13. *Kravchenko P.P.* Osnovy teorii optimizirovannykh delta-preobrazovaniy vtorogo poryadka. Cifrovoe upravlenie, szhatie, parallelnaya obrabotka informacii: Monografiya [Fundamentals of the theory optimized Delta transformations of the second order. Digital control, compression, parallel information processing: Monograph]. Taganrog. Izd-vo TTI YuFU, 2008, 192 p.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Я.Е. Ромм.

Кравченко Павел Павлович – Южный федеральный университет; e-mail: kravchenkopp@sfedu.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371673; кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ; профессор.

Пирская Любовь Владимировна – e-mail: lyubov.pirskaya@gmail.com; кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ; аспирант.

Kravchenko Pavel Pavlovich – Southern Federal University; e-mail: kravchenkopp@sfedu.ru; 44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371673; the department of software engineering; professor.

Pirskaya Lyubov Vladimirovna – e-mail: lyubov.pirskaya@gmail.com; the department of software engineering; postgraduate student.

УДК 681.5

О.Н. Зенкина

ПРОБЛЕМЫ ФОРМИРОВАНИЯ МЕТОДОВ ЛИНЕАРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Исследуется проблема линеаризации для выявления условий и возможностей разработки методов анализа автоколебаний при помощи гармонической линеаризации класса нелинейных систем с распределенными параметрами. Рассмотрены основные теоретические положения методы и подходы, на основе которых предполагается исследование класса нелинейных распределенных систем. Проведен анализ состояния проблемы и рассмотрены условия, позволяющие выделить класс распределенных систем, которые предполагается исследовать. Исследована возможность обобщения методов линеаризации систем с сосредоточенными параметрами для распределенных систем. Основные задачи исследования нелинейных автоматических систем сводятся к отысканию возможных состояний равновесия системы и исследованию их устойчивости, определению периодических движений, исследованию процессов перехода системы к тому или иному установившемуся состоянию при различных начальных отклонениях. Разработка новых методов линеаризации нелинейных распределенных систем управления. Процесс разработки позволит выделить определенный класс задач, для которых можно нелинейный распределенный объект описать с помощью адекватной линейной модели.

Распределенные системы; нелинейная характеристика; линеаризация; колебания.

O.N. Zenkina

FORMATION PROBLEMS OF LINEARIZATION METHODS OF THE NONLINEAR DISTRIBUTED CONTROL SYSTEMS

The aim of the research is to identify relevant studies of conditions and possibilities of developing methods for the analysis of self-excited oscillations using harmonic linearization of a class of nonlinear systems with distributed parameters. The basic theoretical methods and approaches, on the basis of which to study a class of non-linear distributed systems. The analysis of the problem and the conditions to isolate a class of distributed systems to be explored. We investigated the possibility of synthesis methods linearized systems with lumped parameters for distributed systems. The main objectives of research of nonlinear automatic systems are reduced to search *of possible conditions of balance of system and research of their stability, definition of periodic movements, research of processes of transition of system to this or that established state at various initial deviations. Development of new methods of linearization of the nonlinear distributed control systems. Process of development will allow to allocate a certain class of tasks for which it is possible to describe the nonlinear distributed object by means of adequate linear model. The distributed systems, the nonlinear characteristic, linearization, fluctuations.*

Distributed systems; non-linear characteristics; linearization; fluctuations.

Введение. Реализация систем управления объектами с распределенными параметрами значительно сложнее по сравнению с системами с сосредоточенными параметрами. Это происходит как за счет необходимости осуществления пространственно-распределенного контроля состояния объекта в целях наблюдения за результатами процесса управления и использования соответствующих сигналов обратных связей, так и за счет необходимости построения регуляторов с пространственно-распределенными управляющими воздействиями [1, 2]. По сравнению с системами с сосредоточенными параметрами принципиально расширяется класс управляющих воздействий. В число управляющих воздействий могут включаться пространственно-временные управления, описываемые функциями нескольких аргументов – времени и пространственных координат. Использование методов разработанных для анализа и синтеза линейных систем управления, для нелинейных систем общего вида практически невозможно. Среди нелинейных сосредоточенных систем, для которых разработанный аппарат применим с незначительными изменениями, можно выделить класс систем управления с одним нелинейным элементом.

Разработка методов линеаризации нелинейных распределенных систем управления. Процесс разработки позволит выделить определенный класс задач, для которых можно нелинейный распределенный объект описать с помощью адекватной линейной модели с определенной заданной погрешностью. Все процессы, протекающие в распределенных системах, как и в сосредоточенных, делятся на линейные и нелинейные. Все системы управления могут быть классифицированы как сосредоточенные линейные, сосредоточенные нелинейные, распределенные линейные, распределенные нелинейные. Рассмотрим, например, тепловые процессы описываемые основным уравнением математической физики – уравнением теплопроводности:

$$\Delta u - \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{f}{\lambda},\ a = \sqrt{\frac{\lambda}{c\gamma}}.$$

где u – температура тела, γ – плотность, $\tilde{n}$ – удельная теплоемкость, λ – коэффициент теплопроводности, t – время, Δ – дифференциальный оператор Лапласа, f – интенсивность источников тепла, т.е. количество тепла, выделяемого единицей объема тепла в единицу времени, a – коэффициент температуропроводности материала [3]. Данное уравнение описывает линейный процесс распространения тепла в одномерном объекте. При этом коэффициент температуропроводности a считается постоянным для конкретного материала. Однако в общем случае коэффициент температуропроводности может быть нелинейным, т.к. параметры, от которых он зависит, могут изменяться в процессе функционирования системы. Кроме этого функция f так же может быть нелинейной. Нелинейными могут быть так же функции входящие в условия краевой задачи математической модели системы. В общем случае все описанные выше возможные нелинейности представляют значительные трудности при анализе и синтезе систем управления [4, 5].

Теория линейных распределенных систем. Теория линейных распределенных систем является наиболее изученной, хотя и требует дальнейшего развития и может служить базовой основой для исследования нелинейных систем управления с распределенными параметрами. Наиболее часто в практике автоматических систем встречаются следующие нелинейные звенья: – с гладкой нелинейной характеристикой; – с кусочно-линейной характеристикой (релейного типа, с зоной нечувствительности, с люфтом, с насыщением и др.); – описываемые уравнениями, которые содержат произведение переменных или их производных и другие их комбинации;– логические. Для систем с сосредоточенными параметрами нелинейный элемент задается функцией $z = \varphi(\sigma)$, которая значению $\sigma(t)$ входного сигнала ставит в соответствие значение $z(t)$ выходного сигнала звена: $z(t) = \varphi(\sigma(t))$. Для систем с распределенными параметрами входной сигнал зависит не только от времени, но и от пространственных координат. Рассмотрим виды нелинейных элементов для распределенных объектов с одной пространственной координатой [6]:

– Нелинейная функция вида: $\varphi(\sigma(t))$. В каждой точке $x \in [0;l]$ характеристика нелинейного элемента одного типа и одинакова по величине.

– Нелинейная функция вида: $\varphi(\sigma(x,t))$. В каждой точке $x \in [0;l]$ характеристика нелинейного элемента одного типа, но может отличаться по величине.

– Нелинейная функция вида: $\varphi(x, \sigma(t))$. Входное воздействие зависит только от времени, т.е. является одинаковым для всех точек $x \in [0;l]$, но тип нелинейной характеристики, как реакции на это входное воздействие в каждой точке различный.

– Нелинейная функция вида: $\varphi(x, \sigma(x,t))$. Входное воздействие различно в каждой точке $x \in [0;l]$ и тип нелинейной характеристики для каждого из входных воздействий в каждой точке другой, но не меняется с течением времени.

– Нелинейная функция вида: $\varphi(x, t, \sigma(x,t))$. Входное воздействие различно в каждой точке $x \in [0;l]$ и типы нелинейных характеристик в каждой точке $x \in [0;l]$ и в каждый момент времени различны.

– Нелинейное звено представлено в виде последовательного соединения нелинейного элемента и линейной части. Общее соотношение между выходом и стандартизирующим входом линейного распределенного блока определяется в форме пространственно-временной композиции [7].

$$Q(x,t) = \int_0^t \int_{\ddot{D}} G(x,\xi,t,\tau) \cdot w(\xi,\tau) d\xi d\tau = G(x,\xi,t,\tau) \circ w(\xi,\tau).$$

В достаточно общем случае подобное соотношение для нелинейного блока принимает вид следующего нелинейного интегрального оператора:

$$Q(x,t) = \int_0^t \int_{\ddot{D}} P(x,\xi,t,\tau,w(\xi,\tau)) d\xi d\tau .$$

где $P(x,\xi,t,\tau,w)$ – ядро оператора, являющееся заданной нелинейной функцией входного воздействия $w(\xi,\tau)$. В частности, ядро интегрального оператора, может быть представлено в виде произведения

$$P(x,\xi,t,\tau,w) = S(x,\xi,t,\tau) \cdot h(\xi,\tau,w),$$

где сомножитель $S(x,\xi,t,\tau)$ играет роль аналога функции Грина $G(x,\xi,t,\tau)$ относительно нелинейной функции h от входа $w(\xi,\tau)$. Нелинейный интегральный оператор приводится к композиции:

$$Q(x,t) = \int_0^t \int_{\ddot{D}} S(x,\xi,t,\tau) \cdot h(\xi,\tau,w) d\xi d\tau = S(x,\xi,t,\tau) \circ h(\xi,\tau,w).$$

Решение таких уравнений можно получить в общем случае только численными методами. Линейный блок системы может быть представлен бесконечной совокупностью независимых контуров [8]. Объект автоматического управления должен обладать свойством пространственной инвариантности. Пусть имеется распределенный объект, математическая модель которого описывается уравнениями:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} = L_i\left(Q_i;\frac{\partial Q_i}{\partial x};...;\frac{\partial^{n_1} Q_i}{\partial x^{n_1}};\frac{\partial Q_i}{\partial y};...;\frac{\partial^{n_2} Q_i}{\partial y^{n_2}};\frac{\partial Q_i}{\partial z};...;\frac{\partial^{n_3} Q_i}{\partial z^{n_3}}\right),\quad x,y,z\in V,\quad \left(i=\overline{1,n}\right),$$

где $Q_i(x,y,z,t)$ – фазовые переменные $\left(i=\overline{1,n}\right)$; x,y,z – пространственные координаты; t – время; V – пространство изменения переменных x,y,z; n,n_1,n_2,n_3 – заданные целые числа; L_i – линейные операторы. Пусть входное воздействие представлено в виде ряда:

$$u_\mu(x,y,j\omega t)=\sum_{\eta,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi=1}^{4}C_{\mu,\eta,\gamma,\xi}(j\omega t)\cdot B_{\mu,\eta,\gamma,\xi}(x,y),\ \left(\mu=\overline{1,m}\right).$$

Объект автоматического управления, представленный в указанной форме, называется пространственно-инвариантным, если комплексный передаточный коэффициент по каждой составляющей входного воздействия не зависит от пространственных координат. На физическом уровне это означает, что составляющая входного воздействия, проходя через объект управления, изменяет только амплитуду пространственной моды. На математическом уровне – собственные функции оператора объекта могут быть представлены в виде комбинации $\sin(\cdot)$ и $\cos(\cdot)$, функциями вида $B_{\mu,\eta,\gamma,\xi}(x,y)$. Линейная часть системы является устойчивой. Пусть передаточная функция по η,γ,ξ $\left(\eta,\gamma=\overline{1,\infty};\ \xi=\overline{1,4}\right)$ контуру управления имеет вид:

$$W_{\eta,\gamma,\xi}(s)=\frac{\Pi_{\eta,\gamma,\xi}(s)}{M_{\eta,\gamma,\xi}(s)},$$

где

$$\Pi_{\eta,\gamma,\xi}(s)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\Pi_{\eta,\gamma,\xi,\nu}(s),\quad M_{\eta,\gamma,\xi}(s)=\sum_{\mu=1}^{\infty}M_{\eta,\gamma,\xi,\mu}(s)$$

целые аналитические функции. Характеристическое уравнение по η,γ,ξ $\left(\eta,\gamma=\overline{1,\infty};\ \xi=\overline{1,4}\right)$ имеет вид: $\sum_{\mu=1}^{\infty}M_{\eta,\gamma,\xi,\mu}(s)=0$, $\left(\eta,\gamma=\overline{1,\infty};\ \xi=\overline{1,4}\right)$.

В результате решения этого уравнения определяется свободное движение в каждом контуре системы управления, которое может быть определено из следующего соотношения:

$$Q_{\eta,\gamma,\xi}(t)=\sum_{\mu=1}^{\infty}A_{\eta,\gamma,\xi,\mu}\cdot\exp\left(\lambda_{\eta,\gamma,\xi,\mu}\cdot t\right),\ \left(\eta,\gamma=\overline{1,\infty};\ \xi=\overline{1,4}\right),$$

где $\lambda_{\eta,\gamma,\xi,\mu}$ $\left(\eta,\gamma=\overline{1,\infty};\ \xi=\overline{1,4};\ \mu=\overline{1,\infty}\right)$ – корни характеристического уравнения; $A_{\eta,\gamma,\xi,\mu}$ $\left(\eta,\gamma=\overline{1,\infty};\ \xi=\overline{1,4};\ \mu=\overline{1,\infty}\right)$ – постоянные числа, определяемые начальными условиями. В силу того, что контуры системы управления независимы, свободное движение всей системы будет складываться из суммы свободных движений в каждом контуре системы управления, умноженных на соответствующие пространственные моды.

$$Q(x,y,t)=\sum_{\eta,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi=1}^{4}\sum_{\mu=1}^{\infty}A_{\eta,\gamma,\xi,\mu}\cdot\exp\left(\lambda_{\eta,\gamma,\xi,\mu}\cdot t\right)\cdot B_{\eta,\gamma,\xi}(x,y).$$

Заключение. Рассматриваемая система с распределенными параметрами является устойчивой, если $\lim\limits_{t\to\infty}Q(x,y,t)=0$. В работах И.М. Першина доказано утверждение, что для устойчивости системы с распределенными параметрами, свободное движение которой представляется, достаточно, чтобы все корни $\lambda_{\eta,\gamma,\xi,\mu}$ имели отрицательные действительные части. Таким образом, для устойчивости пространственно-инвариантной системы достаточно, чтобы каждый контур был асимптотически устойчив [9, 10].

Нелинейная характеристика, зависящая от пространственных координат, может быть представлена в виде разложения в ряд Фурье по пространственным координатам [11, 12]. Пусть нелинейный элемент задается функцией $z=\varphi(\sigma)$, которая значению $\sigma(x,y,t)$ входного сигнала ставит в соответствие значение $z(x,y,t)$ выходного сигнала звена, т.е. $z(x,y,t)=\varphi(\sigma(x,y,t))$. Пусть задано изображение по Лапласу при нулевых начальных условиях входного воздействия $\sigma(x,y,s)$. Входное воздействие должно быть представимо в виде ряда:

$$\sigma(x,y,s)=\sum_{\eta,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi=1}^{4}C_{\eta,\gamma,\xi}(s)\cdot B_{\eta,\gamma,\xi}(x,y).$$

При выполнении указанных условий возможно применение метода гармонической линеаризации для исследования определенного класса нелинейных систем с распределенными параметрами.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Першин И.М.* Синтез распределенных систем управления // Теоретические и прикладные проблемы создания систем управления технологическими процессами: Тез. докл. Всес. науч.-техн. конф. – М., 1990. – С. 139-140.
2. *Курейчик В.М.* Особенности построения систем поддержки принятия решений // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2012. – № 7 (132). – С. 92-98.
3. *Минкина Т.В.* Синтез системы управления температурными полями кольцевой роторной печи // Вестник ДГТУ. – 2009. – Ч. 1. – Т. 9. – С. 164-170.
4. *Чернышев А.Б.* Управление температурными полями объектов с распределенными параметрами // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 314, № 4. – С. 24-27.
5. *Першин И.М.* Синтез систем с распределенными параметрами. – Пятигорск: Изд-во РИА-КМВ, 2002. – 212 с.
6. *Першин И.М.* Частотный метод синтеза регуляторов для систем с распределенными параметрами // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. науч. сб. – Саратов, 1984. – С. 70-84.
7. *Чернышев А.Б.* Модифицированный критерий абсолютной устойчивости нелинейных распределенных систем управления // Изввестия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. – 2009. – № 3 (151). – С. 38-41.
8. *Рапопорт Э.Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2003. – 299 с.
9. *Рапопорт Э.Я.* Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2005. – 292 с.
10. *Григорьев В.В., Быстров С.В., Першин И.М.* Синтез распределенных регуляторов – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2010. – 198 с.

11. *Малков А.В., Першин И.М.* Системы с распределенными параметрами. – М.: Научный мир, 2012. – 532 с.
12. *Чернышев А.Б.* Адаптация частотного критерия абсолютной устойчивости к системам с распределенными параметрами // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2009. – № 7. – С. 13-18.

REFERENCES

1. *Pershin I.M.* Sintez raspredelennykh sistem upravleniya [Synthesis of distributed control systems], *Teoreticheskie i prikladnye problemy sozdaniya sistem upravleniya tekhnologicheskimi protsessami: Tez. dokl. Vses. nauch.-tekhn. konf.* [Theoretical and applied problems of the development of control systems by technological processes: abstracts of the all-Union scientific-technical conference]. Moscow, 1990, pp. 139-140.
2. *Kureychik V.M.* Osobennosti postroeniya sistem podderzhki prinyatiya resheniy [Features of construction of systems of support of decision making], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2012, No. 7 (132), pp. 92-98.
3. *Minkina T.V.* Sintez sistemy upravleniya temperaturnymi polyami koltsevoy rotornoy pechi [Synthesis of a control system of temperature fields circular rotary furnace], *Vestnik DGTU* [Vestnik of Don State Technical University], 2009, Part 1, Vol. 9, pp. 164-170.
4. *Chernyshev A.B.* Upravlenie temperaturnymi polyami obektov s raspredelennymi parametrami [Control of temperature fields of objects with distributed parameters], *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of Tomsk Polytechnic University], 2009, Vol. 314, No. 4, pp. 24-27.
5. *Pershin I.M.* Sintez sistem s raspredelennymi parametrami [Synthesis of systems with distributed parameters]. Pyatigorsk: Izd-vo RIA-KMV, 2002, 212 p.
6. *Pershin I.M.* Chastotnihy metod sinteza regulyatorov dlya sistem s raspredelennymi parametrami [Frequency method of synthesis of regulators for systems with distributed parameters], *Analiticheskie metody sinteza regulyatorov: Mezhvuz. nauch. Sb* [Analytical methods of synthesis of controllers: interuniversity collection of scientific works]. Saratov, 1984, pp. 70-84.
7. *Chernyshev A.B.* Modifitsirovannyy kriteriy absolyutnoy ustoychivosti nelineynykh raspredelennykh sistem upravleniya [Modified criterion of absolute stability of nonlinear distributed control systems], *Izvvestiya vuzov. Sev.-Kavk. region. Tekhnicheskie nauki* [Izvestia universities. Severo-Kavkazskii region. Technical Sciences], 2009, No. 3 (151), pp. 38-41.
8. *Rapoport Eh.Ya.* Strukturnoe modelirovanie obektov i sistem upravleniya s raspredelennymi parametrami [Structural modeling of objects and control systems with distributed parameters]. Moscow: Vihsshaya shkola, 2003, 299 p.
9. *Rapoport Eh.Ya.* Analiz i sintez sistem avtomaticheskogo upravleniya s raspredelennymi parametrami [Analysis and synthesis of control systems with distributed parameters]. Moscow: Vihsshaya shkola, 2005, 292 p.
10. *Grigorev V.V., Bystrov S.V., Pershin I.M.* Sintez raspredelennykh regulyatorov. Saint-Petersburg: SPbGU ITMO, 2010. 198 p.
11. *Malkov A.V., Pershin I.M.* Sistemy s raspredelennymi parametrami [Systems with distributed parameters]. Moscow: Nauchnihyj mir, 2012, 532 p.
12. *Chernyshev A.B.* Adaptatsiya chastotnogo kriteriya absolyutnoy ustoychivosti k sistemam s raspredelennymi parametrami [Adaptation of frequency criterion of absolute stability of systems with distributed parameters], *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie* [Mechatronics, Automation, Control], 2009, No. 7, pp. 13-18.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор И.М. Першин.

Зенкина Ольга Николаевна – Южный федеральный университет»; e-mail: olga.n72@mail.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 89896250925; кафедра дискретной математики и методов оптимизации; аспирантка.

Zenkina Olga Nikolaevna – Southern Federal University; e-mail: olga.n72@mail.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +79896250925; the department of discrete mathematics and optimization methods; postgraduate student.