

Выход из программы может быть осуществлен досрочно в том случае, если полученное на ранних итерациях решение не улучшается, в том числе не снижается степень риска выбранного портфеля ценных бумаг.

Таким образом, в данной работе предложен подход к решению класса задач, определенных нелинейной целевой функцией и нелинейными ограничениями на принципах генетических алгоритмов оптимизации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дружинин М.А. Сборник материалов тринадцатой Междунар. науч.-практ. конф. «Управление качеством» // ПРОБЕЛ-2000, МАТИ, 2014. – С. 109-110.
2. Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Генетические алгоритмы. – М.: Физматлит, 2006. – 318 с.
3. Балыбердин В.А., Белевцев А.М., Дружинин М.А. Генетические алгоритмы поиска в задачах оптимизации систем сетцентрического управления специального назначения // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 5 (118). – С. 153-159.
4. Белевцев А.М., Дружинин М.А. Разработка и исследование адаптивного поискового алгоритма для решения многоэкстремальных задач оптимизации информационных процессов в информационных системах с распределенной обработкой данных // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – № 5 (130). – С. 162-165.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.А. Петраков.

Белевцев Андрей Михайлович – Научно-исследовательский институт технологий нового поколения; e-mail: ambelevtsev@yandex.ru; 121522, г. Москва, ул. Оршавская, 3; тел.: 89037691788; директор; д.т.н.; профессор.

Дружинин Михаил Александрович – 3 ЦНИИ Минобороны России (3 Центральный научно-исследовательский институт Минобороны России); e-mail: ambelevtsev@yandex.ru; 107564, Москва, Погонный пр-д, 10; тел.: 89261334779; заместитель начальника отдела.

Belevtsev Andrey Michailovich – Research institute of the new generation of Technologies; e-mail: ambelevtsev@yandex.ru; 3, Orshavckay street, Moscow, 121522, Russia; phone: +79037691788; director; dr. of eng. sc; professor.

Druzhinin Mihail Aleksandrovich – 3 the Central Scientific Research Institute of the Ministry of Defence of the Russian Federation; e-mail: ambelevtsev@yandex.ru; 10, Pogonny'j, Mockov, 107564, Russia; phone: +79261334779; deputy division chief.

УДК 681.3.06:681.323(519.6)

А.Н. Голиков

КУСОЧНО-ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЕ НЬЮТОНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ, ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПО КРУГОВОМУ СЕКТОРУ

Излагается кусочно-интерполяционная схема приближения действительных функций двух действительных переменных на круговом секторе интерполяционными многочленами Ньютона с прямоугольной системой узлов в полярной системе координат с началом в центре сектора. Приближение строится на равномерном разбиении исходной области двумя семействами параллельных прямых таких, что прямые из разных семейств взаимно перпендикулярны. В каждой такой подобласти в узлах, расположенных с постоянным шагом вдоль координатных осей, строится интерполяционный многочлен Ньютона. Многочлен преобразуется к каноническому виду, после чего используется для численного дифференцирования и интегрирования приближаемой функции. Степень многочлена и мелкость разбиения исходной области выбираются алгоритмически минимальными так, чтобы дос-

тичь априори заданной границы абсолютной погрешности приближения. Схема является базой программного комплекса для уточнённого моделирования электрон-фононного транспорта в квантовых проволоках. Схема отличается научной новизной по построению на основе интерполяционных многочленов Ньютона с приведением к каноническому виду и минимизацией временной сложности и памяти.

Кусочно-интерполяционное приближение; интерполяция по Ньютону; приближение частных производных; приближенное вычисление двойных интегралов.

A.N. Golikov

PIECWISE INTERPOLATION FOR BIVARIATE FUNCTIONS, PARTIAL DERIVATIVES, AND DOUBLE INTEGRALS OVER A CIRCLE SECTOR

The piecewise interpolation for real bivariate functions, partial derivatives, and double integrals is presented for a circle domain. The computer approximation use Newton's interpolation on a rectangle. The polar coordinate system is defined with the center at the center of the circle. The approximation is constructed using a uniform sub-division of the domain by families of parallel lines. In each sub-domain the polynomial is constructed at uniformly distributed nodes; thereafter it is transformed to a canonical form. At this form, the interpolation polynomial is used for numerical differentiation and integration. Degree of polynomial and size of the sub-domain are varied by an algorithm; at that, an a priori given boundary of approximation error is reached. The presented numerical scheme is a base of program for a computer simulation of electron-phonon scattering with a high accuracy. The scheme differs from analogues by a time complexity minimization, by a construction on a base of Newton's interpolation with a transformation to a canonical form.

Piecewise interpolation; Newton's interpolation; approximation of partial derivatives; approximation of double integrals.

Введение и постановка задачи. Задачи управления [1] обуславливают необходимость создания быстродействующей и энергоэффективной электроники. Одним из перспективных направлений технологического решения таких задач на элементном уровне является разработка электронных устройств на основе квантовых проволок [2].

В процессе моделирования наноэлементов на основе квантовых проволок требуется приближать, а также численно дифференцировать и интегрировать функции вида

$$f: G \rightarrow R, \quad R^2 \supset G = \{A(r, \varphi) \mid \rho(C_0, A) \leq \rho_{\max}, \varphi_{\min} \leq \varphi \leq \varphi_{\max}\}, \quad (1)$$

где $f \in C^{N_x+N_y+1}(G)$, $C^{N_x+N_y+1}(G)$ – класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными до $(N_x + N_y + 1)$ -го порядка включительно на круговом секторе G ; φ_{\min} и φ_{\max} – углы между прямолинейными границами сектора и осью абсцисс; $\rho(C_0, A)$ – евклидово расстояние между центром кругового сектора C_0 и текущей точкой A . Для простоты в дальнейших рассуждениях считается заданной полярная система координат с центром в центре сектора G из (1).

В статье решается задача построения компьютерного приближения функции f в замкнутой области G , f и G из (1), с достижением априори заданной границы абсолютной погрешности приближения, а также с учётом ограничений памяти и временной сложности. С этой целью приближающий ньютонов многочлен строится на равномерном разбиении области (1) с преобразованием к каноническому виду с постоянными числовыми коэффициентами [3, 4]. Такое преобразование позволяет использовать полученный многочлен для численного дифференцирования и интегрирования функции (1), используя реализованные в виде стандартной подпрограммы простые правила вычисления частных производных и первообразных от степенной функции двух переменных.

Ниже описывается алгоритм разбиения области (1) с минимизацией степени приближающего многочлена и числа подобластей.

Минимизация числа подобластей и степени многочлена при кусочно-интерполяционном приближении на равномерном разбиении исходной области. Работа алгоритма осуществляется в ограничениях памяти (числа подобластей), и временной сложности приближения (степени интерполяционного многочлена). Названные ограничения формализованы в виде условий

$$\begin{cases} N_r \leq N_{\max}, & N_\varphi \leq N_{\max}, \\ k_r \leq k_{\max}, & k_\varphi \leq k_{\max}, \end{cases} \quad (2)$$

где N_r и N_φ – степени интерполяционного многочлена относительно переменных r и φ соответственно; 2^{k_r} и 2^{k_φ} суть число подобластей вдоль соответствующих координатных осей, значения N_{\max} и k_{\max} задаются априори.

Область (1) разбивается на прямоугольные подобласти $G_{\tilde{k}}$ прямыми

$$r_i = i \cdot h_r, \quad \varphi_j = \varphi_{\min} + j \cdot h_\varphi, \quad (3)$$

где $h_r = \frac{\rho_{\max}}{2^{k_r}}$, $h_\varphi = \frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}{2^{k_\varphi}}$, ρ_{\max} , φ_{\min} и φ_{\max} из (1), $i = \overline{0, 2^{k_r} - 1}$, $j = \overline{0, 2^{k_\varphi} - 1}$.

Построение приближающего многочлена $P_{\tilde{k}, N_x, N_y}(r, \varphi)$ начинается при минимальных значениях $N_r = N_\varphi = 1$, $k_r = k_\varphi = 0$. После преобразования интерполяционного многочлена к каноническому виду

$$P_{\tilde{k}, N}(r, \varphi) = \sum_{i=0}^{N_r} \sum_{j=0}^{N_\varphi} a_{\tilde{k}, ij} r^i \varphi^j, \quad (4)$$

в проверочных точках, расположенных вдоль координатных осей с постоянным априори заданным шагом, меньшим шага интерполяции, проверяется условие

$$\left| P_{\tilde{k}, N}(r, \varphi) - f(r, \varphi) \right| \leq \varepsilon, \quad (5)$$

где граница ε задаётся априори.

Если условие (5) выполнено во всех проверочных точках, то приближающий многочлен считается построенным. Если условие (5) не выполнено хотя бы в одной точке, то значения N_r и N_φ увеличиваются на единицу и построение повторяется до удовлетворения условия (5) либо до исчерпания пределов (2) по N_r и N_φ . В последнем случае устанавливаются единичные значения N_r и N_φ , а k_r и k_φ увеличиваются на единицу, и так далее.

Таким образом, если существует набор некоторых N_r , N_φ , k_r , k_φ , при которых условие выполняется во всех проверочных точках, то значения степени и числа подобластей минимальны по построению, что обеспечивает минимизацию временной сложности приближения и памяти, требуемой для хранения коэффициентов $a_{\tilde{k}, ij}$ из (4).

После построения многочлена (4) коэффициенты $a_{\tilde{k},ij}$ записываются в память компьютера для дальнейшего использования. В таком случае приближение функции с использованием схемы Горнера займёт время $t(1) = N_x N_y (t_y + t_c)$, где t_y и t_c – время одного умножения и сложения соответственно; при этом индекс \tilde{k} подобласти $G_{\tilde{k}}$ вычисляется при помощи соотношений

$$\tilde{k} = j \cdot 2^{k_\varphi} + i + 1, \quad i = \left[\frac{r}{h_r} \right] + 1, \quad j = \left[\frac{\varphi - \varphi_{\min}}{h_\varphi} \right] + 1, \quad (6)$$

где $[a]$ – целая часть числа a , h_r и h_φ из (3).

Ниже описывается преобразование интерполяционного многочлена Ньютона в текущей подобласти $G_{\tilde{k}}$ к виду (3).

Кусочно-интерполяционное приближение функций двух переменных на основе многочленов Ньютона. Преобразование интерполяционного многочлена к виду (4) инвариантно относительно степени, числа подобластей и номера подобласти, поэтому значения N_r , N_φ , k_r , k_φ и \tilde{k} считаются определёнными по описанному в предыдущем параграфе алгоритму и фиксированными.

В подобласти $G_{\tilde{k}}$ задаётся прямоугольная система равноотстоящих узлов

$$\tilde{G}_{\tilde{k}} = \left\{ (r_{i,\ell}, \varphi_{j,m}) \mid r_{i,\ell} = r_i + \ell h, \varphi_{j,m} = \varphi_j + mg, \ell = \overline{0, N_r}, m = \overline{0, N_\varphi} \right\}, \quad (7)$$

где $h = \frac{h_r}{N_r}$ и $g = \frac{h_\varphi}{N_\varphi}$ – шаги интерполяции; h_r и h_φ – линейные размеры подобласти (3). В узлах (7) строится интерполяционный многочлен Ньютона

$$P_{\tilde{k}, N_r, N_\varphi}(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{N_r} \sum_{k=0}^{N_\varphi} \frac{\Delta_{r^m \varphi^k}^{m+k} f(r_{i,0}, \varphi_{j,0})}{m! h^m k! g^k} \prod_{\ell=0}^m (r - r_{i,\ell}) \prod_{q=0}^k (\varphi - \varphi_{j,q}), \quad (8)$$

где $\Delta_{r^m \varphi^k}^{m+k} f(r_{i,0}, \varphi_{j,0})$ – двойные конечные разности; $\Delta_{r^0 \varphi^0}^0 f(r_{i,0}, \varphi_{j,0}) \equiv f(r_{i,0}, \varphi_{j,0})$.

После преобразований многочлен (8) запишется в виде

$$P_{\tilde{k}, N_r, N_\varphi}(t(r), u(\varphi)) = \sum_{m=0}^{N_r} \sum_{k=0}^{N_\varphi} b_{m,k} \prod_{i=0}^m (t-i) \prod_{j=0}^k (u-j), \quad (9)$$

где $b_{m,k} = \frac{\Delta_{r^m \varphi^k}^m f(r_{i,0}, \varphi_{j,0})}{m! k!}$; $t = \frac{r - r_{i,0}}{h}$, $\varphi = \frac{\varphi - \varphi_{j,0}}{g}$.

В процессе приведения многочлена (9) к виду (4) по корням многочленов

$$R_m(t) = \prod_{i=0}^m (t-i) = \sum_{i=0}^m d_{k,i} t^i, \quad Q_k(u) = \prod_{j=0}^k (u-j) = \sum_{j=0}^k \tilde{d}_{m-k,j} u^j$$

вычисляются их коэффициенты при помощи матричной схемы из [5]. Для равномерных сеток узлов интерполяции схема, используя только операции сложения и умножения, применяется к целочисленным данным и поэтому не коптит погрешности округления.

Многочлены $R_m(t)$ и $Q_k(u)$ зависят только от степени интерполяционного многочлена и инвариантны относительно приближаемой функции (1), поэтому коэффициенты $d_{k,i}$ и $\tilde{d}_{m-k,j}$ после однократного вычисления и занесения в память компьютера считаются априори известными.

Вычислив коэффициенты $d_{k,i}$ и $\tilde{d}_{m-k,j}$, получим

$$\prod_{i=0}^k (t-i) \prod_{j=0}^{m-k} (u-j) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{m-k} d_{k,i} \tilde{d}_{m-k,j} t^i u^j = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{m-k} D_{m,k,i,j} t^i u^j, \quad (10)$$

где $D_{m,k,i,j} = d_{k,i} \tilde{d}_{m-k,j}$.

Учитывая (10), раскрыв скобки и приведя подобные члены в (9), окончательно запишем

$$P_{\tilde{k},N}(t(r), u(\varphi)) = \sum_{i=0}^{N_r} \sum_{j=0}^{N_\varphi} a_{\tilde{k},ij} t^i u^j, \quad (11)$$

где $a_{\tilde{k},ij} = \sum_{m=j}^{N_r} \sum_{k=i}^{N_\varphi} b_{mk} D_{m,k,i,j}$, $i = \overline{1, N_r}$, $j = \overline{1, N_\varphi}$.

Изложенная схема нацелена на компьютерное приближение функций (1) из стандартной библиотеки, например при моделировании электронного транспорта в квантовых проволоках [2, 6]. В таком случае коэффициенты $a_{\tilde{k},ij}$ заносятся в память компьютера, и приближение функции (1) сводится к вычислению многочлена (11) по схеме Горнера с предварительной дешифрацией (6) индекса \tilde{k} подобласти.

Схема (11) обладает параллелизмом и инвариантностью относительно размера области (1) [7].

Ниже в рамках излагаемого метода приближаются частные производные функции (1) порядка не выше степени многочлена (11) по соответствующим переменным.

Кусочно-интерполяционное приближение частных производных от функции двух действительных переменных. В предположении, что многочлен (11) построен, частные производные от функции (1) приближаются частными производными от многочлена (11), т.е. имеет место приближённое равенство

$$\frac{\partial^{\ell+k} f(x, y)}{\partial x^\ell \partial y^k} \approx h^{-\ell} g^{-k} \sum_{i=\ell}^{N_r-k} \sum_{j=k}^{N_\varphi-\ell} \frac{i!}{(i-\ell)!} \frac{j!}{(j-k)!} a_{\tilde{k},ij} t^{i-\ell} u^{j-k}, \quad (12)$$

где $0 \leq \ell \leq N_r$, $0 \leq k \leq N_\varphi$.

В (12) многочлен (11) продифференцирован как сложная функция от x и y , а также учтено, что $m(m-1)\dots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$. Последнее позволяет, предварительно записав в память компьютера члены последовательности факториалов: $0!$, $1!$, ..., $N!$, вычислять произведения вида $m(m-1)\dots(m-n+1)$ за время одного деления, что снижает временную сложность приближённого дифференцирования.

При запомненных предварительно коэффициентах (11) приближение производных сводится к дешифрации (6) и вычислению значения многочлена (12) по схеме Горнера за время $t(1) = (N_r - k)(N_\varphi - \ell)(2t_y + 2t_\theta + t_c)$, где t_y , t_θ , t_c – время одного умножения, деления и сложения соответственно [7].

Кусочно-интерполяционное приближение двойных интегралов по круговому сектору. Пусть многочлен (11) построен, тогда в рамках излагаемого метода двойной интеграл от функции f по круговому сектору G , f и G из (1) приближается соответствующим интегралом от многочлена (11). В силу аддитивности интеграла по области интегрирования имеет место приближённое равенство

$$\iint_G f(x, y) dx dy \approx \sum_{\tilde{k}=0}^{2^{k_r+k_\varphi}-1} \iint_{G_{\tilde{k}}} P_{\tilde{k}, N_r, N_\varphi}(t(r), u(\varphi)) dr d\varphi. \quad (13)$$

С учётом (11), а также с учётом замен переменных $t(r)$ и $u(\varphi)$ из (9) соотношение (13) запишется в виде

$$\iint_G f(x, y) dx dy \approx \sum_{\tilde{k}=0}^{2^{k_r+k_\varphi}-1} hg \int_0^{N_r} dt \int_0^{N_\varphi} \sum_{i=0}^{N_r} \sum_{j=0}^{N_\varphi} a_{\tilde{k}, ij} t^i u^j du,$$

откуда окончательно получим

$$\iint_G f(x, y) dx dy \approx hg \sum_{\tilde{k}=0}^{2^{k_r+k_\varphi}-1} \sum_{i=0}^{N_r} \sum_{j=0}^{N_\varphi} \frac{1}{(i+1)(j+1)} a_{\tilde{k}, ij} t^{i+1} u^{j+1}. \quad (14)$$

Схема (14) ориентирована на компьютерное вычисление двойных интегралов по круговому сектору (1). Схема по построению инвариантна относительно размеров области и обладает естественным параллелизмом, как показано в [7].

Численный эксперимент. Для численного эксперимента использовался компьютер на базе процессора Intel Core 2 Quad Q6600 с 8 Гб RAM.

Погрешность приближения функций на изложенной основе не превосходит по порядку величину 10^{-18} , частных производных первого порядка – 10^{-15} , прямых производных второго порядка – 10^{-11} , смешанной производной второго порядка – 10^{-9} . Абсолютная погрешность приближённого вычисления двойных интегралов не более 10^{-18} .

Таким образом, в статье изложены компьютерные схемы приближённого вычисления функций двух переменных, их частных производных и двойных интегралов по круговому сектору. Схемы инвариантны относительно размера области определения функции, обладают естественным параллелизмом [7]. Подход нацелен на использование для приближения функций, производных и интегралов из стандартной библиотеки. За счёт алгоритмического подбора наименьшей степени приближающего многочлена для данного числа подобластей удаётся снизить временную сложность вычислений при достижении априори заданной границы абсолютной погрешности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гайдук А.Р., Плаксиенко Е.А. Управление нелинейными объектами с компенсацией неопределённого возмущения // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2013. – № 1. – С. 2-8.
2. Борздов А.В., Поздняков Д.В., Борздов В.М., Орликовский А.А., Вьюрков В.В. Моделирование влияния поперечного электрического поля на дрейфовую скорость электронов в GaAs квантовой проволоке // Микроэлектроника. – 2010. – Т. 39, № 6. – С. 436-442.
3. Голиков А.Н. Кусочно-полиномиальная схема аппроксимации функций двух переменных, частных производных и двойных интегралов с повышенной точностью // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 5 (118). – С. 179-186.

4. Ромм Я. Е., Фирсова С.А. Минимизация временной сложности вычисления функций с приложением к цифровой обработке сигналов. – Таганрог: Изд-во Таганрог. гос. пед. ин-та, 2008. – 125 с.
5. Ромм Я.Е. Локализация и устойчивое вычисление нулей многочлена на основе сортировки. II // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 2. – С. 161-174.
6. Голиков А.Н. Самосогласованный расчёт электрон-фононного рассеяния в GaAs нанопроволоках на основе кусочно-полиномиальных схем. – Таганрог: ТГПИ, 2011. – 123 с.
7. Голиков А.Н. Кусочно-полиномиальные схемы вычисления функций двух переменных, частных производных и двойных интегралов на основе интерполяционного полинома Ньютона. – Таганрог: ТГПИ., 2010. – 150 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Л.П. Фельдман.

Голиков Александр Николаевич – НОУ ВПО «Таганрогский институт управления и экономики»; e-mail: alex.golikov@mail.ru; 347900, г. Таганрог, ул. Петровская, 45; кафедра прикладной математики и информационных технологий; к.т.н.; старший преподаватель.

Golikov Alexander Nikolayevich – Taganrog Management and Economics Institute; e-mail: alex.golikov@mail.ru; 45, Petrovskaya street, Taganrog, 347900, Russia; the department of applied mathematics and information technologies; cand. of eng. sc.; lecturer.

УДК 519.876.5

Е.Н. Бородулина

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СИТУАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрена задача разработки модели поддержки жизненного цикла системы в условиях многовариантного развития событий и инструментария для ее реализации. Предложена адаптивная модель, включающая три компоненты: структурную модель управляемой системы, сценарно-вероятностную модель внешней среды и модель управляющей системы. Отмечается, что система, проектированная на основе данной модели, является достаточно гибкой и позволяет решать задачи прогнозирования перехода системы из одного состояния в другое путем предварительного задания параметров внешней среды, управления изучаемой системой с помощью выбранного управляющего воздействия, управления внешней средой с целью превращения воздействия в воздействие, улучшающее параметры функционирования системы, изучения параметров среды при разных ситуациях и синтеза эффективной управляемой системы. В качестве ядра инструментария предложен генетический алгоритм с динамическим выбором генетических операторов в группе, позволяющий решить задачу выбора оптимального управляющего воздействия при условии предварительного формирования целевой функции на основе анализа внешнего воздействия, параметров внутренней среды и рисков.

Генетический алгоритм; ситуационное управление; социотехническая система; сценарно-вероятностная модель; управляемая система; управляющая система.

E.N. Borodulina

THE GENETIC ALGORITHM OF SITUATION MANAGEMENT PROBLEM SOLUTION

The problem of construction of life cycle support system model under multi-version event development and instruments for implementation is considered. The adaptive model including three components such as structural model of controlled system, scenario probabilistic model of surroundings and controlling system model and allowing solving the problems of sophisticated social