

Московченко Леонид Васильевич – ОАО «Научно-производственное объединение «Карат»; e-mail: Moskovchenko.L.V@npo-karat.ru; 196066, г. Санкт-Петербург, Московский пр., 212; тел.: 88124068290; к.т.н.; генеральный директор; генеральный конструктор.

Тупиков Владимир Алексеевич – e-mail: Tupikov.V.A@npo-karat.ru; д.т.н.; профессор; заместитель генерального директора по научной работе; заместитель генерального конструктора.

Павлова Валерия Анатольевна – e-mail: Pavlova.V.A@npo-karat.ru; к.т.н.; директор Центра обработки изображений в системах специального назначения.

Крюков Сергей Николаевич – e-mail: Krjukov.S.N@npo-karat.ru; к.т.н.; главный научный сотрудник.

Созинова Мария Владимировна – e-mail: Sozinova.M.V@npo-karat.ru; старший научный сотрудник.

Moskovchenko Leonid Vasilyevich – OJSC "Research and Production Company "Karat"; e-mail: Moskovchenko.L.V@npo-karat.ru; 212, Moskovskiy pr., Saint Petersburg, 196066, Russia; phone: +78124068290; cand. of eng. sc.; general director; chief designer.

Tupikov Vladimir Alekseevich – e-mail: Tupikov.V.A@npo-karat.ru; dr. of eng. sc.; professor; deputy director general of scientific research.

Pavlova Valeria Anatolyevna – e-mail: Pavlova.V.A@npo-karat.ru; cand. of eng. sc.; director of the image processing center.

Krjukov Sergey Nikolaevich – e-mail: Krjukov.S.N@npo-karat.ru; cand. of eng. sc.; chief researcher.

Sozinova Maria Vladimirovna – e-mail: Sozinova.M.V@npo-karat.ru; senior researcher.

УДК 621.3.017.31+621.3.017.32

И.Б. Подберезная

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВАХ

Ставится задача создания универсальной математической теории квазистационарных электромагнитных процессов, протекающих в электромеханических устройствах с использованием метода пространственных интегральных уравнений в трехмерной постановке. Рассматривается расчетная область, состоящая из совокупности отдельных подобластей: ферромагнитной и проводящей сред, а также токонесущих элементов. Основные уравнения Максвелла для квазистационарного поля с помощью тождеств векторного анализа сводятся к системе уравнений, использующей вектора намагниченности и плотности тока. Дискретная модель среды выбирается из условия кусочно-постоянной аппроксимации распределения этих векторов по объёму вещества. В качестве элементарных объёмов используются прямоугольные призмы. Полученные дискретные уравнения в векторном виде понимаются как обобщенная форма записи представления проекций векторов в декартовой системе координат. В работе приводятся примеры вычисления элементов матриц, характеризующих геометрию магнитной системы. Производные по времени представляются в конечно-разностном виде в соответствии с неявным методом Эйлера. На каждом интервале времени пространственные соотношения системы реализуются численно. Алгоритм расчета складывается из послойного решения для каждого временного шага системы нелинейных алгебраических уравнений.

Электромеханические системы; квазистационарное электромагнитное поле; метод пространственных интегральных уравнений; векторный магнитный потенциал; магнитная индукция; напряженность магнитного поля; намагниченность вещества; вихревой ток простой слой электрических зарядов; сингулярные интегралы.

I.B. Podbereznaia

**APPLICATION OF THE SPATIAL INTEGRATED EQUATIONS
FOR CALCULATION OF QUASISTATIONARY ELECTROMAGNETIC
FIELDS IN ELECTROMECHANICAL DEVICES**

The task of creation of the universal mathematical theory of the quasistationary electromagnetic processes proceeding in electromechanical devices with use of a method of the spatial integrated equations in three-dimensional statement is set. The settlement area consisting of set of separate subareas is considered: ferromagnetic and carrying-out environments, and also current-carrying elements. Maxwell's main equations for a quasistationary field by means of identities of the vector analysis are reduced to system of the equations, magnetization using a vector and current density. The discrete model of the environment gets out of a condition of piecewise and continuous approximation of distribution of these vectors on substance volume. As elementary volumes rectangular prisms are used. The received discrete equations in a vector look are understood as the generalized form of record of representation of projections of vectors in the Cartesian system of coordinates. In work examples of calculation of elements of the matrixes characterizing geometry of magnetic system are given. Derivatives on time are presented in a final and differential look to compliance with Euler's implicit method. On each interval of time spatial ratios of system are realized chislenno. The algorithm of calculation consists of the layer-by-layer decision for each temporary step of system of the nonlinear algebraic equations.

Electromechanical systems; quasistationary electromagnetic field; method of the spatial integrated equations; vector magnetic potential; magnetic induction; intensity of a magnetic field; magnetization of substance; vortex current; simple layer of electric charges; singular integrals.

Существуют целые классы электротехнических устройств, принцип действия которых обусловлен использованием эффектов насыщения стали, вихревых токов в массивных участках магнитопровода, КЗ витка и явлениями гистерезиса. К таким устройствам можно отнести: быстродействующие электромагниты автоматических выключателей; различные типы броневых электромагнитов постоянного (учет переходных режимов) и переменного токов; электромагнитные приводы клапанов трубопроводной арматуры и др. С точки зрения проектирования таких устройств представляет интерес не только анализ распределения электромагнитного поля, но и вычисление на его основе интегральных характеристик, таких как электромагнитные силы, потокосцепление, токи, ЭДС. Проектирование электромагнитных систем на основе моделей с эффектами, обусловленными наличием вихревых токов и гистерезиса не позволяет использовать аналитические или численно-аналитические методы расчета электромагнитных полей.

Среди численных методов расчета наибольшее распространение получили метод конечных разностей (МКР) [1], метод конечных элементов (МКЭ) [2, 3], метод граничных элементов (МГЭ) [4, 5] и метод интегральных уравнений [6, 7].

Подавляющее большинство программ для расчета электромагнитных полей реализует МКЭ или МГЭ. Среди них ANSYS, Maxwell, Flux 2D и 3D, FEMM 3D. Наиболее мощным в плане функциональности является пакет COMSOL Multiphysics, созданный компанией The COMSOL Group и предназначенный для конечно-элементного анализа в различных областях физики и инженерного дела. Пакет AC/DC Module разработан для расчёта электромагнитных эффектов, включая электростатику, магнитостатику, электромагнитную квазистатику. Созданная компанией Integrate Engineering Software программа FARADAY 3D представляет собой решающее устройство для полей вихревых токов. Это лишь некоторые из наиболее известных программ в этой области. Тем не менее перечисленные методы расчёта трёхмерных нелинейных электромагнитных полей и созданные на их основе программные продукты, универсальные по форме, всё ещё остаются недос-

точно эффективными. На точность результатов существенно влияют правильность выбора границы расчетной области, задание граничных условий, свойства материалов, оптимальность наложения сетки на расчетную область.

Лучшие практические результаты в области расчета полей электромагнитных систем получены интегральными методами [11]. По сравнению с конечно-элементными эти методы имеют ряд преимуществ. При их использовании снимается проблема граничных условий в случае «открытых» систем, исчезают трудности с нанесением сетки на геометрические детали и зазоры с малыми размерами, исключается из рассмотрения свободное пространство, что позволяет существенно сократить объем расчетной области. Ещё одно преимущество – это относительно простое получение интегральных характеристик магнитного поля (потокосцепления, силы, токов, ЭДС.) в элементах магнитной системы, поскольку каждый элементарный объем, независимо от их количества, несет в себе некоторую среднюю характеристику поля. В трёхмерных задачах все эти преимущества становятся принципиальными.

Все перечисленные обстоятельства (объёмность модели, учёт вихревых токов и гистерезиса, расчет интегральных характеристик поля) позволяют сделать вывод об актуальности дальнейшего развития методов интегральных уравнений, в частности метода пространственных интегральных уравнений (ПИУ) [11].

Целью данной работы является постановка задачи создания универсальной математической теории квазистационарных электромагнитных процессов, протекающих в электромеханических устройствах с использованием метода ПИУ.

Для квазистационарного поля справедливы основные уравнения Максвелла [12]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

следствия из них

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad (2)$$

уравнения связи

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}); \quad \mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad (3)$$

и краевые условия

$$\begin{aligned} \operatorname{Rot} \mathbf{E} &= 0; \quad \operatorname{Rot} \mathbf{H} = 0; \\ \operatorname{Div} \mathbf{J} &= 0; \quad \operatorname{Div} \mathbf{B} = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$|\mathbf{E}(M, t)| \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0; \quad |\mathbf{H}(M, t)| \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0.$$

Здесь \mathbf{H} , \mathbf{B} – соответственно вектора напряженности и индукции магнитного поля; \mathbf{M} – вектор намагниченности вещества; $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{вих}} + \mathbf{J}_{\text{ст}}$ – в общем случае – сумма плотностей вихревого и стороннего тока; \mathbf{E} – вектор напряженности электрического поля; μ_0 , ε_0 – соответственно магнитная и диэлектрическая проницаемости вакуума; γ – удельная электрическая проводимость; \mathbf{n} – единичный вектор нормали к поверхности, направленный из среды 1 в среду 2; ξ – поверхностная плотность свободных зарядов.

Используя уравнение Пуассона для векторного магнитного потенциала, созданного токами в проводниках (макроскопические токи) [12. С. 296], получим

$$\mathbf{A}_{\text{пр}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\iiint_V \frac{\mathbf{J}_{\text{вих}}}{r} dV + \iiint_{V_J} \frac{\mathbf{J}_{\text{ст}}}{r} dV_J \right].$$

Определим векторный магнитный потенциал от намагничённости вещества. Для этого векторный магнитный потенциал $\mathbf{A}_{\text{маг}}$ всей совокупности молекулярных токов, циркулирующих во всех элементах магнетика [12. С. 296] преобразуем с помощью соотношений векторного анализа к виду [12. С. 297–298]:

$$\mathbf{A}_{\text{маг}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{r}}{r^3} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\iiint_V \frac{\text{rot } \mathbf{M}}{r} dV - \oiint_S \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{M}}{r} dS \right].$$

Таким образом, полный векторный магнитный потенциал в переменном электромагнитном поле будет иметь выражение

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{пр}} + \mathbf{A}_{\text{маг}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\iiint_V \frac{\mathbf{J}_{\text{вих}}}{r} dV + \iiint_V \frac{\text{rot } \mathbf{M}}{r} dV - \oiint_S \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{M}}{r} dS + \iiint_{V_j} \frac{\mathbf{J}_{\text{ст}}}{r} dV_j \right]. \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{J}_{\text{вих}}$ – вектор плотности вихревого тока, $\mathbf{J}_{\text{ст}}$ – вектор плотности тока катушки, \mathbf{M} – намагничённость в точке, принадлежащей объёму dV , V – проводящая и одновременно ферромагнитная область, S – поверхность, ограничивающая область V , V_j – объём, занимаемый катушкой.

Отметим, что представление векторного потенциала в (5) соответствует известной модели, в которой ферромагнетик заменяется микротоками с плотностью

$$\mathbf{J}_{\text{микро}} = \text{rot } \mathbf{M}, \quad (6)$$

и расчетная область превращается в однородную магнитную среду с магнитной проницаемостью μ_0 [9].

Если применить операцию rot к выражению (5) и использовать правило вычисления ротора [13. С. 398], получим

$$\text{rot} \left(\frac{\mathbf{J}}{r} \right) = \frac{1}{r} \text{rot } \mathbf{J} + \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \times \mathbf{J}. \quad (7)$$

С учетом того, что $\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ [12. С. 610], получим

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\iiint_V \frac{\mathbf{J}_{\text{вих}} \times \mathbf{r}}{r^3} dV + \iiint_V \frac{\text{rot } \mathbf{M} \times \mathbf{r}}{r^3} dV - \oiint_S \frac{(\mathbf{n} \times \mathbf{M}) \times \mathbf{r}}{r^3} dS + \iiint_{V_j} \frac{\mathbf{J}_{\text{ст}} \times \mathbf{r}}{r^3} dV_j \right],$$

где $\mathbf{J}_{\text{вих}}$ – плотность наводимого в проводящем объеме вихревого тока.

Заметим так же, что $\text{rot } \mathbf{J} \equiv 0$ и $\text{rot}(\mathbf{n} \times \mathbf{M}) \equiv 0$ (так как ротор относится только к точке наблюдения, а \mathbf{J} и $(\mathbf{n} \times \mathbf{M})$ находятся в точке интегрирования).

Тогда напряженность магнитного поля \mathbf{H} из уравнения связи определится как

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left[\iiint_V \frac{\mathbf{J}_{\text{вих}} \times \mathbf{r}}{r^3} dV + \iiint_V \frac{\text{rot } \mathbf{M} \times \mathbf{r}}{r^3} dV - \oiint_S \frac{(\mathbf{n} \times \mathbf{M}) \times \mathbf{r}}{r^3} dS + \iiint_{V_j} \frac{\mathbf{J}_{\text{ст}} \times \mathbf{r}}{r^3} dV_j \right] - \mathbf{M}. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение (8) можно представить иначе, если составляющую напряженности от намагничённости вещества записать в виде [9; 12. С. 269]:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_m &= -\text{grad} \left[\frac{1}{4\pi} \left(\oint_S \frac{(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})}{r} dS - \iiint_V \frac{\text{div} \mathbf{M}}{r} dV \right) \right] = \\ &= -\text{grad} \left(\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dV \right) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left[\frac{3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{M}}{r^3} \right] dV.\end{aligned}$$

Тогда вместо (8), согласно теореме разложения Гельмгольца, напряженность поля можно представить в виде суммы безвихревой и соленоидальной составляющих, первая из которых задается истоками вектора (намагниченностью), а вторая – вихрями

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \left[\iiint_V \left[\frac{3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{M}}{r^3} \right] dV - \iiint_V \frac{\mathbf{J}_{вих} \times \mathbf{r}}{r^3} dV - \iiint_{V_j} \frac{\mathbf{J}_{cm} \times \mathbf{r}}{r^3} dV_j \right]. \quad (8a)$$

Вихревая составляющая напряженности магнитного поля взята со знаком «минус» поскольку изменен порядок векторного произведения в формуле (7).

Вектор плотности тока в проводящей среде (вихревой ток) [12. С. 456]:

$$\mathbf{J}_{вих} = \gamma \mathbf{E} = \gamma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi_e \right),$$

φ_e – скалярный электрический потенциал, определяемый простым слоем электрических зарядов с плотностью ξ на границе S области V_γ [7. С. 191; 14. С. 355]:

$$\varphi_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\xi}{r} dS. \quad (9)$$

С учетом (9), получим для вектора плотности вихревого тока

$$\mathbf{J}_{вих} = \gamma \mathbf{E} = \gamma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\xi \mathbf{r}}{r^3} dS \right). \quad (10)$$

В свою очередь ξ рассчитывается по формуле [14. С. 357]:

$$\xi = 2\epsilon_0 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 2\epsilon_0 \left[-\mathbf{n} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} \varphi_e \right) \right] = 2\epsilon_0 \left[-\mathbf{n} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\xi \mathbf{r}}{r^3} dS \right) \right], \quad (11)$$

где \mathbf{n} – внешняя нормаль к поверхности S .

Вектор намагниченности \mathbf{M} связан с напряженностью магнитного поля \mathbf{H} магнитной характеристикой материала:

$$\mathbf{M} = f[\mathbf{H}]. \quad (12)$$

При постоянстве магнитной проницаемости μ_a , т.е. для линейного режима работы ферромагнитных областей

$$\mathbf{M} = (\mu - 1)\mathbf{H},$$

где μ – относительная магнитная проницаемость ферромагнетика. Для нелинейного процесса μ_a будет меняться на каждом временном шаге.

Таким образом, расчет электромагнитного поля сводится к определению векторов: $\mathbf{H}(Q, t)$, $\mathbf{M}(Q, t)$, $\mathbf{A}(Q, t)$, $\mathbf{J}_{вих}(Q, t)$ и скаляров $\varphi_e(G, t)$, $\xi(G, t)$ как функций пространственных (Q, G) и временной (t) переменных при заданном распределении вектора плотности тока катушки $\mathbf{J}_{ст}(Q, t)$. Q – точка (точка на-

блюдения), принадлежащая объемам V_μ и V_γ , т. е. V , а $G \in S$. С этой целью следует решить следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\iiint_V \frac{\mathbf{J}_{\text{вих}}}{r} dV + \iiint_V \frac{\text{rot } \mathbf{M}}{r} dV - \iint_S \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{M}}{r} dS + \iiint_{V_j} \frac{\mathbf{J}_{\text{ст}}}{r} dV_j \right]; \\ \mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \left[\iiint_V \left[\frac{3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{M}}{r^3} \right] dV - \iiint_V \frac{\mathbf{J}_{\text{вих}} \times \mathbf{r}}{r^3} dV - \iiint_{V_j} \frac{\mathbf{J}_{\text{ст}} \times \mathbf{r}}{r^3} dV_j \right]; \\ \mathbf{J}_{\text{вих}} = \gamma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\xi \mathbf{r}}{r^3} dS \right); \\ \xi = 2\epsilon_0 \left[-\mathbf{n} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\xi \mathbf{r}}{r^3} dS \right) \right]; \\ \mathbf{M} = (\mu - 1)\mathbf{H} \end{array} \right. \quad (13)$$

В зависимости от способа возбуждения заданными оказываются различные первичные источники поля. Система (13) позволяет определить неизвестные вторичные источники: вихревые токи, намагниченность ферромагнитных деталей, наведенные на поверхности электрические заряды.

Решение системы (13) проводится численным методом последовательных интервалов времени Δt . Производные по времени представляются в конечно-разностном виде в соответствии с неявным методом Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{A}(Q, t_{k+1})}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{A}(Q, t_{k+1}) - \mathbf{A}(Q, t_k)}{t_{k+1} - t_k} = \frac{\mathbf{A}(Q, t_{k+1}) - \mathbf{A}(Q, t_k)}{\Delta t} = \frac{\mathbf{A}(Q, t_{k+1})}{\Delta t} - \frac{\mathbf{A}(Q, t_k)}{\Delta t}.$$

На каждом интервале времени пространственные соотношения системы (13) также реализуются численно, для чего осуществляется пространственная дискретизация расчетных областей S, V, V_j на элементарные объемы ΔV (прямоугольные призмы) и площадки ΔS (прямоугольники), ориентированные по координатным осям x, y, z . Разбиение на прямоугольные призмы (прямоугольники) не является принципиальным ограничением для метода. В [11] предложено воспроизводить форму сложного объекта с помощью шестигранных усеченных пирамид или в предельном (вырожденном) случае в виде треугольных пирамид. Однако использование прямоугольных, а еще лучше кубических призм, позволяет значительно упростить и ускорить вычисление ядер интегральных уравнений. О чем будет сказано ниже.

Разобьем объем V на N призм, объем V_j на $N_{\text{кат}}$ призм, поверхность S – на N_S площадок. Внутри каждого элементарного объема ферромагнетика векторы намагниченности и плотности вихревого тока принимаются постоянными. Таким образом, используется кусочно-постоянная аппроксимация \mathbf{M} и $\mathbf{J}_{\text{вих}}$ в объеме проводящего ферромагнетика.

В указанных условиях дискретизации плотность объемных микротоков будет равна нулю внутри объемов ΔV ($\text{rot } \mathbf{M} = 0$) и останется только их поверхностная составляющая [12]:

$$\mathbf{J}_{\mu \text{ пов}} = \text{Rot } \mathbf{M} = \mathbf{n}_{12} \times \mathbf{M}_{12},$$

где \mathbf{n}_{12} – вектор единичной нормали на границе объема ΔV , направление которого совпадает с внешней нормалью на границе данного объема ΔV ; $\mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$ – разность намагниченностей объемов ΔV (\mathbf{M}_1) и соседнего (\mathbf{M}_2) (рис. 1).

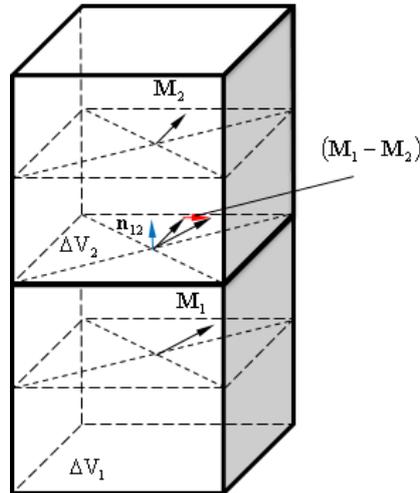


Рис. 1. Элементарные объемы и векторы намагниченности в них

В связи с этим интегрирование по элементарным объемам сводится к интегрированию по поверхностям, охватывающим элементарный объем ΔV . Именно этот подход использован в [11].

Система уравнений (13) для момента времени $(k + 1)$ в этом случае представляется в следующем виде:

	$\mathbf{A}_j = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\sum_{i=1}^{3N} g1_{ji} \cdot \mathbf{J}_{\text{вих } i} + \sum_{i=1}^{3N} g2_{ji} \cdot \mathbf{M}_i + \sum_{i=1}^{3N_{\text{срт}}} g3_{ji} \cdot \mathbf{J}_{\text{срт } i} \right];$	а	(14)
	$\mathbf{H}_j = \frac{1}{4\pi} \left[\sum_{i=1}^{3N} g5_{ji} \cdot \mathbf{M}_i - \sum_{i=1}^{3N} g4_{ji} \cdot \mathbf{J}_{\text{вих } i} - \sum_{i=1}^{3N_{\text{срт}}} g6_{ji} \cdot \mathbf{J}_{\text{срт } i} \right];$	б	
	$\mathbf{J}_{\text{вих } j} = -\gamma \left(\frac{\mathbf{A}_{j(k+1)} - \mathbf{A}_{j(k)}}{\Delta t} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{3N_s} g7_{ji} \cdot \xi_i \right);$	в	
	$\xi_m = -2\epsilon_0 \left[n_x \frac{\mathbf{A}_{m(k+1)}^x - \mathbf{A}_{m(k)}^x}{\Delta t} + n_y \frac{\mathbf{A}_{m(k+1)}^y - \mathbf{A}_{m(k)}^y}{\Delta t} + n_z \frac{\mathbf{A}_{m(k+1)}^z - \mathbf{A}_{m(k)}^z}{\Delta t} + \right.$ $\left. + n_x \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{N_s} g7_{jm}^{(x)} \xi_{j(k)} + n_y \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{N_s} g7_{jm}^{(y)} \xi_{j(k)} + n_z \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{N_s} g7_{jm}^{(z)} \xi_{j(k)} \right]$	г	
	$\mathbf{M}_j = (\mu - 1) \mathbf{H}_j,$	д	

где $j = 1, 2, 3, \dots, 3N$ – номера соответствующих проекций вектора в N точках наблюдения; $i = 1, 2, 3, \dots, 3N$ – номера соответствующих проекций вектора в N элементарных объёмах; $m = 1, 2, 3, \dots, N_s$ – номер внешней элементарной площадки; $k, k + 1$ – соответствующие номера моментов времени.

Полученные дискретные уравнения в векторном виде следует понимать как обобщенную форму записи представления проекций векторов в декартовой системе координат x, y, z . Кроме этого $g1_{ji}, g2_{ji}, g3_{ji}, g4_{ji}, g5_{ji}, g6_{ji}, g7_{ji}$ в данной системе есть элементы матриц **G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7**, определяемых геометрией магнитной системы при её пространственной дискретизации.

Примеры вычисления указанных матриц и их элементов представлены ниже. Рассмотрим подробнее первое уравнение системы (13)

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\iiint_V \frac{\mathbf{J}_{\text{вих}}}{r} dV + \iiint_V \frac{\text{rot } \mathbf{M}}{r} dV - \iint_S \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{M}}{r} dS + \iiint_{V_j} \frac{\mathbf{J}_{\text{ст}}}{r} dV_j \right]$$

и его дискретный аналог (14а)

$$\mathbf{A}_j = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\sum_{i=1}^{3N} g1_{ji} \cdot \mathbf{J}_{\text{вих}i} + \sum_{i=1}^{3N} g2_{ji} \cdot \mathbf{M}_i + \sum_{i=1}^{3N_{\text{кат}}} g3_{ji} \cdot \mathbf{J}_{\text{ст}i} \right].$$

Обозначим точку наблюдения $Q(x^*, y^*, z^*)$, а точку истока $P(x, y, z)$ (рис. 2), тогда модуль радиус-вектора

$$r = r_{PQ} = r(x, y, z) = \sqrt{(x^* - x)^2 + (y^* - y)^2 + (z^* - z)^2}$$

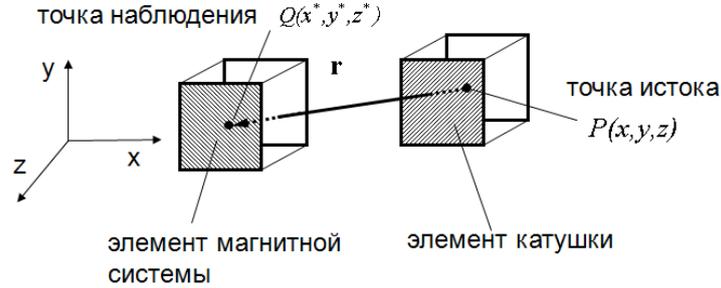


Рис. 2. Элементарные объёмы магнитной системы и катушки

В этом случае коэффициенты матрицы **G3** могут быть определены тройным интегрированием

$$g3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z1}^{z2} \int_{y1}^{y2} \int_{x1}^{x2} \frac{1}{r(x, y, z)} dx dy dz.$$

При этом проекции на оси координат векторного магнитного потенциала j -го элемента ферромагнитной области V от элемента катушки i запишутся

$$A_{cmj}^x = \frac{\mu_0}{4\pi} J_{cmi}^x \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{r(x, y, z)} dx dy dz,$$

$$A_{cmj}^y = \frac{\mu_0}{4\pi} J_{cmi}^y \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{r(x, y, z)} dx dy dz,$$

$$A_{cmj}^z = \frac{\mu_0}{4\pi} J_{cmi}^z \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{r(x, y, z)} dx dy dz.$$

Здесь $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ – координаты элементарного объёма, отметим, что индекс i , подчеркивающий, что элемент относится к области катушки, для упрощения выражения опущен.

Вычисление коэффициентов матрицы **G1** описанным выше способом осложнено наличием особенности при совпадении точек истока и наблюдения (рис. 3). Поскольку вектор $\mathbf{J}_{вих i}$ в элементарном объёме принят постоянным (кусочно-постоянная аппроксимация), то можно от интегрирования по элементарному объёму перейти к интегрированию по поверхности этого объёма [11]:

$$\mathbf{A}_{вих j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\iiint_{V_i} \frac{\mathbf{J}_{вих i}}{r} dV_i \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{J}_{вих i} \left[\iiint_{V_i} \frac{1}{r} dV_i \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{J}_{вих i} \oint_{S_i} \frac{\mathbf{n}_i \mathbf{r}}{2r} dS_i.$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$ – нормаль к поверхности,

$\mathbf{r} = (x^* - x)\mathbf{e}_x + (y^* - y)\mathbf{e}_y + (z^* - z)\mathbf{e}_z$ – радиус-вектор, соответственно

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = (x^* - x) + (y^* - y) + (z^* - z).$$

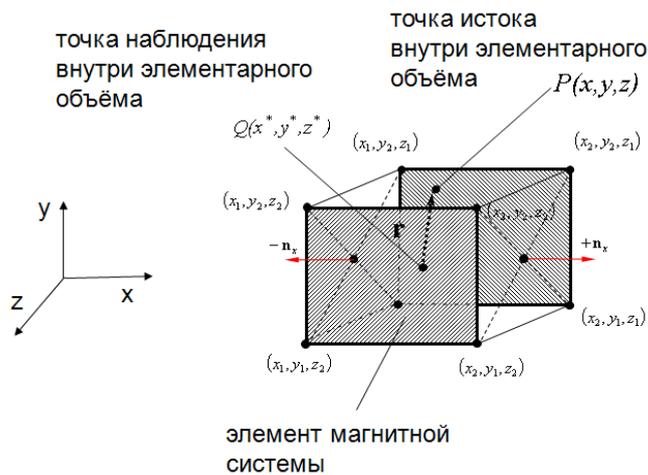


Рис. 3. Элементарный объём ферромагнитной области

Проекция на ось x векторного магнитного потенциала $\mathbf{A}_{вих j}$ для i -го элемента ферромагнитной области V_i примет вид

$$A_{\text{вих } j}^x = \frac{\mu_0}{4\pi} J_{\text{вих } i} \left[\int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{(x^* - x_2)}{2r(x_2, y, z)} dydz - \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{(x^* - x_1)}{2r(x_1, y, z)} dydz \right].$$

Аналогично определяются $A_{\text{вих } j}^y$ и $A_{\text{вих } j}^z$.

Интегралы достаточно точно вычисляются численными методами по квадратным формулам Гаусса-Кронрода.

Коэффициенты матрицы $\mathbf{G2}$ могут быть получены аналогично. Поскольку \mathbf{M}_i внутри элементарного объёма – вектор неизменный, то $\iiint_{V_i} \frac{\text{rot } \mathbf{M}_i}{r} dV_i = 0$.

$$\text{В этом случае } \mathbf{A}_{mj} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S_i} \frac{\mathbf{n}_i \times \mathbf{M}_i}{r} dS_i.$$

После соответствующих преобразований

$$\mathbf{n}_i \times \mathbf{M}_i = \mathbf{e}_x \cdot (n_y \cdot M_z - n_z \cdot M_y) - \mathbf{e}_y \cdot (n_x \cdot M_z - n_z \cdot M_x) + \mathbf{e}_z \cdot (n_x \cdot M_y - n_y \cdot M_x),$$

получим

$$\begin{aligned} A_{mj}^x &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[M_i^z \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{r(x, y_2, z)} - \frac{1}{r(x, y_1, z)} \right) dydz - M_i^y \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{r(x, y, z_2)} - \frac{1}{r(x, y, z_1)} \right) dx dy \right]; \\ A_{mj}^y &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[M_i^x \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{r(x, y, z_2)} - \frac{1}{r(x, y, z_1)} \right) dx dy - M_i^z \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{1}{r(x_2, y, z)} - \frac{1}{r(x_1, y, z)} \right) dy dz \right]; \\ A_{mj}^z &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[M_i^y \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{1}{r(x_2, y, z)} - \frac{1}{r(x_1, y, z)} \right) dy dz - M_i^x \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{r(x, y_2, z)} - \frac{1}{r(x, y_1, z)} \right) dx dz \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим второе уравнение системы (13):

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \left[\iiint_V \left[\frac{3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{M}}{r^3} \right] dV - \iiint_V \frac{\mathbf{J}_{\text{вих}} \times \mathbf{r}}{r^3} dV - \iiint_{V_j} \frac{\mathbf{J}_{\text{ст}} \times \mathbf{r}}{r^3} dV_j \right]$$

и его дискретный аналог (146)

$$\mathbf{H}_j = \frac{1}{4\pi} \left[\sum_{i=1}^{3N} g5_{ji} \cdot \mathbf{M}_i - \sum_{i=1}^{3N} g4_{ji} \cdot \mathbf{J}_{\text{вих } i} - \sum_{i=1}^{3N_{\text{ст}}} g6_{ji} \cdot \mathbf{J}_{\text{ст } i} \right].$$

Раскроем векторное произведение

$$\mathbf{J}_{\text{вих}} \times \mathbf{r} = \mathbf{e}_x \cdot (J_{\text{вих}}^y \cdot r_z - J_{\text{вих}}^z \cdot r_y) + \mathbf{e}_y \cdot (J_{\text{вих}}^z \cdot r_x - J_{\text{вих}}^x \cdot r_z) + \mathbf{e}_z \cdot (J_{\text{вих}}^x \cdot r_y - J_{\text{вих}}^y \cdot r_x).$$

Вектор $\mathbf{J}_{\text{вих } i}$ в элементарном объёме принят постоянным, значит можно от интегрирования по элементарному объёму перейти к интегрированию по границе этого объёма.

$$\begin{aligned} H_{\text{вих } j}^x &= \frac{1}{4\pi} \left[\iiint_{V_i} \frac{(J_{\text{вих } i}^y \cdot r_z - J_{\text{вих } i}^z \cdot r_y)}{r^3(x, y, z)} dV_i \right] = \frac{1}{4\pi} \left[J_{\text{вих } i}^y \iiint_{V_i} \frac{r_z}{r^3(x, y, z)} dV_i - J_{\text{вих } i}^z \iiint_{V_i} \frac{r_y}{r^3(x, y, z)} dV_i \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[J_{\text{вих } i}^y \left(\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{z^* - z_2}{r^3(x, y, z_2)} dx dy - \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{z^* - z_1}{r^3(x, y, z_1)} dx dy \right) - \right. \\ &\quad \left. - J_{\text{вих } i}^z \left(\int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{y^* - y_2}{r^3(x, y_2, z)} dx dz - \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{y^* - y_1}{r^3(x, y_1, z)} dx dz \right) \right]. \end{aligned}$$

По аналогии получим

$$\begin{aligned}
 H_{aux j}^y &= \frac{1}{4\pi} \left[J_{aux i}^z \left(\int_{z1}^{z2} \int_{y1}^{y2} \frac{x^* - x2}{r^3(x2, y, z)} dydz - \int_{z1}^{z2} \int_{y1}^{y2} \frac{x^* - x1}{r^3(x1, y, z)} dydz \right) - \right. \\
 &\quad \left. - J_{aux i}^x \left(\int_{y1}^{y2} \int_{x1}^{x2} \frac{z^* - z2}{r^3(x, y, z2)} dx dy - \int_{y1}^{y2} \int_{x1}^{x2} \frac{z^* - z1}{r^3(x, y, z1)} dx dy \right) \right]; \\
 H_{aux j}^z &= \frac{1}{4\pi} \left[J_{aux i}^x \left(\int_{z1}^{z2} \int_{x1}^{x2} \frac{y^* - y2}{r^3(x, y2, z)} dx dz - \int_{z1}^{z2} \int_{x1}^{x2} \frac{y^* - y1}{r^3(x, y1, z)} dx dz \right) - \right. \\
 &\quad \left. - J_{aux i}^y \left(\int_{z1}^{z2} \int_{y1}^{y2} \frac{x^* - x2}{r^3(x2, y, z)} dy dz - \int_{z1}^{z2} \int_{y1}^{y2} \frac{x^* - x1}{r^3(x1, y, z)} dy dz \right) \right].
 \end{aligned}$$

Перейдем к вычислению интеграла $\iiint_V \left[\frac{3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{M}}{r^3} \right] dV$. Раскроем произ-

ведение и приведем слагаемые к общему знаменателю

$$\begin{aligned}
 \frac{3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{M}}{r^5} &= \frac{(M_x(3r_x^2 - r^2) + 3M_y r_x r_y + 3M_z r_x r_z)}{r^5} \mathbf{e}_x + \\
 &+ \frac{(3M_x r_x r_y + M_y(3r_y^2 - r^2) + 3M_z r_y r_z)}{r^5} \mathbf{e}_y + \\
 &+ \frac{(3M_x r_x r_z + 3M_y r_y r_z + M_z(3r_z^2 - r^2))}{r^5} \mathbf{e}_z.
 \end{aligned}$$

Таким образом, составляющие напряженности магнитного поля в элементарном объеме от намагниченности соседних элементов (рис. 4) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}
 H_{mj}^x &= \frac{1}{4\pi} \left[M_{xi} \iiint_{V_i} \frac{(3r_x^2 - r^2)}{r^5(x, y, z)} dV_i + M_{yi} \iiint_{V_i} \frac{3r_x r_y}{r^5(x, y, z)} dV_i + M_{zi} \iiint_{V_i} \frac{3r_x r_z}{r^5(x, y, z)} dV_i \right], \\
 H_{mj}^y &= \frac{1}{4\pi} \left[M_{xi} \iiint_{V_i} \frac{3r_x r_y}{r^5(x, y, z)} dV_i + M_{yi} \iiint_{V_i} \frac{(3r_y^2 - r^2)}{r^5(x, y, z)} dV_i + M_{zi} \iiint_{V_i} \frac{3r_y r_z}{r^5(x, y, z)} dV_i \right], \\
 H_{mj}^z &= \frac{1}{4\pi} \left[M_{xi} \iiint_{V_i} \frac{3r_x r_z}{r^5(x, y, z)} dV_i + M_{yi} \iiint_{V_i} \frac{3r_y r_z}{r^5(x, y, z)} dV_i + M_{zi} \iiint_{V_i} \frac{(3r_z^2 - r^2)}{r^5(x, y, z)} dV_i \right].
 \end{aligned}$$

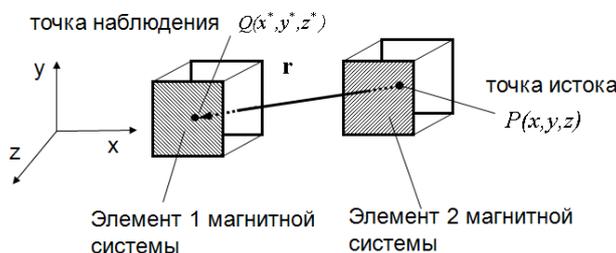


Рис. 4. Расположение двух элементарных объемов, принадлежащих ферромагнитной области

Для случая, показанного на рис. 3, вычисление по данным формулам затруднительно. Можно воспользоваться [15], но значительно проще вычислить их, если использовать известный подход замены интегрирования по объёму интегрированием по поверхности. В случае $\mathbf{M}_i = const$ (кусочно-постоянная аппроксимация) $\text{div } \mathbf{M}_i = 0$, получим

$$\mathbf{H}_{mj} = -\text{grad} \left[\frac{1}{4\pi} \left(\iint_{S_i} \frac{(\mathbf{M}_i \cdot \mathbf{n})}{r} dS_i \right) \right] = -\frac{1}{4\pi} (\mathbf{M}_i \cdot \mathbf{n}) \iint_{S_i} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS_i.$$

Составляющие вектора примут вид:

$$\begin{aligned} H_{mj}^x &= -\frac{1}{4\pi} \left[M_i^x \left(\int_{z1}^{z2} \int_{y1}^{y2} \frac{x^* - x2}{r^3(x2, y, z)} dydz - \int_{z1}^{z2} \int_{y1}^{y2} \frac{x^* - x1}{r^3(x1, y, z)} dydz \right) \right], \\ H_{mj}^y &= -\frac{1}{4\pi} \left[M_i^y \left(\int_{z1}^{z2} \int_{x1}^{x2} \frac{y^* - y2}{r^3(x, y2, z)} dx dz - \int_{z1}^{z2} \int_{x1}^{x2} \frac{y^* - y1}{r^3(x, y1, z)} dx dz \right) \right], \\ H_{mj}^z &= -\frac{1}{4\pi} \left[M_i^z \left(\int_{x1}^{x2} \int_{y1}^{y2} \frac{z^* - z2}{r^3(x, y, z2)} dx dy - \int_{x1}^{x2} \int_{y1}^{y2} \frac{z^* - z1}{r^3(x, y, z1)} dx dy \right) \right]. \end{aligned}$$

Представим глобальную матрицу, характеризующую геометрию системы **G5**:

$$\text{матрица } \mathbf{G5} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{xx1}^1 & \mathbf{g}_{xy1}^1 & \mathbf{g}_{xz1}^1 & \mathbf{g}_{xx2}^1 & \mathbf{g}_{xy2}^1 & \mathbf{g}_{xz2}^1 & \cdots & \mathbf{g}_{xxN}^1 & \mathbf{g}_{xyN}^1 & \mathbf{g}_{xzN}^1 \\ \mathbf{g}_{yx1}^1 & \mathbf{g}_{yy1}^1 & \mathbf{g}_{yz1}^1 & \mathbf{g}_{yx2}^1 & \mathbf{g}_{yy2}^1 & \mathbf{g}_{yz2}^1 & \cdots & \mathbf{g}_{yxN}^1 & \mathbf{g}_{yyN}^1 & \mathbf{g}_{yzN}^1 \\ \mathbf{g}_{zx1}^1 & \mathbf{g}_{zy1}^1 & \mathbf{g}_{zz1}^1 & \mathbf{g}_{zx2}^1 & \mathbf{g}_{zy2}^1 & \mathbf{g}_{zz2}^1 & \cdots & \mathbf{g}_{zxN}^1 & \mathbf{g}_{zyN}^1 & \mathbf{g}_{zzN}^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{g}_{xx1}^N & \mathbf{g}_{xy1}^N & \mathbf{g}_{xz1}^N & \mathbf{g}_{xx2}^N & \mathbf{g}_{xy2}^N & \mathbf{g}_{xz2}^N & \cdots & \mathbf{g}_{xxN}^N & \mathbf{g}_{xyN}^N & \mathbf{g}_{xzN}^N \\ \mathbf{g}_{yx1}^N & \mathbf{g}_{yy1}^N & \mathbf{g}_{yz1}^N & \mathbf{g}_{yx2}^N & \mathbf{g}_{yy2}^N & \mathbf{g}_{yz2}^N & \cdots & \mathbf{g}_{yxN}^N & \mathbf{g}_{yyN}^N & \mathbf{g}_{yzN}^N \\ \mathbf{g}_{zx1}^N & \mathbf{g}_{zy1}^N & \mathbf{g}_{zz1}^N & \mathbf{g}_{zx2}^N & \mathbf{g}_{zy2}^N & \mathbf{g}_{zz2}^N & \cdots & \mathbf{g}_{zxN}^N & \mathbf{g}_{zyN}^N & \mathbf{g}_{zzN}^N \end{pmatrix},$$

где 1-я, 2-я, 3-я строки соответствуют x, y, z – составляющим проекций вектора \mathbf{H} ; 1-й, 2-й, 3-й столбцы – x, y, z – проекциям вектора \mathbf{M} в 1-м элементарном объёме; 4-й, 5-й, 6-й столбцы – x, y, z – проекциям вектора \mathbf{M} во 2-м элементарном объёме и т.д.

Коэффициенты матрицы **G5** являются функцией геометрических размеров и вычисляются по формулам, представленным выше, например, на диагоналях:

$$\mathbf{g}_{xx1}^1 = -\frac{1}{4\pi} \left(\int_{z1}^{z2} \int_{y1}^{y2} \frac{x^* - x2}{r^3(x2, y, z)} dydz - \int_{z1}^{z2} \int_{y1}^{y2} \frac{x^* - x1}{r^3(x1, y, z)} dydz \right), \mathbf{g}_{xy1}^1 = 0, \mathbf{g}_{xz1}^1 = 0;$$

$$\mathbf{g}_{yx2}^1 = 0, \mathbf{g}_{yy2}^1 = -\frac{1}{4\pi} \left(\int_{z1}^{z2} \int_{x1}^{x2} \frac{y^* - y2}{r^3(x, y2, z)} dx dz - \int_{z1}^{z2} \int_{x1}^{x2} \frac{y^* - y1}{r^3(x, y1, z)} dx dz \right), \mathbf{g}_{yz2}^1 = 0;$$

$$\mathbf{g}_{zx3}^1 = 0, \quad \mathbf{g}_{zy3}^1 = 0; \quad \mathbf{g}_{zz3}^1 = -\frac{1}{4\pi} \left(\int \int_{x1 y1}^{x2 y2} \frac{z^* - z2}{r^3(x, y, z2)} dx dy - \int \int_{x1 y1}^{x2 y2} \frac{z^* - z1}{r^3(x, y, z1)} dx dy \right);$$

и т.д.

Остальные коэффициенты по формулам:

$$\begin{aligned} g_{xx2}^1 &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_2} \frac{(3r_x^2 - r^2)}{r^5(x, y, z)} dV_2; \quad g_{xy2}^1 = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_2} \frac{3r_x r_y}{r^5(x, y, z)} dV_2; \quad g_{xz2}^1 = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_2} \frac{3r_x r_z}{r^5(x, y, z)} dV_2; \\ g_{yx1}^1 &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_1} \frac{3r_x r_y}{r^5(x, y, z)} dV_1; \quad g_{yy1}^1 = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_1} \frac{(3r_y^2 - r^2)}{r^5(x, y, z)} dV_1; \quad g_{yz1}^1 = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_1} \frac{3r_y r_z}{r^5(x, y, z)} dV_1; \\ g_{zx1}^1 &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_1} \frac{3r_x r_z}{r^5(x, y, z)} dV_1; \quad g_{zy1}^1 = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_1} \frac{3r_y r_z}{r^5(x, y, z)} dV_1; \quad g_{zz1}^1 = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_1} \frac{(3r_z^2 - r^2)}{r^5(x, y, z)} dV_1 \end{aligned}$$

и д.т.

Следует отметить, что диагональные элементы матрицы $\mathbf{G5}$ есть не что иное, как коэффициенты формы, при этом $g_{xxi}^i + g_{yyi}^i + g_{zzi}^i = 1$ и для случая куба, как показали расчеты, $g_{xxi}^i = g_{yyi}^i = g_{zzi}^i = 1/3$. Это обстоятельство значительно упрощает вычисление сингулярных интегралов в случае дискретизации на элементарные объемы в виде кубов.

Вычисление интеграла $\iiint_{V_j} \frac{\mathbf{J}_{\text{cr}} \times \mathbf{r}}{r^3} dV_j$ не представляет сложностей (см. рис. 2):

$$\begin{aligned} H_{\text{cr}j}^x &= \frac{1}{4\pi} \left[\iiint_{V_i} \frac{(J_{\text{cr}i}^y \cdot r_z - J_{\text{cr}i}^z \cdot r_y)}{r^3(x, y, z)} dV_i \right] = \frac{1}{4\pi} \left[J_{\text{cr}i}^y \iiint_{V_i} \frac{r_z}{r^3(x, y, z)} dV_i - J_{\text{cr}i}^z \iiint_{V_i} \frac{r_y}{r^3(x, y, z)} dV_i \right]; \\ H_{\text{cr}j}^y &= \frac{1}{4\pi} \left[\iiint_{V_i} \frac{(J_{\text{cr}i}^z \cdot r_x - J_{\text{cr}i}^x \cdot r_z)}{r^3(x, y, z)} dV_i \right] = \frac{1}{4\pi} \left[J_{\text{cr}i}^z \iiint_{V_i} \frac{r_x}{r^3(x, y, z)} dV_i - J_{\text{cr}i}^x \iiint_{V_i} \frac{r_z}{r^3(x, y, z)} dV_i \right]; \\ H_{\text{cr}j}^z &= \frac{1}{4\pi} \left[\iiint_{V_i} \frac{(J_{\text{cr}i}^x \cdot r_y - J_{\text{cr}i}^y \cdot r_x)}{r^3(x, y, z)} dV_i \right] = \frac{1}{4\pi} \left[J_{\text{cr}i}^x \iiint_{V_i} \frac{r_y}{r^3(x, y, z)} dV_i - J_{\text{cr}i}^y \iiint_{V_i} \frac{r_x}{r^3(x, y, z)} dV_i \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение

$$\mathbf{J}_{\text{вих}} = \gamma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\xi \mathbf{r}}{r^3} dS \right)$$

и его аналог (14в)

$$\mathbf{J}_{\text{вих}j} = -\gamma \left(\frac{\mathbf{A}_{j(k+1)} - \mathbf{A}_{j(k)}}{\Delta t} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{3N_S} g_{ij} \cdot \xi_i \right).$$

Для площадок, принадлежащих элементарным объемам, которые соприкасаются с поверхностью проводящей детали (поверхностью ферромагнитного сердечника)

$$\text{grad } \varphi_{ej} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_m} \frac{\xi_m \mathbf{r}}{r^3} dS_m :$$

$$\text{grad}_x \varphi_{ej} = \frac{\xi_m}{4\pi\epsilon_0} \left[\int \int_{z1 y1}^{z2 y2} \frac{x^* - x2}{r^3(x2, y, z)} dx dy + \int \int_{z1 y1}^{z2 y2} \frac{x^* - x1}{r^3(x1, y, z)} dy dz \right],$$

$$\begin{aligned} \text{grad}_y \varphi_{e_j} &= \frac{\xi_m}{4\pi\epsilon_0} \left[\iint_{z_1, x_1}^{z_2, x_2} \frac{y^* - y_2}{r^3(x, y_2, z)} dx dz - \iint_{z_1, x_1}^{z_2, x_2} \frac{y^* - y_1}{r^3(x, y_1, z)} dy dz \right], \\ \text{grad}_z \varphi_{e_j} &= \frac{\xi_m}{4\pi\epsilon_0} \left[\iint_{y_1, x_1}^{y_2, x_2} \frac{z^* - z_2}{r^3(x, y, z_2)} dx dy - \iint_{y_1, x_1}^{y_2, x_2} \frac{z^* - z_1}{r^3(x, y, z_1)} dy dz \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение системы (13)

$$\xi = 2\epsilon_0 \left[-\mathbf{n} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\xi \mathbf{r}}{r^3} dS \right) \right]$$

и его аналог (14г)

$$\begin{aligned} \xi_m &= -2\epsilon_0 \left[n_x \frac{\mathbf{A}_{m(k+1)}^x - \mathbf{A}_{m(k)}^x}{\Delta t} + n_y \frac{\mathbf{A}_{m(k+1)}^y - \mathbf{A}_{m(k)}^y}{\Delta t} + n_z \frac{\mathbf{A}_{m(k+1)}^z - \mathbf{A}_{m(k)}^z}{\Delta t} + \right. \\ &\quad \left. + n_x \text{grad}_x \varphi_{e(k)} + n_y \text{grad}_y \varphi_{e(k)} + n_z \text{grad}_z \varphi_{e(k)} \right]. \end{aligned}$$

Плотность поверхностного заряда величина – скалярная, определяется в соответствии с формулами, подробно рассмотренными ранее. Её вычисление производится итерационно, поскольку $\text{grad} \varphi_{e(k)}$ вычисляется на предыдущей итерации по времени.

Решая численно системы (13) и (14) можно построить алгоритмы, обеспечивающие расчёт электромагнитных полей в рамках метода ПИУ достаточно широкого класса электромеханических систем. В последующих работах будет дана оценка эффективности указанного метода, а также влияния степени дискретизации (пространственной и временной) численной модели на точность получаемых результатов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бинс К., Лауренсон П. Анализ и расчет электрических и магнитных полей. – М.: Энергия, 1970. – 376 с.
2. Демирчян К.С., Чечурин В.Л. Машинные расчёты электромагнитных полей. – М.: Высш. шк., 1986. – 240 с.
3. Соловейчик Ю.Г., Рояк М.Э. Совместное использование скалярного и векторного потенциала при конечноэлементном моделировании трёхмерных нестационарных электромагнитных полей в электротехнических устройствах // Научн. вестн. Новосиб. гос. техн. ун-та. – 1997. – № 3. – С.141-160.
4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
5. Langer U., Steinbach O. Coupled Finite and Boundary Element Domain Decomposition Methods // Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. – 2006. – № 29. – P. 61-96.
6. Тозони О.В. Метод вторичных источников в электротехнике. – М.: Энергия, 1975. – 295 с.
7. Тозони О.В., Маергойз И.Д. Расчёт трёхмерных электромагнитных полей. – Киев: Техніка, 1974. – 352 с.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1970. – 720 с.
9. Пеккер И.И. Расчёт магнитных систем методом интегрирования по источникам поля // Изв. вузов. Электромеханика. – 1964. – № 6. – С. 1047-1051.
10. Пеккер И.И. Расчёт магнитных систем путём интегрирования по источникам поля // Изв. вузов. Электромеханика. 1969. № 6. С. 618-623.
11. Курбатов П.А., Аринчин С.А. Численный расчёт электромагнитных полей. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 168 с.
12. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М. –Л.: ОГИЗ Гос. изд. технико-теор. лит., 1946. – 660 с.

13. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – 13-е изд., исправленное. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 544 с.
14. *Яворский Б.М., Детлаф А.А.* Справочник по физике для инженеров и студентов. – 7-е изд., исп. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 942 с.
15. *Фрейнкман Б.Г.* Выделение особенности в интегральных уравнениях трехмерного электромагнитного поля // Журнал технической физики. – 1980. – Т. 50. – Вып. 2. – С. 425-427.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.Х. Пшихопов.

Подберезная Ирина Борисовна – Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М.И. Платова; e-mail: podbereznayaib@mail.ru; 346429, г. Новочеркасск, Ростовской обл., ул. Аксайская, 15-А; тел.: 88635255113, 89085078284; кафедра электромеханики и электрических аппаратов; к.т.н.; доцент.

Podbereznaya Irina Borisovna – «Electromecanics and electric devices» South-Russian State Polytechnic University (NPI) of a name of M.I. Platov; e-mail: podbereznayaib@mail.ru; 15-A, Aksayskaya street, Novocherkassk, Rostov Region, 346429, Russia; phones: +78635255113, +79085078284; cand. of eng. sc.; associate professor.