Раздел I. Математические методы синтеза систем

УДК 681.5013

А.Р. Гайдук, Е.А. Плаксиенко

СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ В КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ФОРМЕ*

Если правые части уравнений нелинейной системы являются функциями, дифференцируемыми по всем аргументам, то эту систему можно представить в квазилинейной форме, что позволяет применить к исследованию нелинейных систем методы линейной теории управления. При этом квазилинейная форма, в отличие от методов линеаризации всех типов, является точным представлением уравнений нелинейных систем. Приводятся основные соотношения, позволяющие представить заданные уравнения объекта в квазилинейной форме и оценить управляемость этого объекта. Если условия управляемости выполняются, применяются соотношения аналитической процедуры синтеза, которые позволяют построить вспомогательное стабилизирующее управление, на основе которого строится нелинейное управление, оптимальное в смысле минимума нелинейного квадратичного функционала качества. Коэффициенты квадратичного функционала выбираются, так же как и в обычной линейной задаче квадратичной оптимизации. Предложенный подход может быть применен для представления уравнений модели конфликта двух сторон, которые часто исследуются при поиске управляющих решений в технических, экономических и других системах.

Нелинейность; объект; система; квазилинейная форма; оптимальное управление.

A.R. Gaiduk, E.A. Plaksienko

DESIGN OF CONTROL SYSTEMS FOR NONLINEAR PLANTS ON THE BASIS OF THE EQUATIONS IN QUASILINEAR FORM

If the right parts of the equations of nonlinear system are the differentiated on all arguments functions, this system can be presented in quasilinear form, which allows applying methods of the linear control theory to research of nonlinear systems. The quasilinear form, as against method of linearization all types, is exact representation of the equations of nonlinear systems. In the article the basic relations are given to represent the given equation of object in the quasilinear form and evaluate the controllability of this object. If controllability conditions are satisfied, apply the rations of the analytical procedure of synthesis, which allow to construct the auxiliary stabilizing control as a basis for construction nonlinear control, optimal in the sense of a minimum of nonlinear functional qualities. The coefficients of the quadratic functional are selected, as well as in usual linear quadratic optimization problem. The equations of two party's conflict can be submitted to the quasilinear form. This equations are frequently use for search of control decisions in technical, economic and other systems.

Nonlinearity; plant; system; quasilinear form; optimal control.

Введение. Правые части уравнений нелинейных систем часто описываются нелинейными функциями различных типов. Этот факт в значительной степени осложняет решение задачи синтеза управлений нелинейными системами [1]. Од-

* Работа поддержана РФФИ, грант № 13-08-00249.

нако в очень многих случаях эти функции являются дифференцируемыми по всем своим аргументам. Это позволяет представить уравнения нелинейных систем в квазилинейной форме [2, 3], близкой к линейной, и применить для решения задачи синтеза управлений нелинейными системами хорошо проработанные методы линейной теории управления. Математической основой преобразования формы уравнений нелинейных систем в данном случае является независимость от пути интегрирования криволинейного интеграла от функции многих переменных [4].

Квазилинейное представление моделей может применяться для представления уравнений модели конфликта двух сторон, которая часто используется при поиске управлений в технических, экономических и других системах [5]. В этом случае моделью является дифференциальная игра преследования, которая является широко известной задачей исследования операций и имеет множество приложений. Например, такие задачи, как самолет-истребитель – самолет-цель; охотник – жертва; затраты покупателя – затраты производителя; парные состязания и т.п.

Квазилинейное представление нелинейных моделей. Рассмотрим метод адекватного представления моделей нелинейных объектов управления в квазилинейной форме с учетом неопределенности на примере управляемой системы, которая описывается нелинейным уравнением в отклонениях

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1}$$

где $x \in R^n$ – измеряемый вектор состояния; u – скалярное управление; $f(x,u) = [f_1(x,u), \ldots, f_n(x,u)]^T$ – нелинейная, дифференцируемая вектор-функция такая, что

$$f(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f_i(x,u)}{\partial u} = f_{iu}(x), \quad x \in R^n, \quad \|x\| < \infty. \tag{2}$$

Из второго условия (2) следует, что частные производные $\partial f_i(x,u)/\partial u$ не зависят от управления u. Обозначим $f_{ij}(x)$ частную производную $\partial f_i(x,u)/\partial x_j$, $i,\ j = \overline{1,n}$. Если условия (2) выполняются, то уравнение (1) может быть представлено в квазилинейной форме [2, 3, 4], которая имеет вид

$$\dot{x} = A(x)x + b(x)u. \tag{3}$$

Здесь $A(x) = [a_{ij}(x)]$ – $n \times n$ -матрица, $b(x) = [b_i(x)]$ – вектор, причем

$$a_{ij}(x) = \int_0^1 f_{ij}(x_1, \ldots, x_{j-1}, \theta x_j, 0, \ldots, 0)d\theta, \quad b_i(x) = f_{iu}(x).$$

Подчеркнем, что правые части уравнений (1) и (3) полностью идентичны при всех $x \in R^n, \|x\| < \infty$, т.е. квазилинейная форма (3) является точным представлением нелинейных дифференциальных уравнений (1).

При этом коэффициенты $a_{ij}(x)$ могут определяться различными соотношениями. Например, можно полагать [6]:

$$a_{ij}(x) = \int_0^1 f_{ij}(\theta x, 0)d\theta. \tag{4}$$

В этом случае матрица $A(x)$ в (3) будет отличаться от вытекающей из (4), однако форма (3), по-прежнему, будет точным представлением нелинейной системы (1).

В некоторых случаях квазилинейного представления (3) уравнений нелинейных объектов матрица $A(x)$ и вектор $b(x)$ имеют следующий вид:

$$A(x)=\begin{bmatrix} a_{11}(x_1) & a_{12}(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}(\bar{x}_2) & a_{22}(\bar{x}_2) & a_{23}(\bar{x}_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1}(\bar{x}_{n-1}) & a_{n-1,2}(\bar{x}_{n-1}) & a_{n-1,3}(\bar{x}_{n-1}) & \dots & a_{n-1,n}(\bar{x}_{n-1}) \\ a_{n,1}(x_n) & a_{n,2}(x) & a_{n,3}(x) & \dots & a_{n,n}(x) \end{bmatrix}, \quad b(x)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n(x) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где $x=[x_1,\dots,x_n]$ – n-вектор переменных состояния; $\bar{x}_i=[x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_i]$ – подвектор i-й размерности $i=\overline{1,n}$; $a_{ij}(\bar{x}_i)$, $b_n(\bar{x}_n)$ – нелинейные функции, возможно зависящие только от указанных переменных состояния; u – управление. Переменные x_i, $i=\overline{1,n}$ доступны прямому измерению и являются отклонениями от положения равновесия $x=0$, причем

$$b_n(x)\neq 0, \quad a_{i,i+1}(\bar{x}_i)\neq 0, \quad \bar{x}_i\in\Omega_x, \quad i=\overline{1,n}. \tag{6}$$

Задача синтеза стабилизирующего управления. Поставим задачу синтеза стабилизирующего управления $u=u(x)$, при котором обеспечивается асимптотическая устойчивость положения равновесия $x=0$ нелинейного объекта (3), (5).

Для обеспечения устойчивости положения равновесия системы нелинейное управление $u=u(x)$ ищется также в квазилинейной форме следующего вида:

$$u=-k^T(x)x=-\sum_{i=1}^{n}k_i(x)x_i, \qquad x\in R^n, \|x\|<\infty, \tag{7}$$

где $k_i(x)$ – неизвестные нелинейные функции. Из выражений (3) и (7) выводим

$$\dot{x}=D(x)x, \tag{8}$$

где

$$D(x)=A(x)-b(x)k^T(x). \tag{9}$$

С целью построения указанного управления $u=u(x)$ для объекта (3), (5) предположим, что заданы вещественные числа $\lambda_i>0$, $i=\overline{1,n}$, и введем новые переменные состояния $w_i=w_i(t)$, а также вспомогательные функции $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$:

$$w_1=x_1, \; w_i=\dot{w}_{i-1}(\bar{x}_{i-1})+\lambda_{i-1}w_{i-1}(x)=\psi_i(\bar{x}_{i-1})+\prod_{\nu=1}^{i-1}a_{\nu,\nu+1}(\bar{x}_\nu)x_i, \; i=\overline{2,n}, \tag{10}$$

$$\gamma_1(x)=b_n(x)\prod_{i=1}^{n-1}a_{i,i+1}(\bar{x}_\nu), \tag{11}$$

$$\gamma_2(x)=\frac{d\psi_n(\bar{x}_{n-1})}{dt}+\left[\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n-1}a_{\nu,\nu+1}(\bar{x}_\nu)\right]x_n, \tag{12}$$

где $\psi_i(\bar{x}_{i-1})$ – некоторые нелинейные функции.

Из выражений (10) следует, что каждая переменная w_i непосредственно зависит только лишь от первых i переменных x_ν, $\nu = \overline{1, i}$, т.е. $w_i = w_i(\bar{x}_i) = w_i(x_1, \ldots, x_i, 0, \ldots, 0)$. Тогда стабилизирующее управление равно

$$u(x) = -\gamma_1^{-1}(x)\left[\gamma_2(x) + \lambda_n w_n(x)\right] - \frac{1}{b_n(x)} \sum_{i=1}^{n} a_{n,i}(x) x_i, \qquad x \in \Omega_x. \tag{13}$$

В силу условий (6) функция $\gamma_1(x) \neq 0$ при всех $x \in \Omega_x$, поэтому управление $u = u(x)$ (13) существует.

Построение оптимального управления. С этой целью в уравнении (3), где матрица $A(x)$ и вектор $b(x)$ имеют вид (5) и выполняются условия (6), управление полагается равным $u = u_{\text{всп}} + u_{\text{опт}}$. Здесь $u_{\text{всп}} = -k_{\text{всп}}^T(x)x$ – вспомогательное управление, которое определяется по формулам (10) – (13) при некоторых значениях чисел $\lambda_i > \varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1, n}$; а управление $u_{\text{опт}} = u_{\text{опт}}(x)$ является искомым оптимальным управлением. Значения чисел $\lambda_i > \varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, здесь не имеют большого значения. При $u = u_{\text{всп}} + u_{\text{опт}}$ уравнение (8) можно записать в виде

$$\dot{x} = D_0(x)x + b_n(x)u_{\text{опт}}, \tag{14}$$

где $D_0(x) = \left[A(x) - b_n k_{\text{всп}}^T(x)\right]$.

Дифференцируя вектор-функцию $w(x) = [w_1(x), \ldots, w_n(x)]^T$ по времени с учетом уравнения (14) и свойств стабилизирующего управления (13), будем иметь

$$\dot{w} = J_{wx}(x)x = J_{wx}(x)[D_0(x)x + b_n(x)u_{\text{опт}}]_{x=x(w)} = \Lambda_n w + J_{wx}(x)b_n(x)u_{\text{опт}}\big|_{x=x(w)}, \tag{15}$$

где $J_{wx}(x)$ – якобиан вектор-функции $w(x)$ по переменным x_i; Λ_n – верхняя треугольная матрица, диагональными элементами которой являются числа λ_i.

Уравнение (15) можно записать следующим образом:

$$\dot{w} = \Lambda_n w + e_n(x)\bar{u}, \quad \bar{u} = u_{\text{опт}}\beta_n(x)b_n(x). \tag{16}$$

Так как система (16) является линейной с постоянными параметрами, то, например, методом АКОР можно синтезировать оптимальное управление $\bar{u}^* = \bar{u}^*(w)$, обеспечивающее минимум функционала:

$$J = \int_0^\infty [w^T \bar{Q} w + \bar{\rho}\bar{u}^2]\,dt \to \min_{\bar{u}}. \tag{17}$$

Здесь $\bar{Q}$ – положительно полуопределенная матрица, а число $\bar{\rho} > 0$.

Решением оптимизационной задачи (16), (17) является оптимальное управление $\bar{u}^* = -k_{\text{опт}}^T w$, причем в данном случае вектор $k_{\text{опт}}^T = \bar{\rho}^{-1} e_1 P$, а матрица P определяется решением уравнения Риккати [7]:

$$P\Lambda_n + \Lambda_n P - P e_n \bar{\rho}^{-1} e_1 P + Q = 0. \tag{18}$$

Из второго соотношения (16) следует, что искомое оптимальное управление $u_{\text{опт}} = u_{\text{опт}}(x)$ из уравнения (14) определяется равенством

$$u_{\text{опт}}(x) = -\beta_n^{-1}(x) b_n^{-1}(x) k_{\text{опт}}^T w(x). \tag{19}$$

Преобразование $w = w(x)$ всегда можно представить в квазилинейной форме, т.е. в виде $w = T(x)x$, где $T(x)$ – некоторая функциональная матрица [4]. Следовательно, управление (19) фактически обеспечивает минимум функционала

$$J = \int_0^\infty [x^T Q(x)x + \rho(x)u_{\text{опт}}^2]\,dt\,, \tag{20}$$

где $Q(x) = T^T(x)\bar{Q}T(x)$; $\rho(x) = \beta_n^2(x)b_n^2(x)\bar{\rho}$. Значения коэффициентов матрицы $\bar{Q}$ и числа $\bar{\rho}$, очевидно, можно выбирать исходя из желаемого качества нелинейной системы, оптимальной в смысле минимума функционала (20).

Рассмотренная квазилинейная модель может описывать и одномерную дифференциальную игру преследования одним игроком другого [5]. Обычно игра имеет предписанную длительность, причем игроки стартуют с разных положений и с различными начальными скоростями. Параметры демпфирования также могут быть различными. Эта игра является конфликтной, антагонистической. Описание конфликта включает две системы нелинейных дифференциальных уравнений, представленных в квазилинейной форме. Решение этих управлений определяет ход игры во времени, представляемый «траекторией движения» игроков.

Заключение. Рассмотрена задача синтеза нелинейной системы управления, оптимальной в смысле квадратичного функционала, на основе уравнений объекта, представленных в квазилинейной форме и предварительно синтезированного стабилизирующего управления. Предложенный подход может применяться для исследования и проектирования нелинейных систем различных типов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Красовский А.А.* Избранные труды. Теоретическая и прикладная теория управления. – М.: Мысль, 2001. – 389 с.
2. *Егоров И.Г.* К устойчивости в целом нулевого решения системы двух дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 9. – С. 1554-1549.
3. *Гайдук А.Р., Плаксиенко Е.А.* Квазилинейные модели и синтез нелинейных систем. Шестая Всероссийская мультиконференция по проблемам управления (п. Дивноморское, 30.09–5.10.2013): Матер. мультиконф.: В 4 т. Т. 2. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2013. – С. 16-20.
4. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. – М.: Наука, 1969. – 662 с.
5. *Плаксиенко Е.А.* Исследование дифференциальной игры преследования с квазилинейной моделью // Системный анализ, управление и обработка информации: Труды 4-го Международного семинара (п. Дивноморское, 29.09–3.10.2013) / Под общ. ред. Р.А. Нейдорфа. – Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2013. – С. 144-148.
6. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240 с.
7. *Гайдук А.Р.* Оптимальные и адаптивные системы автоматического управления. – М.: УМ и ИЦ «Учебная литература», 2006.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Р.А. Нейдорф.

Гайдук Анатолий Романович – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: gaiduk_2003@mail.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371689; кафедра систем автоматического управления; д.т.н.; профессор.

Плаксиенко Елена Анатольевна – Таганрогский институт управления и экономики; e-mail: pumkad@mail.ru; 347900, Таганрог, ул. Петровская, 45, тел.: 88634362583; кафедра математики и информатики; к.т.н.; доцент.

Gaiduk Anatoly Romanovich – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: gaiduk_2003@mail.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634361789; the department of automatic control systems; dr. of eng. sc.; professor.

Plaksienko Elena Anatolievna – Educational Establishment of Higher Vocational Education «Taganrog Management and Economy Institute»; e-mail: pumkad@mail.ru; 45, Petrovskaya street, Taganrog, 347900, Russia; phone: +78634362583; the department of mathematic and informatics; cand. of eng. sc.; associated professor.

УДК 681.51

Д.Ю. Денисенко, Ю.И. Иванов, И.О. Шаповалов

СИНТЕЗ ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ТЕЛЕСКОПОМ ПО ОСИ Z*

Исследуется структура и синтезируется цифровая система управления большим азимутальным телескопом (БТА) специальной астрономической обсерватории РАН. Описываются принцип работы, структура электроприводов, вспомогательных механизмов и основные особенности каналов управления. Обосновывается необходимость и актуальность модернизации цифровой системы управления БТА. Составляется структурная схема канала управления телескопом по оси Z (зенит), и ставится задача построения и исследования дискретной математической модели указанного канала управления телескопом, а также задача синтеза дискретной системы управления и алгоритма работы цифрового устройства управления телескопом по оси Z. При решении задачи синтеза цифровой системы управления применяется аналитический метод синтеза системы управления по заданным показателям качества с применением принципа управления по выходу и воздействию и с учетом запаздывания, а также условий физической реализуемости цифровых устройств управления. В результате решения задачи синтеза цифровой системы управления, получен алгоритм вычисления дискретных значений управляющего воздействия. Приводятся результаты исследования синтезированной системы.

Телескоп; система управления; цифровое устройство управления; показатели качества.

D.Y. Denisenko, Y.I. Ivanov, I.O. Shapovalov

DESIGN OF THE DIGITAL CONTROL SYSTEM FOR THE TELESCOPE ON THE AXIS Z

The structure is investigated and the digital control system of a big azimuthal telescope (BTA) of special astronomical observatory of the Russian Academy of Sciences is synthesized. The principle of work, structure of electric drives, auxiliary mechanisms and the main features of control paths are described. Need and relevance of modernization of a digital control system of BTA locates. The block diagram of a control path a telescope on axes Z (zenith) is formed and the task of construction and research of discrete mathematical model of the specified control path by a telescope, and also a problem of synthesis of a discrete control system and algorithm of work of a digital control unit by a telescope on an axis Z is set. At the solution of a problem of synthesis of a digital control system the analytical method of synthesis of a control system on the set indicators of quality with application of the principle of management on an exit and influences and taking into account delay, and also conditions of physical feasibility of digital control units is applied. As a result of the solution of a problem of synthesis of a digital control system, the algorithm of calculation of discrete values of operating influence is received. Results of research of the synthesized system are given.

Telescope; control system; digital control unit; quality indicators.

* Исследование выполнено при поддержке РФФИ, грант № 13-08-00249.