. 3, pp. 266.
12. Chetverushkin B.N., Shilnikov E.V., Davydov A.A. Numerical simulation of the continuous media problems on hybrid computer systems, *Advances in engineering software*, 2013, Vol. 60-61, pp. 42-47.
13. Shil'nikov E.V. Modelirovanie techeniy vyazkogo gaza na osnove KGD sistemy uravneniy na neortogonal'nykh indeksnykh setkakh [Modeling of flows of viscous gas on the basis of ODG system of equations on non-orthogonal index grids], Preprinty IPM im. M.V. Keldysha [Preprints IPM M.V. Keldysh], 2014, No. 33, pp. 1-20.
14. Chetverushkin B.N., Abalakin I.V., Antonov M.A., Dorodnitsyn L.V., Elizarova T.G., Kosarev L.V., Lukshin A.V., Trapeznikova M.A., Sheretov Yu.V., Shobukhov A.V., Gurov D.B., Chayka A.S. Kineticheski-soglasovannye raznostnye skhemy gazovoy dinamiki, otchet o NIR № 94-01-01526 [Kinetically-consistent finite difference schemes of gas dynamics, research report No. 94-01-01526] (Rossiyskiy fond fundamental'nykh issledovaniy).
15. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E. Adaptive modified alternating triangular iterative method for solving grid equations with a non-self-adjoint operator, *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2013, No. 20 (2), pp. 189-198.
16. Sukhinov A.I., Shishenya A.V. Increasing efficiency of alternating triangular method based on improved spectral estimates, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2013, No. 5(3).
17. Sukhinov A.I., Shishenya A.V. Uluchshenie otsenki parametra γ_1 poperemenno-treugol'nogo iteratsionnogo metoda s apriornoy informatsiey [Improvement estimation of γ_1 for ssor with a priori information], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2010, No. 6 (107), pp. 7-15.
18. Trapeznikova M.A., Chetverushkin B.N., Churbanova N.G., Morozov D.N. A kinetically based algorithm for porous medium flow simulation on multicore computer systems, ECCOMAS 2012 – European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, e-Book Full Papers 2012, pp. 2702-2708.

19. *Chetverushkin B.N., Davydov A.A., Shil'nikov E.V.* Simulating flows of incompressible and weakly compressible fluids on multicore hybrid computer systems, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2010, Vol. 50, No. 12, pp. 2157-2165.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Я.Е. Ромм.

Сухинов Александр Иванович – Южный федеральный университет; e-mail: sukhinov@gmail.com; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634315638; кафедра математического обеспечения суперкомпьютеров; профессор.

Шишениа Александр Владимирович – ассистент.

Sukhinov Alexander Ivanovich – Southern Federal University; e-mail: sukhinov@gmail.com; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634315638; the department of mathematical software supercomputers; professor.

Shishenya Aleksandr Vladimirovich – assistant.

УДК 532.5.031

Д.В. Лапин, А.Е. Чистяков, А.А. Сухинов

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ
ДИФфуЗИИ-КОНВЕКЦИИ НА МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ СИСТЕМАХ
ДЛЯ ПРОГНОЗА И РЕТРОСПЕКТИВНОГО АНАЛИЗА ВОДНЫХ
ЭКОСИСТЕМ***

Рассмотрены двумерные обратные задачи диффузии-конвекции, необходимость оперативного решения которых возникает при ретроспективном анализе техногенных и природных экологических катастроф. Алгоритм решения обратных задач основан на методе квазиобращения и последующего итерационного уточнения начального условия. Численные методы основаны на использовании схем расщепления по пространственным направлениям с последующим решением полученных систем линейных уравнений методом прогонки. Приведено описание предложенных параллельных алгоритмов и теоретические оценки ускорения и эффективности для систем с общей и распределенной памятью, а также гибридных систем. Поля течений для модели диффузии-конвекции рассчитываются при помощи трёхмерной гидродинамической модели, учитывающей стоки рек, геометрию дна и береговой линии, силу Кориолиса и прочие факторы. Общей особенностью предложенных моделей является учёт «заполненности» ячеек при расчёте на прямоугольной сетке. Заполненность отражает процент заполнения ячейки жидкостью, и позволяет более точно аппроксимировать криволинейную границу расчётной области по сравнению с бинарной функцией принадлежности ячейки расчётной области. На основе разработанного комплекса программ проведён численный эксперимент по восстановлению исходного поля концентрации загрязняющих веществ.

Перенос взвеси; обратные задачи; гидродинамика; численный эксперимент.

*Работа выполнена при частичной поддержке проектов Программы № 43 фундаментальных исследований Президиума РАН по стратегическим направлениям развития науки «Фундаментальные проблемы математического моделирования».