

УДК 681.5.013

**А.Р. Гайдук, В.Х. Пшихопов, В.Е. Беляев, И.О. Шаповалов, К.В. Бесклубова**  
**СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОВОЗОМ**  
**С ПРИМЕНЕНИЕМ УФЖ\***

*Синтезируется нелинейная система управления скоростью движения электропоезда. При этом используется метод преобразования переменных состояния, что позволяет представить уравнения нелинейной системы в форме, удобной для аналитического синтеза систем управления. В данном случае нелинейные уравнения электропоезда были приведены к управляемой форме Жордана и записаны в отклонениях. В результате впервые показано, что электровоз сохраняет управляемость, пока производная силы сцепления колеса с рельсом по скорости скольжения не равна нулю. Сделан вывод о необходимости управления движением электропоезда таким образом, чтобы скорость скольжения не превышала критической. При этом условия методом аналитического синтеза систем управления синтезирован нелинейный закон управления скорости движения электропоезда, который позволяет учитывать естественные нелинейные характеристики всех его элементов. Полученный закон управления легко реализуется с помощью цифровых средств автоматизации. Так как некоторые нелинейности элементов электровоза часто задаются графически, то для практической реализации синтезированного закона управления требуется аппроксимация этих нелинейностей аналитическими функциями.*

*Электропоезд; уравнения системы; преобразование; управляемая форма Жордана; скольжение.*

**A.R. Gaiduk, V.H. Pshikhopov, V.E. Belyaev, I.O. Shapovalov, K.V. Besklubova**  
**NONLINEAR CONTROL SYSTEM DESIGN FOR THE ELECTRIC**  
**LOCOMOTIVE WITH APPLICATION OF JCF**

*In the report the nonlinear control system of an electric train speed is designed. Thus the method of the state variables transformation that allows presenting the equations of nonlinear system to the form convenient for analytical control system design is used. In this case the nonlinear equations of an electric train have been resulted in Jordan controlled form and written down in deviations. In result at the first time it is shown, that the electric locomotive keeps controllability while the derivative of coupling force of a wheel with a rail on speed of sliding is not equal to zero. The conclusion about necessity of control by movement of an electric train is made so that speed of sliding did not exceed critical speed. Provided that the nonlinear law of the electric train speed control, which allows taking into account natural nonlinear characteristics of all it's the elements, is designed by method of control systems analytical design. The received control law is easily realized with the help of a digital automation means. As the some nonlinearity of electric locomotive elements frequently are given to graphically for practical realization of the designed control law needs an approximation of these nonlinearity by analytical functions.*

*The electric train; the system equations; the transformation; the Jordan controlled form; sliding.*

**Введение.** Увеличение объёма железнодорожных перевозок связано в первую очередь с повышением провозной способности железных дорог и эффективности самих перевозок. Одним из способов повышения эффективности железнодорожных перевозок с использованием электровозов является снижение объемов потребляемой ими электроэнергии. Достичь этого можно, в частности, путем совершенствования системы управления тягой электровоза за счет учета нелинейных характеристик электродвигателей и профиля пути. [1, 2]. В целом это приводит к

\* Работа выполнена при поддержке: РФФИ, грант № 13-08-00315; грант Президента РФ МД-1098.2013.10; гранта НШ-3437.2014.10.

некоторому усложнению алгоритмов управления электровозом, однако их реализация не требует значительных капитальных затрат на модернизацию собственно электровозов, так как при использовании современных цифровых систем управления задача сводится лишь к перепрограммированию управляющих модулей.

Несмотря на то, что математические модели электродвигателей (даже постоянного тока), локомотива и вагонов являются существенно нелинейными, на практике чаще всего используются линейные, точнее линеаризованные модели [1, 3, 4], которые приводят к приближенным решениям. Применение же приближенных методов приводит к возникновению ошибок и повышенному расходу электроэнергии [3]. Поэтому важным моментом улучшения эксплуатационных свойств электровозов, в плане снижения энергопотребления, является учет нелинейных факторов, характерных для движения поездов. Это тем более важно, что в настоящее время разработаны аналитические методы синтеза, позволяющие учесть нелинейности при некоторых видах моделей нелинейных объектов управления. К таким моделям относится, в частности, управляемая форма Жордана (УФЖ) уравнений нелинейных объектов [5, 6].

В данной работе путем некоторого преобразования нелинейных уравнений движения поезда с электровозом к УФЖ и применения метода аналитического синтеза систем управления (АСИНСУ) разрабатывается нелинейное управление электровозом с учетом его естественных нелинейностей [6].

**1. Уравнения электропоезда.** Условимся колесную пару локомотива, к которой приложен вращающий момент (ускоряющий или тормозящий), называть активной, в противном случае колесная пара называется пассивной. В теории движения поездов считается, что активные колесные пары локомотива вращаются со скольжением [7–10]. Скорость скольжения определяется выражением

$$V_{\text{ск}} = \omega_{\text{к}} R_{\text{к}} - V_{\text{лок}}, \quad (1)$$

где  $V_{\text{ск}}$  – скорость скольжения,  $\omega_{\text{к}}$  – угловая скорость вращения колес активной колесной пары,  $V_{\text{лок}}$  – скорость движения локомотива. Из (1) следует, что скорость скольжения – это разность между линейной скоростью верхней точки обода колеса активной колесной пары и скоростью локомотива. Обычно предполагается, что проскальзывание пассивных колесных пар отсутствует, поэтому угловая скорость вращения колесных пар пассивных тележек определяется выражением  $\omega_{\text{к,пас}} = V_{\text{лок}} / R_{\text{к}}$  [10].

Силой тяги локомотива фактически является сила сцепления колеса с рельсом, зависящая от скорости скольжения и скорости движения локомотива. Для описания этой зависимости применяются различные соотношения [2, 7–11]. Однако наиболее распространенной, по отношению к одной активной колесной паре, является следующая формула:

$$F_{\text{сц}}(V_{\text{ск}}) = k_{\text{сц}}(V_{\text{ск}}) \frac{\Psi_{\text{max}} P_{\text{лок}}}{2(n_{\text{акт}} + n_{\text{пст}})}, \quad (2)$$

где  $k(V_{\text{ск}})$  – коэффициент сцепления;  $\Psi_{\text{max}}$  – максимальное значение коэффициента сцепления;  $m_{\text{лок}}, P_{\text{лок}} = m_{\text{лок}} g$  – масса и вес локомотива;  $P_{\text{лок}} / 2(n_{\text{акт}} + n_{\text{пст}})$  – вес локомотива, приходящийся на одну колесную пару локомотива, в Ньютонах;  $g = 9,81$  – ускорение свободного падения;  $k(V_{\text{ск}})$  – коэффициент сцепления [2, 7, 8, 10];  $n_{\text{пст}}, n_{\text{акт}}$  – числа пассивных и активных тележек локомотива.

В различных источниках приводятся различные выражения для определения коэффициента сцепления  $k(V_{\text{ск}})$ . Например, из выражений, приведенных в [8], вытекают следующие формулы:

при  $0 \leq V_{\text{ск}} \leq 0,028$  м/с

$$k(V_{\text{ск}}) = 20,718 \cdot V_{\text{ск}}, \quad 0 \leq K(V_{\text{ск}}) \leq 0,58, \quad (3)$$

при  $0,028 \leq V_{\text{ск}} \leq 0,28$  м/с

$$k(V_{\text{ск}}) = \frac{381,6 \cdot V_{\text{ск}} - 3,168}{360 \cdot V_{\text{ск}} + 2,88}, \quad 0,58 \leq K(V_{\text{ск}}) \leq 1, \quad (4)$$

при  $0,28 \leq V_{\text{ск}} \leq 0,5$  м/с

$$k(V_{\text{ск}}) = 1,064 - 0,227 \cdot V_{\text{ск}}, \quad 1 \geq K(V_{\text{ск}}) \geq 0,95, \quad (5)$$

наконец, при  $0,5 \leq V_{\text{ск}}$ ,

$$k(V_{\text{ск}}) = 0,57e^{-0,68(V_{\text{ск}}-0,5)} + 0,36e^{-0,036(V_{\text{ск}}-0,5)} + 0,02e^{-1,5(V_{\text{ск}}-0,5)}, \quad 0,95 \geq K(V_{\text{ск}}). \quad (6)$$

В этих выражениях  $V_{\text{ск}}$  – скорость скольжения в м/с. Отметим, что выражение (2) определяет значение силы сцепления, образуемой одной активной колесной парой. Кроме того, из выражений (4) и (5) следует, что производная  $\partial F_{\text{сц}}(V_{\text{ск}}) / \partial V_{\text{ск}}|_{V_{\text{ск}}=V_{\text{ск}}^*} = 0$ . В данном случае,  $V_{\text{ск}}^* = 0,28$  м/с. Значение  $V_{\text{ск}}^*$  называется критическим значением скорости скольжения. Следует отметить, что в разных источниках  $V_{\text{ск}}^*$  имеет разные значения, однако с его наличием согласны многие авторы [8, 10, 11].

Будем предполагать, что все активные колесные пары электровоза с двигателями постоянного тока находятся в одинаковых условиях. Тогда уравнения движения электропоезда (электровоза и вагонов) с учетом уравнений двигателя постоянного тока можно записать следующим образом [2, 12]:

$$\dot{I}_{\text{я}} = [-(R_{\text{я}} + R_{\text{в}})I_{\text{я}} - R_{\text{вт}}(I_{\text{я}} - I_{\mu}) - C_{\text{е}}\Phi(I_{\mu})i_{\text{ред}}\omega_{\text{к}} + u_{\text{дв}}] / L_{\text{я}}, \quad (7)$$

$$\dot{I}_{\mu} = (I_{\text{я}} - I_{\mu})R_{\text{вт}} / L_{\mu}(I_{\mu}), \quad (8)$$

$$\dot{\omega}_{\text{к}} = \begin{cases} 0, & M_{\text{д}} \leq (F_{\text{сц}}(V_{\text{ск}}) + F_{\text{трк}})R_{\text{к}} \text{ и } \omega_{\text{к}} = 0, \\ [C_{\text{е}}\Phi(I_{\mu})i_{\text{ред}}I_{\text{я}} - (F_{\text{сц}}(V_{\text{ск}}) + F_{\text{трк}})R_{\text{к}}] / J_{\text{пр}}, & \end{cases} \quad (9)$$

$$\dot{V}_{\text{лок}} = \begin{cases} 0, & 2n_{\text{акт}}F_{\text{сц}}(V_{\text{ск}}) \leq [F_{\text{дсп}}(V_{\text{лок}}, x)] \text{ и } V_{\text{лок}} = 0, \\ (2n_{\text{акт}}F_{\text{сц}}(V_{\text{ск}}) - F_{\text{дсп}}(V_{\text{лок}}, x)) / m_{\text{п}}, & \end{cases} \quad (10)$$

$$\dot{x} = V_{\text{лок}}, \quad (11)$$

где  $u_{\text{дв}}$ ,  $I_{\text{я}}$ ,  $R_{\text{я}}$  и  $\omega_{\text{к}}$  – напряжение, ток, активное сопротивление якорной цепи двигателя и угловая частота активной колесной пары;  $R_{\text{в}}$ ,  $L_{\mu}(I_{\mu})$  и  $I_{\mu}$  – активное сопротивление, индуктивность и ток обмотки возбуждения двигателя,  $R_{\text{вт}}$  – сопротивление, учитывающее рассеивание магнитного потока;  $C_{\text{е}}\Phi(I_{\mu})$  – нелинейная характеристика намагничивания;  $M_{\text{д}} = C_{\text{е}}\Phi(I_{\mu})i_{\text{ред}}I_{\text{я}}$  – вращающий момент на оси одной колесной пары активной тележки;  $i_{\text{ред}}$  – передаточное отношение редуктора;  $F_{\text{трк}}$  – сила сопротивления движению (сила трения качения) одной колесной пары локомотива. В соответствии с [2] её можно описать выражением

$$F_{\text{трк}} = \frac{1,9P_{\text{лок}}}{2000(n_{\text{акт}} + n_{\text{пст}})}; \quad (12)$$

$J_{\text{пр}}$  – приведенный к оси колесной пары момент инерции вращающихся элементов двигателя, редуктора и тележки;  $1,9P_{\text{лок}}/2000$  – часть постоянной составляющей силы сопротивления продольному движению одной активной оси согласно [2];  $V_{\text{лок}}$  – продольная скорость локомотива;  $m_{\text{п}}$  – масса поезда;  $F_{\text{дсп}}(V_{\text{лок}}, x)$  – сила дополнительного сопротивления движению поезда, зависящая от скорости движения локомотива, вагонов и профиля пути, в Ньютонах;  $x = x(t)$  – путь, пройденный электропоездом к моменту времени  $t$ .

Характеристика намагничивания  $C_e \Phi(I_{\mu})$  двигателей постоянного тока обычно задается графически. В случае тягового двигателя ТЛ-2К1 имеет вид, приведенный на рис. 1. Это гладкая функция, которая достаточно точно аппроксимируется полиномами и является дифференцируемой.

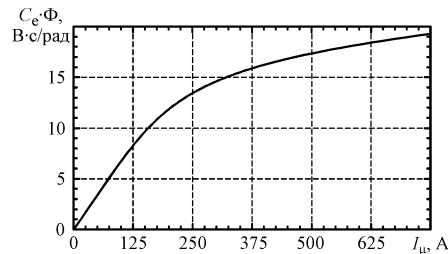


Рис. 1. Характеристика намагничивания

Характеристика намагничивания определяет и нелинейную зависимость индуктивности  $L_{\mu} = L_{\mu}(I_{\mu})$ , которая в случае двигателя ТЛ-2К1 имеет вид  $L_{\mu} = (76\pi/14)dC_e \Phi(I_{\mu})/dI_{\mu}$ .

Сила дополнительного сопротивления движению поезда, как и масса поезда  $m_{\text{п}}$ , определяется по формулам, приведенным, например, в книгах [2, 12]. Предполагая, что электропоезд состоит из локомотива и вагонов одного типа, следуя [2], найдем, что сила  $F_{\text{дсп}}(V_{\text{лок}}, x)$  и масса поезда определяются выражениями:

$$F_{\text{дсп}}(V_{\text{лок}}, x) = F_{\text{дсп}}(V_{\text{лок}}) + F_{\text{дсп}}(x), \quad (13)$$

$$F_{\text{дсп}}(V_{\text{лок}}) = F_{\text{дсп0}} + F_{\text{дсп1}}V_{\text{лок}} + F_{\text{дсп2}}(V_{\text{лок}})^2, \quad (14)$$

$$F_{\text{дсп0}} = \frac{n_{\text{пст}}}{n_{\text{акт}} + n_{\text{пст}}} \frac{1,9P_{\text{лок}}}{1000} + \left(0,7 + \frac{3}{m_{\text{во}}}\right) m_{\text{в}} g n_{\text{в}}, \quad (15)$$

$$F_{\text{дсп1}} = (0,01 \cdot 3,6) \frac{P_{\text{лок}}}{1000} + \left(0,7 + \frac{3}{m_{\text{во}}}\right) m_{\text{в}} g n_{\text{в}}, \quad (16)$$

$$F_{\text{дсп2}} = (0,0003 \cdot 3,6^2) \frac{P_{\text{лок}}}{1000} + \frac{0,002 \cdot 3,6^2}{m_{\text{во}}} m_{\text{в}} g n_{\text{в}}, \quad (17)$$

$$m_{\text{п}} = 1000 (m_{\text{в}} n_{\text{в}} + m_{\text{лок}}) + 2 \frac{6J_{\text{пр}}}{R_k^2} n_{\text{акт}}. \quad (18)$$

Здесь  $F_{\text{дсп}}$ ,  $P_{\text{лок}}$  в Ньютонах;  $m_{\text{лок}}$ ,  $m_{\text{в}}$  – масса локомотива и вагонов в тоннах,  $n_{\text{в}}$  – число однотипных вагонов поезда,  $m_{\text{во}}$  – масса вагона в тоннах, приходящаяся на одну ось,  $J_{\text{пр}}$  – приведенный к валу колесной пары момент инерции вращающихся деталей,  $\text{кг} \times \text{м}^2$ ;  $F_{\text{дсп}}(x)$  – составляющая дополнительного сопротивления движению поезда, зависящая от профиля пути.

Отметим, что для определения сил сопротивления движению локомотива и вагонов применяются и другие соотношения [1, 10]. Однако вид этих соотношений не имеет принципиального значения. Важно, что нелинейности в уравнениях (7)–(10) описываются аналитическими, дифференцируемыми функциями.

Рассматриваемая здесь задача заключается в определении методом аналитического синтеза систем управления (АСИНСУ) аналитического выражения для вычисления текущего значения напряжения  $U_{\text{дв}}$  по результатам измерения ряда переменных таким образом, чтобы обеспечивался разгон электропоезда, описываемого уравнениями (7)–(18) и необходимые изменения скорости движения с учетом допустимых ускорений и особенностей профиля пути.

**2. Приведение уравнений движения к УФЖ.** Управляемая форма Жордана – это частный случай записи системы дифференциальных уравнений в форме Коши. При определенных условиях векторно-матричные и линейные, и нелинейные уравнения в этой форме можно преобразовать к линейной системе, матрица которой совпадает с клеткой Жордана [13]. Исходные и преобразованные уравнения в этом случае, например, при  $n = 3$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varphi_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 &= \varphi_3(x_1, x_2, x_3) + u, \end{aligned} \quad \dot{w} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Структурные схемы, соответствующие этим уравнения, показаны на рис. 2, причем в общем случае числа  $\lambda$  могут быть не одинаковыми, а различными.

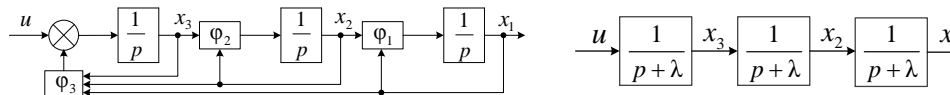


Рис. 2. Структурные схемы, соответствующие уравнениям в УФЖ

На рис. 2 хорошо видно, что нелинейная система, уравнения которой представимы в УФЖ, эквивалентна последовательному соединению некоторых линейных динамических звеньев.

Если учесть, что в соответствии с выражением (1) угловая скорость  $\omega_{\text{к}} = (V_{\text{ск}} + V_{\text{лок}})/R_{\text{к}}$ , то можно усмотреть, что уравнения электропоезда (7)–(11), тоже описывают соединение динамических линейных и нелинейных звеньев со следующими выходными переменными:

$$I_{\text{я}} \rightarrow M_{\text{д}}(I_{\text{я}}) \rightarrow V_{\text{ск}}(M_{\text{д}}) \rightarrow F_{\text{си}}(V_{\text{ск}}) \rightarrow V_{\text{лок}}(F_{\text{си}}) \rightarrow x.$$

Однако имеется и существенное отличие, которое заключается в том, что часть этих звеньев охвачена обратной связью по угловой скорости  $\omega_{\text{к}}$ , так как в уравнении (7) наряду с управлением, которым является напряжение  $U_{\text{дв}}$ , присутствует составляющая, зависящая от  $\omega_{\text{к}}$ . Поэтому, чтобы применить метод АСИНСУ [5, 6] с помощью вспомогательного управления, исключим эту связь.

С целью решения этой задачи, прежде всего, примем, что управление  $u_{дв}$  в уравнении (7) определяется выражением

$$u_{дв} = C_e \Phi(I_{\mu}) i_{ред} \omega_k + u_{дв2} L_{я}. \quad (19)$$

При этом уравнения (7) и (8) примут вид

$$\dot{I}_{я} = -\frac{(R_{я} + R_{в})}{L_{я}} I_{я} - \frac{R_{вт}}{L_{я}} (I_{я} - I_{\mu}) + u_{дв2}, \quad \dot{I}_{\mu} = (I_{я} - I_{\mu}) \frac{R_{вт}}{L_{\mu}}. \quad (20)$$

Уравнения (20) описывают некоторое динамическое звено второго порядка, на вход которого подается вспомогательное управление  $u_{дв2}$ , а выходом является ток якоря  $I_{я}$ .

Далее продифференцируем выражение  $\omega_k = (V_{ск} + V_{лок}) / R_k$ , вытекающее из равенства (1) по времени, и в полученное выражение  $\dot{\omega}_k = (\dot{V}_{ск} + \dot{V}_{лок}) / R_k$  подставим уравнения (9) и (10) при  $\omega_k \neq 0$  и  $V_{лок} \neq 0$ , и выразим из полученного выражения  $\dot{V}_{ск}$ . В результате, после некоторых преобразований, будем иметь уравнение

$$\dot{V}_{ск} = [C_e \Phi(I_{\mu}) i_{ред} I_{я} - F_{трк} R_k] \frac{R_k}{J_{пр}} - K F_{сц}(V_{ск}) + \frac{F_{дсп}(V_{лок}, x)}{m_{п}}, \quad (21)$$

где

$$K = \left( \frac{R_k^2}{J_{пр}} + \frac{2n_{акт}}{m_{п}} \right). \quad (22)$$

Объединяя уравнения (10), (11), (20), и (21) в одну систему, найдем, что уравнения движения электропоезда в новых переменных имеют следующий вид:

$$\dot{I}_{\mu} = (I_{я} - I_{\mu}) R_{вт} / L_{\mu}, \quad (23)$$

$$\dot{x} = V_{лок}, \quad (24)$$

$$\dot{V}_{лок} = (2n_{акт} F_{сц}(V_{ск}) - F_{дсп}(V_{лок}, x)) / m_{п}, \quad (25)$$

$$\dot{V}_{ск} = [C_e \Phi(I_{\mu}) i_{ред} I_{я} - F_{трк} R_k] \frac{R_k}{J_{пр}} - F_{сц}(V_{ск}) K + \frac{F_{дсп}(V_{лок}, x)}{m_{п}}, \quad (26)$$

$$\dot{I}_{я} = -[(R_{я} + R_{в}) I_{я} - R_{вт} (I_{я} - I_{\mu})] L_{я}^{-1} + u_{дв2}. \quad (27)$$

Наконец в (19) заменим  $\omega_k$  выражением  $\omega_k = (V_{ск} + V_{лок}) / R_k$ , в результате чего получим следующее выражение для управления:

$$u_{дв} = C_e \Phi(I_{я}) i_{ред} (V_{ск} + V_{лок}) R_k^{-1} + (u_{дв2} + u_{эо}) L_{я}. \quad (28)$$

Нетрудно видеть, что полученные уравнения электропоезда состоят, как бы из двух подсистем. Первая из них включает уравнение (23) и выражение (28). При этом уравнение (23) описывает обмотку возбуждения двигателя, а выражение (28) – управление им, зависящее от тока возбуждения, переменных  $V_{ск}$ ,  $V_{лок}$  (или  $\omega_k$ ), а также вспомогательного управления  $u_{дв2}$ .

Вторая подсистема включает уравнения (24)–(27) и имеет явно выраженную форму Жордана, которая характеризуется следующими переменными:  $I_{я} \rightarrow V_{ск} \rightarrow V_{лок} \rightarrow x$  и управлением  $u_{дв2}$ . При этом по условиям движения электропоезда переменная  $x = x(t_0, t)$  может изменяться в произвольных пределах, так как описывает путь, пройденный электропоездом в интервале времени от  $t_0 = 0$  до некоторого момента времени  $t > 0$ .

**3. Синтез управления скоростью электропоезда.** Уравнение (23), очевидно, описывает устойчивое звено с достаточно малой постоянной времени. Поэтому задача построения управления электропоездом методом АСИНСУ сводится к построению управления лишь подсистемой (25)–(27). Эта система, очевидно, имеет форму Жордана, однако, в соответствии с определением УФЖ [5, 6], эта система будет управляемой лишь при выполнении условия, которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial F_{\text{сц}}(V_{\text{ск}})}{\partial V_{\text{ск}}} C_e \Phi(I_{\mu}) \neq 0. \quad (29)$$

Так как величина  $C_e \Phi(I_{\mu}) \neq 0$  при  $I_{\mu} \neq 0$ , то, следовательно, уравнения (25)–(27) электропоезда имеют УФЖ, пока  $\partial F_{\text{сц}}(V_{\text{ск}})/\partial V_{\text{ск}} \neq 0$ . Строго говоря, производная  $\partial F_{\text{сц}}(V_{\text{ск}})/\partial V_{\text{ск}}$ , как отмечалось выше, при некоторых, не нулевых (критических) значениях скорости скольжения, обращается в нуль, поэтому электропоезд теоретически теряет управляемость при этих значениях скорости скольжения. Однако скорость электропоезда бывает равной критическому значению в течение очень короткого интервала времени, поэтому его наличие практически не сказывается на управляемости электропоезда. Поэтому далее будем считать, что условие (29) выполняется при всех значениях скорости скольжения, т.е. электропоезд является управляемым, а уравнения (25)–(27) имеют УФЖ. Это позволяет синтезировать искомое управление электропоездом методом аналитического синтеза нелинейных систем управления, предложенным в [5, 6].

В соответствии с этим методом, прежде всего, необходимо получить уравнения объекта управления в отклонениях. С этой целью введем следующие представления переменных:  $V_{\text{лок}} = V_{\text{лок}}^{\circ} + \tilde{x}_1$ ,  $V_{\text{ск}} = V_{\text{ск}}^{\circ} + \tilde{x}_2$ ,  $I_{\text{я}} = I_{\text{я}}^{\circ} + \tilde{x}_3$ ,  $I_{\mu} = I_{\text{я}}^{\circ} + \tilde{x}_4$ ,  $u_{\text{дв}2} = u_{\text{дв}2}^{\circ} + u_{\text{э}0}$ , где  $I_{\text{я}}^{\circ}$ ,  $V_{\text{ск}}^{\circ}$ ,  $V_{\text{лок}}^{\circ}$ ,  $u_{\text{дв}2}^{\circ}$  – установившиеся значения тока, скорости скольжения, скорости локомотива и управления  $u_{\text{дв}2}$ , соответствующие движению электропоезда с постоянной скоростью  $V_{\text{лок}}^{\circ} = \text{const}$ , а  $\tilde{x}_1$ ,  $\tilde{x}_2$ ,  $\tilde{x}_3$ ,  $u_{\text{э}0}$  – отклонения скорости локомотива, скорости скольжения, тока и управления  $u_{\text{дв}2}$  от установившихся значений.

В установившемся движении  $\dot{I}_{\mu} = 0$ , поэтому, в соответствии с уравнениями (23), (24)  $I_{\mu}^{\circ} = I_{\text{я}}^{\circ}$ , а  $x(t) = x_{\text{уст}} + V_{\text{лок}}^{\circ} (t - t_{\text{уст}})$ , где  $t_{\text{уст}}$ ,  $x_{\text{уст}}$  – момент и значение  $x$ , соответствующие началу установившегося движения электропоезда.

Установившийся режим движения поезда, строго говоря, может наблюдаться на прямолинейном либо горизонтальном, либо с постоянным уклоном достаточно длинном участке пути. В этом случае сила сопротивления движению не зависит от пути  $x$  и является постоянной величиной:  $F_{\text{дсп}}^{\circ} = F_{\text{дсп}}(V_{\text{лок}}^{\circ}, x) = F_{\text{дсп}}(V_{\text{лок}}^{\circ})$ . Установившиеся значения переменных целесообразнее найти не из уравнений (25)–(27), а из уравнений (7)–(11), которые в этом случае принимают вид:

$$-(R_{\text{я}} + R_{\text{в}})I_{\text{я}}^{\circ} - C_e \Phi(I_{\text{я}}^{\circ})i_{\text{ред}}\omega_{\text{к}}^{\circ} + u_{\text{дв}}^{\circ} = 0, \quad (30)$$

$$C_e \Phi(I_{\text{я}}^{\circ})i_{\text{ред}}I_{\text{я}}^{\circ} - (F_{\text{сц}}(V_{\text{ск}}^{\circ}) + F_{\text{трк}})R_{\text{к}} = 0, \quad (31)$$

$$2n_{\text{акт}}F_{\text{сц}}(V_{\text{ск}}^{\circ}) - F_{\text{дсп}}(V_{\text{лок}}^{\circ}, x) = 0. \quad (32)$$

Отсюда выводим

$$F_{\text{сц}}(V_{\text{ск}}^{\circ}) = F_{\text{дсп}}(V_{\text{лок}}^{\circ}, x) / 2n_{\text{акт}}, \quad (33)$$

$$C_e \Phi(I_y^\circ) I_y^\circ = \left( \frac{F_{\text{дсп}}^\circ(V_{\text{лок}}^\circ, x)}{2n_{\text{акт}}} + F_{\text{трк}} \right) \frac{R_k}{i_{\text{ред}}}, \quad (34)$$

Следовательно, управление электропоездом в установившемся режиме движения с заданной скоростью  $V_{\text{лок}}^\circ$  определяется выражением

$$u_{\text{дв}}^\circ = (R_y + R_v) I_y^\circ + C_e \Phi(I_y^\circ) i_{\text{ред}} \omega_k^\circ, \quad \omega_k^\circ = (V_{\text{ск}}^\circ + V_{\text{лок}}^\circ) / R_k. \quad (35)$$

Для определения значения управления  $u_{\text{дв}}^\circ$ , при котором достигается заданная скорость  $V_{\text{лок}}^\circ$ , по формуле (13) находится требуемое значение  $F_{\text{дсп}}^\circ(V_{\text{лок}}^\circ, x)$ , а затем путем решения нелинейного уравнения (33) с применением характеристики  $F_{\text{сц}}(V_{\text{ск}})$  – соответствующее значение скорости скольжения  $V_{\text{ск}}^\circ$ . Далее путем решения также нелинейного уравнения (34) определяется ток  $I_y^\circ$ , а по формулам (35) находится искомое значение управления  $u_{\text{дв}}^\circ$  в установившемся режиме.

Отметим, что уравнения (33) и (34) являются существенно нелинейными, причем характеристики  $F_{\text{сц}}(V_{\text{ск}})$  и  $C_e \Phi(I_y)$  обычно задаются графически. Однако они легко аппроксимируются некоторыми функциями, что позволяет алгоритмически решать эти уравнения на ЭВМ в реальном времени. Если при решении уравнения (33) скорость скольжения  $V_{\text{ск}}^\circ$  получается больше критического значения  $V_{\text{ск,кр}}$ , то либо поезд для данного электровоза перегружен, либо желаемая скорость  $V_{\text{лок}}^\circ$  слишком велика. Другими словами, желаемое приращение скорости электропоезда следует устанавливать таким, чтобы выполнялось условие  $V_{\text{ск}}^\circ < V_{\text{ск,кр}}$ ; при этом будет выполняться и условие (29).

Управление поездом в переходном режиме, согласно [5, 6], определяется по уравнениям в отклонениях, которые в данном случае имеют вид

$$\dot{\tilde{x}}_4 = (\tilde{x}_3 - \tilde{x}_4) \frac{R_{\text{вт}}}{L_{\mu}}, \quad (36)$$

$$\dot{x} = V_{\text{лок}}^\circ + \tilde{x}_1, \quad (37)$$

$$\dot{\tilde{x}}_1 = (2n_{\text{акт}} F_{\text{сц}}(V_{\text{ск}}^\circ + \tilde{x}_2) - F_{\text{дсп}}(V_{\text{ск}}^\circ + \tilde{x}_2, x)) / m_{\text{п}}, \quad (38)$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = [C_e \Phi(I_y^\circ + \tilde{x}_4) i_{\text{ред}} (I_y^\circ + \tilde{x}_3) - F_{\text{трк}} R_k] \frac{R_k}{J_{\text{пр}}} - F_{\text{сц}}(V_{\text{ск}}^\circ + \tilde{x}_2) K + \frac{F_{\text{дсп}}(V_{\text{лок}}^\circ + \tilde{x}_1, x)}{m_{\text{п}}}, \quad (39)$$

$$\dot{\tilde{x}}_3 = -[(R_y + R_v)(I_y^\circ + \tilde{x}_3) - R_{\text{вт}}(\tilde{x}_3 - x_4)] L_y^{-1} + u_{\text{дв}2}^\circ + u_{\text{э}0}, \quad (40)$$

В соответствии с указанным выше методом синтеза для нелинейной подсистемы (38) – (40), имеющей третий порядок, вводятся три новые переменные состояния следующим образом:

$$w_1 = \tilde{x}_1, \quad w_2 = \dot{w}_1 + \lambda_1 w_1 = m_{\text{п}}^{-1} \varphi_1 + \lambda_1 \tilde{x}_1, \quad (41)$$

$$w_3 = \dot{w}_2 + \lambda_2 w_2 = \frac{2n_{\text{акт}}}{m_{\text{п}}} \frac{\partial F_{\text{сц}}}{\partial V_{\text{ск}}} \varphi_2 + \frac{\vartheta_1}{m_{\text{п}}} \varphi_1 - \frac{1}{m_{\text{п}}} \frac{\partial F_{\text{дсп}}}{\partial x} V_{\text{лок}}^\circ + \lambda_2 \lambda_1 x_1. \quad (42)$$

По уравнениям в отклонениях (38)–(40) и выражениям (41), (42) определяют [6] величины:



$$\gamma_1 = \frac{\partial w_3}{\partial I_{\text{я}}} = \mathfrak{G}_0 \frac{\partial F_{\text{сц}}(V_{\text{ск}})}{\partial V_{\text{ск}}} C_{\text{е}} \Phi(I_{\mu}), \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 = \frac{2n_{\text{акт}}}{m_{\text{п}}} \left[ \frac{\partial^2 F_{\text{сц}}}{\partial V_{\text{ск}}^2} \varphi_2 - K \left( \frac{\partial F_{\text{сц}}}{\partial V_{\text{ск}}} \right)^2 + \mathfrak{G}_1 \frac{\partial F_{\text{сц}}}{\partial V_{\text{ск}}} \right] \varphi_2 + \frac{\mathfrak{G}_0 R_{\text{вт}}}{L_{\mu}} \frac{\partial F_{\text{сц}}}{\partial V_{\text{ск}}} \frac{\partial C_{\text{е}} \Phi(I_{\mu})}{\partial I_{\mu}} I_{\text{я}} (I_{\text{я}} - I_{\mu}) + \\ + \frac{1}{m_{\text{п}}} \left( \mathfrak{G}_2 \frac{\partial F_{\text{дсп}}}{m_{\text{п}} \partial V_{\text{лок}}} - \frac{\partial^2 F_{\text{дсп}}}{m_{\text{п}} \partial V_{\text{лок}}^2} \varphi_1 - \frac{\partial F_{\text{дсп}}}{m_{\text{п}} \partial x} + \lambda_1 \lambda_2 \right) \varphi_1 + \\ \frac{1}{m_{\text{п}}} \left( \mathfrak{G}_2 \frac{\partial F_{\text{дсп}}}{\partial x} - \frac{\partial^2 F_{\text{дсп}}}{\partial x^2} V_{\text{лок}} \right) V_{\text{лок}} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\varphi_1 = 2n_{\text{акт}} F_{\text{сц}}(V_{\text{ск}}) - F_{\text{дсп}}(V_{\text{лок}}, x), \quad (45)$$

$$\varphi_2 = [C_{\text{е}} \Phi(I_{\mu}) i_{\text{ред}} I_{\text{я}} - F_{\text{трк}} R_{\text{к}}] R_{\text{к}} J_{\text{пр}}^{-1} - F_{\text{сц}}(V_{\text{ск}}) K + F_{\text{дсп}}(V_{\text{лок}}, x) / m_{\text{п}}^{-1}, \quad (46)$$

$$\varphi_3 = [-(R_{\text{я}} + R_{\text{в}}) I_{\text{я}} - (I_{\text{я}} - I_{\mu}) R_{\text{вт}}] L_{\text{я}}^{-1} + u_{\text{дв2}}^{\circ}, \quad (47)$$

$$\mathfrak{G}_0 = \frac{2n_{\text{акт}} i_{\text{ред}} R_{\text{к}}}{m_{\text{п}} J_{\text{пр}}}, \quad \mathfrak{G}_1 = \lambda_2 + \lambda_1 - \frac{\partial F_{\text{дсп}}(V_{\text{лок}}, x)}{m_{\text{п}} \partial V_{\text{лок}}},$$

$$\mathfrak{G}_2 = \frac{2n_{\text{акт}}}{m_{\text{п}}} \frac{\partial F_{\text{сц}}(V_{\text{ск}})}{\partial V_{\text{ск}}} - \mathfrak{G}_1. \quad (48)$$

Величины  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , определенные по уравнениям (38)–(48), формально являются функциями отклонений  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ . Однако во всех выражениях (43)–(48) отклонения присутствуют только в сумме с соответствующими значениями переменных в установившемся режиме. Поэтому для краткости эти выражения представлены здесь как функции полных переменных системы управления. Найденные величины позволяют, следуя [6. С. 307], записать искомое управление подсистемой (38)–(40):

$$u_{\text{зо}} = -\gamma_1^{-1} [\gamma_2 + \lambda_3 w_3] - \varphi_3$$

или с учетом (47)

$$u_{\text{дв2}} = u_{\text{дв2}}^{\circ} + u_{\text{зо}} = [(R_{\text{я}} + R_{\text{в}}) I_{\text{я}} + (I_{\text{я}} - I_{\mu}) R_{\text{вт}}] L_{\text{я}}^{-1} - \gamma_1^{-1} [\gamma_2 + \lambda_3 w_3]. \quad (49)$$

Подставляя управление  $u_{\text{дв2}}$  (49) в выражение (28), получим

$$u_{\text{дв}} = C_{\text{е}} \Phi(I_{\mu}) i_{\text{ред}} (V_{\text{ск}} + V_{\text{лок}}) R_{\text{к}}^{-1} + (R_{\text{я}} + R_{\text{в}}) I_{\text{я}} + (I_{\text{я}} - I_{\mu}) R_{\text{вт}} - \gamma_1^{-1} [\gamma_2 + \lambda_3 w_3] L_{\text{я}}. \quad (50)$$

Это выражение и определяет искомое управление электровозом. Можно показать, что в установившемся режиме оно переходит в равенство (35), так как все величины, как отмечалось выше, имеют вид  $V_{\text{лок}} = V_{\text{лок}}^{\circ} + \tilde{x}_1$ ,  $V_{\text{ск}} = V_{\text{ск}}^{\circ} + \tilde{x}_2$ ,  $I_{\text{я}} = I_{\text{я}}^{\circ} + \tilde{x}_3$ ,  $I_{\mu} = I_{\mu}^{\circ} + \tilde{x}_4$ , причем  $w_3^{\circ} = 0$  и  $\gamma_2^{\circ} = 0$ , а  $F_{\text{дсп}}(V_{\text{лок}}^{\circ}, x) = \text{const}$ . Здесь  $V_{\text{лок}}^{\circ}$ ,  $V_{\text{ск}}^{\circ}$ ,  $I_{\text{я}}^{\circ}$  – значения скорости локомотива, скорости скольжения и тока двигателя, которые определяются решением уравнений (33), (34) и соответствуют движению электропоезда с заданной скоростью  $V_{\text{лок}}^{\circ}$ .

Основная сложность реализации полученного управления электровозом заключается в том, что отсутствуют измерительные преобразователи (датчики), непосредственно измеряющие силу сцепления  $F_{\text{сц}}$ , которая определяет тягу электровоза  $F_{\text{тл}}$ . Не измеряется непосредственно и скорость скольжения  $V_{\text{ск}}$ , от которой зависит сила сцепления. Однако в соответствии с выражением (1) скорость скольжения  $V_{\text{ск}}$  может быть найдена по скорости локомотива  $V_{\text{лок}}$  и угловой скорости вращения колесных пар активных тележек локомотива, методы измерения которых хорошо известны [8, 10, 14].

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пудовиков О.Е. Управление длинносоставными тяжеловесными грузовыми поездами // Управление большими системами. – 2011. – Вып. 29. – С. 214-231.
2. Розенфельд В.Е., Исаев И.П., Сидоров Н.Н., Озеров М.И. Теория электрической тяги / Под ред. И.П. Исаева. – М.: Транспорт, 1995.
3. Козут А.Т. Синтез приближенных алгоритмов двойного управления двигателями постоянного тока на основе процедур линеаризации // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2010. – № 3. – С. 45-50.
4. Притыкин Д.Е. Метод обратных задач динамики для синтеза регулятора скорости магистрального электровоза // Известия вузов. Электромеханика. – 2012. – № 5. – С. 48-54.
5. Гайдук А.Р. Синтез нелинейных систем на основе управляемой формы Жордана // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 7. – С. 3-13.
6. Гайдук А.Р. Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (Полиномиальный подход). – М.: Физматлит, 2012. – 360 с.
7. Мениутин Н.Н. Исследование скольжения колесной пары локомотива при реализации силы тяги в эксплуатационных условиях // Труды ЦНИИ МПС. – 1960. – Вып. 188. – С. 113-132.
8. Зарифьян А.А., Бондарев А.П., Бузало Г.А. Математическое моделирование и системы автоматизированного проектирования транспортных средств. Ч. 2: Учеб. пособие. – Ростов-на-Дону: Изд-во РГУПС, 2003.
9. Kalker J.J. Rolling contact phenomena: linear elasticity. Reports of the department of applied mathematical analysis. Delft (Германия), 2000.
10. Коропец П.А. Контроль контакта колеса с рельсом в режимах тяги и торможения. Анализ динамических процессов в системе «экипаж-тяговый привод-путь». Saarbrücken (Германия): LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.
11. Самме Г.В. Новые результаты в теории сцепления локомотива // Транспорт Российской Федерации. – 2010. – № 3 (28). – С. 14-16.
12. Правила тяговых расчетов для поездной работы / МПС СССР. – М.: Транспорт, 1987. – 287 с.
13. Пшихопов В.Х., Медведев М.В. Управление подвижными объектами в определенных и неопределенных средах. – М.: Наука, 2011. – 351 с.
14. Зарифьян А.А. Система измерения пройденного поездом расстояния и его скорости. – Ростов-на-Дону: Ростовский гос. ун-т путей сообщения, 2008.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор А.В. Павленко.

**Гайдук Анатолий Романович** – Южный федеральный университет; e-mail: gaiduk\_2003@mail.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634626287, 88634371689; кафедра систем автоматического проектирования; д.т.н.; профессор.

**Шаповалов Игорь Олегович** – e-mail: shapovalovio@gmail.com; тел.: 88634361789, 89508473455; кафедра систем автоматического управления; аспирант.

**Бесклубова Ксения Валериевна** – e-mail: besklubova@rambler.ru; тел.: 88634361789, 89518201773; кафедра систем автоматического управления; аспирантка.

**Пшихопов Вячеслав Хасанович** – e-mail: pshichop@rambler.ru; тел.: 88634371694; кафедра электротехники и мехатроники; зав. кафедрой; д.т.н.

**Беляев Виктор Егорович** – кафедра электротехники и мехатроники; доцент.

**Gaiduk Anatoly Romanovich** – Southern Federal University; e-mail: gaiduk\_2003@mail.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, Russia; phone: +78634626287, +78634371689; the department of automatic control systems; dr. of eng. sc.; professor.

**Shapovalov Igor Olegovich** – e-mail: shapovalovio@gmail.com; phone: +78634361789, +79508473455; the department of automatic control systems; post graduate student.

**Besklubova Ksenia Valeryevna** – e-mail: kbesklubova@mail.ru; phone: +78634361789, +79518201773; the department of automatic control systems; postgraduate student.

**Pshichopov Vyacheslav Khasanovich** – e-mail: pshichop@rambler.ru; phone: +78634371694; the department of electrical engineering and mechatronics; head the department; dr. of eng. sc.

**Belyaev Viktor Egorovich** – the department of electrical engineering and mechatronics; associate professor.