УДК 519.178

А.А. Кочкаров, Л.И. Сенникова, Р.А. Кочкаров

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ГРАФОВ ДЛЯ КОНСТРУИРОВАНИЯ АЛГОРИТМОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОДВИЖНЫХ АБОНЕНТОВ*

Введено понятие динамического графа. Динамический граф определяется как последовательность «классических» (стационарных) графов, переход между которыми осуществляется сложными и простыми операциями. Последовательность графов образует траекторию динамического графа. Продемонстрировано, что предфрактальные (фрактальные) графы в соответствии с их определением являются частным случаем (подклассом) динамических графов. Рассмотрены некоторые свойства динамических графов. Динамический граф в настоящей работе представлен как модель динамической сети, т.е. сети с изменяемой топологией связи между ее абонентами. Поскольку одной их ключевых метрических характеристик графов является диаметр, также представлены строго обоснованные условий сохранения диаметра в траектории динамического графа при заданной операции перехода. В качестве такой операции используется присоединение к графу новой вершины одним или несколькими ребрами. Приведена интерпретация гипотезы о «шести рукопожатиях» с позиции динамической теории графов. Для «идеализированного» случая предложено обоснование этой гипотезы. В контексте сохранения метрических характеристик рассмотрен вопрос наследственности в траектории динамического графа. Показано, что при использовании предложенных операций для переходов в траектории динамического графа диаметр может сохранять свою величину в определенном диапазоне, вне зависимости от роста количества вершин графа. Это важное свойство получило применение для конструирования алгоритмов взаимодействия подвижных абонентов, когда требуется сохранение связности в топологии сети и сохранение (не увеличение) диаметра сети. Настоящая работа призвана продемонстрировать возможности зарождающейся динамической теории графов, как теоретической основы и для конструирования алгоритмов взаимодействия подвижных абонентов, и для изучения сложных сетей различного физического и технического происхождения.

Динамические графы; динамические сети; сетевые системы; диаметр графа; гипотеза о «шести рукопожатиях»; сети подвижных абонентов.

A.A. Kochkarov, L.I. Sennikova, R.A. Kochkarov

SOME FEATURES OF DYNAMIC GRAPHS APPLICATIONS FOR CONSTRUCTION OF MOBILE AGENTS INTERACTION ALGORITHMS

The concept of dynamic graph is introduced in the paper. Dynamic graph is defined as a sequence of "classic" (stationary) graphs, the transition between which are the complex and simple operations. The sequence of graphs forms a trajectory of the dynamic graph. Demonstrated that prefractal (fractal) graphs according to their definition are special case (sub-class) of dynamic graphs. Some properties of the dynamic graphs are reviewed. Dynamic graph is presented in this paper as a model of dynamic network, i.e. network that changes topology of relationships between its subscribers. Since one of the key metric characteristics of graphs is the diameter, strictly justified conditions for save diameter in the trajectory of the dynamic graph with the transit operation are presented also in the paper. As this operation, connection to graph a new vertex by one or more ribs is used. The interpretation of the hypothesis of "six handshakes" is shown from a position of dynamic theory of graphs. Justification of this hypothesis is suggested for "idealized" case. The question of inheritance in the trajectory of the dynamic graph is considered in context of preserving the metric characteristics. It is shown that diameter is able to maintain its value in a certain range with using proposed operations for transitions in the trajectory of dynamic graph, re-

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 13-01-00617 а).

gardless of growth the number of the graph vertices. This important property has been applied widely to construct interaction algorithms of mobile agents when preservation of connectivity in network topology and preservation (not increase) the diameter of the network are required. The present work aims to demonstrate the potential of the emerging dynamic graph theory as a theoretical basis and for design algorithms for interaction of mobile agents, and to study complex networks of different physical and technical backgrounds.

Dynamic graphs; dynamic network; network systems; the diameter of the graph; hypothesis of "six handshakes"; network to the mobile users.

Определение динамического графа. Понятие динамических сетей (Dynamic networks) [1] широко используется при изучении сложных структурно-изменяющихся сетей различной природы и происхождения. К динамическим сетям относят и социальные сети [2], и сети связи [3, 4] и коллективного взаимодействия [5], и структуры фондовых рынков [6], и структуры взаимных обязательств межбанковской системы [7]. Несмотря на накопленный эмпирический материал по изучению динамических сетей, еще нет существенных оснований говорить об окончательно сложившейся теории динамических сетей (Dynamic network analysis) или сетевой науки (Network science). Для формирования такой отрасли прикладной науки необходима теоретическая основа. Ядром такой платформы имеет шансы стать зарождающаяся динамическая теория графов, основным объектом которой является динамический граф – модель динамической сети.

Динамический граф Γ, как модель динамической сети, представляет собой последовательность «классических» графов G_l, не имеющих параллельных ребер и петель, переход между которыми описывается различными теоретико-графовыми операциями $\varphi(G_l) = G_{l+1}$ (удаление/ добавление ребра [8], удаление/добавление вершины [8], замена вершины затравкой [9], приоритетное присоединение вершин и ребер [10] и т.д.).

Операции удаления/добавления ребра, удаления/добавления вершины будем назвать *простыми* или *базовыми*. Любую другую операцию, которую можно описать чередованием простых операций, будем называть *сложными*. В общем случае динамический граф представляет собой последовательность конечных невзвешенных (не всегда связных) графов – $G_1, G_2, \ldots, G_l, \ldots, G_L, \ldots$, в которой переход к последующему графу G_{l+1} осуществляется операцией $\varphi(G_l) = G_{l+1}$. Операция, осуществляющая переход, может быть как простой, так и сложной. Для построения траектории динамического графа могут быть использованы несколько (конечное множество) чередующихся операций $\Phi = \{\varphi^t\}$. Также в операции может быть определен механизм выбора элементов графа (ребра, вершины, подграфы), над которыми совершается заданная операция и периодичность применения операции $\varphi^t \in \Phi$ для порождения динамического графа. Последовательность графов $G_l = (V_l, E_l)$, $l = 1,2,\ldots,L,\ldots$, составляющая динамический граф, будем называть *траекторией динамического графа* Γ. Процесс построения траектории динамического графа будем называть процессом порождения.

Следующие ниже очевидные утверждения призваны продемонстрировать применение введенных понятий.

Утверждение 1. Траектория динамического графа Γ является бесконечной, если $\varphi(V_l) \neq V_l$, $l = 1,2,\ldots,L,\ldots$.

Утверждение 2. На множестве всех полных n-вершинных простых цепей $\{P_n\}$, $n \geq 2$, существует динамический граф Γ с бесконечной траекторией $P_2, P_3, \ldots, P_l, \ldots, P_L, \ldots$, у которого операция $\varphi(P_l) = P_{l+1}$, $l = 2,3,\ldots,L\ldots$, определяется как добавление одной вершины, смежной с одной из висячих вершин графа P_l.

Утверждение 3. На множестве всех полных n-вершинных простых циклов $\{C_n\}$, $n \geq 3$, существует динамический граф Γ с бесконечной траекторией $C_3, C_4, \ldots, C_l, \ldots, C_L, \ldots$, у которого операция $\varphi(C_l) = C_{l+1}$, $l = 3,4,\ldots,L\ldots$, определяется как удаление одного ребра, и последующим добавлением одной вершины, смежной с обеими висячими вершинами графа P_l.

Утверждение 4. На множестве всех полных n-вершинных графов $\{K_n\}$ существует динамический граф Γ с бесконечной траекторией $K_1, K_2, \ldots, K_l, \ldots, K_L, \ldots$, у которого операция $\varphi(K_l) = K_{l+1}$, $l = 1,2,\ldots,L,\ldots$, определяется как добавление одной вершины и инцидентных с ней $(l+1)$-го ребра.

Утверждение 5. Если операции перехода $\varphi(G_l) = G_{l+1}$ динамического графа не использует простую операцию добавления вершины, то динамический граф конечен.

Одним из частных случаев динамического графа является фрактальный граф [9]. Определение *фрактального (предфрактального) графа* базируется на сложной операции, называемой *заменой вершины затравкой (ЗВЗ)*. Суть операции ЗВЗ заключается в следующем. В данном графе $G = (V, E)$ у намеченной для замещения вершины $\tilde{v} \in V$ выделяется множество $\tilde{V} = \{\tilde{v}_j\} \subseteq V$, $j = 1,2,\ldots,|\tilde{V}|$, смежных ей вершин. Далее из графа G удаляется вершина $\tilde{v}$ и все инцидентные ей ребра. Затем каждая вершина $\tilde{v}_j \in \tilde{V}$, $j = 1,2,\ldots,|\tilde{V}|$, соединяется ребром с одной из вершин затравки $H = (W, Q)$. Вершины соединяются произвольно (случайным образом) или по определенному правилу, при необходимости.

Заменяя каждый раз в построенном на предыдущем этапе $l = 1,2,\ldots,L-1$ графе G_l каждую его вершину затравкой H, получаем траекторию предфрактального графа. На этапе $l = 1$ предфрактальному графу соответствует затравка $G_1 = H$. Фрактальный граф Γ определяется бесконечной траекторией. Фрактальный граф является бесконечным графом [11], поскольку его операция перехода $\varphi(G_l) = G_{l+1}$ предполагает только увеличение количества вершин V_l и количества ребер E_l в траектории.

Возможны и другие варианты построения фрактальных графов, когда затравкой замещается не вершины, а ребро [12–13].

О наследственных свойствах динамических графах. Если в классической теории графов ключевой экстремальной задачей является поиск подграфа (или остова) с заданными характеристиками (например, поиск дерева минимального веса), то для динамической теории графов основная задача – установление связи между решениями экстремальной задачи на различных «классических» («стационарных») графах, составляющих динамических граф. Если решения на различных графах сопоставимы по заданным критериям, то можно говорить о свойстве *наследственности в классе динамических графов*, объединенных общими правилами перехода в образующих их последовательностях графах. Логичным продолжением этой задачи становится задача установления формализованной связи между свойством наследственности и операциями перехода в траектории, образующими динамический граф. В случае установления такой связи можно говорить о программируемой самоорганизации [14], т.е. получения гарантированных наследственных структурных свойств и характеристик динамических графов.

Лемма 1. Для динамического графа Γ, операция перехода $\varphi(G_l) = G_{l+1}$, $l = 1,2,\ldots,L\ldots$, которого в траектории определена как присоединение единственной вершины к любой непериферийной [8] вершине графа G_l, диаметр $d(G_l) = d(G_1)$ [8] остается неизменным, если в G_1 есть хотя бы она непериферийная вершина.

Следствие 1.1. Для динамического дерева Γ, операция перехода $\varphi(D_l) = D_{l+1}$, $l = 1,2,\ldots,L\ldots$, которого в траектории определена как присоединение единственной вершины к любой невисячей [8] вершине дерева D_l, диаметр $d(D_l) = d(D_1)$ остается неизменным.

Примечание 1.1. Граф G_1 в траектории динамического графа Γ может быть таковым, что все его вершины будут периферийными. Примером такого графа является полный граф. В такой ситуации применение операции из леммы 1 невозможно.

Теорема 1. Для динамического графа Γ, операция перехода $\varphi(G_l) = G_{l+1}$, $l = 1,2,\ldots,L\ldots$, которого в траектории определена как присоединение новой вершины к любому количеству непериферийных вершин графа G_l, диаметр $d(G_l) \geq d(G_1)$ не увеличивается, если в G_1 есть хотя бы она непериферийная вершина.

Теорему 1 можно рассмотреть как абстрактное объяснение известной гипотезы Стэнли Милгрема о «шести рукопожатиях» [14]. Суть этой гипотезы заключается в том, что два жителя Земли опосредованно связаны между собой не более чем шестью знакомствами. Эта гипотеза была экспериментально подтверждена для различных социальных сетей [15–16], т.е. для различных сообществ людей. Структура связей таких сообществ представляется в виде графа, а изменение структуры можно описать простыми теоретико-графовыми операциями. Таким образом, модель роста социальных сетей может быть представлена в виде динамического графа. На настоящий момент не существует строгого аналитического обоснования гипотезы «шести рукопожатий». С точки зрения теории графов граф социальной сети – это граф, значительная часть расстояний между его вершинами находятся около шести. Свойство «шести рукопожатий» социальной сети сохраняется при ее формирования, и эволюции. Поэтому и динамический граф, моделирующий социальную сеть, также сохраняет это свойство в траектории. В идеализированном, упрощенном представлении динамический граф социальной сети должен сохранять свой диаметр в ближайшей окрестности шести. Или упрощая далее, динамический граф должен сохранять свой диаметр в траектории неизменным. Теорема 1 предлагает простой механизм, гарантирующий сохранение изначального диаметра, но не объясняет, почему гипотеза Стэнли Милгрема основана имена на «шести рукопожатиях».

Некоторые инженерные приложения динамической теории графов. Идеология и методы динамической теории графов особенно полезны при конструировании командно-информационного взаимодействия подвижных абонентов в сетевых системах [17]. Сетевые системы следует понимать как технические системы, в основе функционирования которых лежать сети. В этом смысле сетевые системы – больше инженерное понятие, чем строгое математическое.

История развития беспроводных сетей показывает, что область применения этого раздела телекоммуникационных технологий расширяется. В настоящем беспроводные сети превосходят проводные аналоги в безопасности, стоимости, устойчивости, функциональности, комфортности применения. Тем не менее, спектр задач, связанный с новыми приложениями беспроводных технологий и беспроводных сетей, устойчиво расширяется. Здесь следует очертить две основных области приложения беспроводных сетей – телекоммуникации и мониторинг. В «больших» системах беспроводные сети могут выполнять одновременно и функции передачи информации, и функции мониторинга.

Особый интерес представляют сети с подвижными абонентами (датчиками, сенсорами). Обеспечение качественной связи в таких сетях – чрезвычайно актуальная задача. Решение этой задачи повысит связность и скорость передачи информации между мобильными абонентами, сократит затраты на наземный сегмент сети за счет маршрутизации и ретрансляции между подвижными узлами. Трудоемкость этой задачи растет с увеличением количества абонентов сети. При этом очевиден тот факт, что наибольшей эффективности работы систем можно добиться при помощи скоординированных действий абонентов сети. В последнее десятилетие в трудах зарубежных и отечественных теоретиков все чаще можно встретить разработки в областях, связанных с совершенно новой концепцией организации действий. Вместе с тем подавляющая часть существующих алгоритмов сетевого взаимодействия имеют очень ограниченную область приложения, по сути, представляя собой конкретные инженерные решения.

Зарождающаяся динамическая теория графов может стать теоретической базой для конструирования алгоритмов командно-информационного взаимодействия подвижных абонентов в сетевых системах. Топология сети подвижных абонентов не может быть строго фиксированной. Более того топология вынуждена претерпевать изменения в силу различных обстоятельств, например, увеличение количества абонентов в сети. Поскольку передача информации в сети зависит от длины цепочки абонентов, то разумно при увеличении абонентов в сети не допускать увеличение его диаметра при присоединении каждого нового абонента. Это можно сделать, следуя алгоритму, сконструированному в самом тривиальном случае согласно требованиям леммы 1.

Доказательство лемм и теорем

Доказательство леммы 1.

А) Рассмотрим простую n-вершинную цепь $C_n = (V^{C_n}, E^{C_n})$. Очевидно, что длина единственной диаметральной цепи графа C_n равна $n-1$. Обе периферий вершины графа C_n совпадают с его висячими вершинами. Поэтому присоединение одной вершины к любой из периферийных вершин графа C_n приведет к графу C_{n+1}, который в свою очередь также состоит из единственной диаметральной цепи длины n. Как известно диаметр графа $d(G) = \max_{v \in V} \varepsilon(v)$ [8], в свою очередь эксцентриситет $\varepsilon(v) = \max_{u \in V} \rho(v,u)$ [8], где $\rho(v,u)$ – расстояние между вершинами $v \in V$ и $u \in V$ графа $G = (V,E)$. Очевидно, что для любой непериферийной вершины $w \in V^{C_n}$ ее эксцентриситет $\varepsilon(w) \le n-2$.

Поэтому для графа $G_2 = (V_2, E_2) = \varphi(C_n)$, где φ операция из условия леммы 1, вершина $v' \in V_2$, такая что $G_2 - v' = C_n$, и смежная с любой из невисячих вершин графа C_n будем иметь эксцентриситет $\varepsilon(v') \le n-1$. А значит и диаметр $d(G_2) = d(\varphi(C_n)) = d(C_n) = n-1$

Б) Утверждение, обоснованное в пункте А) настоящего доказательство будет верным и для любой диаметральной цепи произвольного графа G_1. Но только в том случае, если присоединяемая вершина не будет смежной никакой из периферийных вершин графа G_1. Это позволит сохранить диаметр для всех графов G_l, $l = 1,2,\ldots,L\ldots$, из траектории динамического графа Γ. Доказательство леммы 1 окончено.

Доказательство следствия 1.1.

Для всякого дерева D только висячие вершины могут являться периферийными, поскольку эксцентриситет [8] висячей вершины будет всегда больше эксцентриситетов смежных с ней вершин. Поэтому для динамического дерева применение операции перехода $\varphi(D_l) = D_{l+1}$, $l = 1,2,\ldots,L\ldots$ из условия леммы 1 к невисячим вершинам приводит к сохранению диаметра на всей траектории. Доказательство следствия 1.1 окончено.

Доказательство теоремы 1.

А) Рассмотрим, как и ранее простую n-вершинную цепь $C_n = (V^{C_n}, E^{C_n})$, совпадающую со своей единственной диаметральной цепью длины $n-1$.

Пусть вершины $v' \in V^{C_n}$ и $v'' \in V^{C_n}$ – периферийные вершины графа C_n, которые, напомним, также являются единственными висячими вершинами графа C_n. Пусть вершины $u' \in V^{C_n}$ и $u'' \in V^{C_n}$ – две несмежные непериферийные вершины графа C_n. Расстояние между этими вершинами, очевидно, $\rho(u', u'') \ge 2$. Присоединим новую w вершину к графу C_n так, что вершина в новом графе $C_n + w$ будет смежной с вершинами u' и u''. Поскольку вершины u' и u'' в графе $C_n + w$ являются концами цепи (u', w, u''), длина которой ввиду смежности вершины w с вершинами u', u'', и условия $\rho(u', u'') \ge 2$, будет теперь $\rho(u', u'') = 2$. Поэтому длина диаметральной цепи графа $C_n + w$ не больше длины диаметральной цепи графа C_n, иначе $d(C_n + w) \le d(C_n)$. Рассуждая аналогично, можно показать, что $d(C_n + w) = d(C_n)$, если вершина присоединяется к графу C_n, так что становится смежной с двумя смежными между собой непериферийными вершинами. Оба варианта присоединения вершины w к графу C_n не увеличивают его диаметр.

Б) Пусть теперь граф $C_n + w$ получен из графа C_n присоединением вершины w таким образом, что оказалась смежной с m произвольными непериферийными вершинами $u_1, u_2, \ldots, u_m$ графа C_n, при этом $m \le n-2$. В соответствии с пунктом А) настоящего доказательства вне зависимости от взаимного расположения вершин $u_1, u_2, \ldots, u_m$, т.е. от расстояния между ними, присоединение вершины w не увеличит эксцентриситеты вершин графа $C_n \subseteq C_n + w$, а $\varepsilon(w) \le n-2$. Поэтому $d(C_n + w) \le d(C_n)$.

В) Рассмотрим динамический граф Γ, операция перехода $\varphi(G_l) = G_{l+1}$, $l = 1,2,\ldots,L\ldots$, которого определена в соответствии с условием теоремы 1. Для всякой диаметральной цепи графа G_l будет справедлив результат пункта Б) настоящего доказательства. Поэтому $d(G_l) \geq d(G_{l+1})$, а значит $d(G_l) \geq d(G_1)$. Доказательство теоремы 1 окончено.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Westaby J.D.* Dynamic Network Theory: How Social Networks Influence Goal. American Psychological Association, 2011. – 279 p.
2. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. – М.: Физматлит, 2010. – 228 с.
3. *Кучерявый А.Е., Прокопьев А.В., Кучерявый Е.А.* Самоорганизующиеся сети. – СПб.: Изд-во «Любавич», 2011. – 311 с.
4. *Голдсмит А., Медар М., Эффрос М.* Самоорганизующиеся беспроводные сети // В мире науки. – 2012. – № 6. – С. 76-81.
5. *Шерешева М.Ю.* Формы сетевого взаимодействия компаний. Курс лекций. – М.: Изд. дом Гос. ун-та – Высшей школы экономики, 2010. – 339 с.
6. *Визгунов А.Н., Гольденгорин Б.И., Замараев В.А., Калягин В.А., Колданов А.П., Колданов П.А., Пардалос П.М.* Применение рыночных графов к анализу фондового рынка России // Журнал Новой экономической ассоциации. – 2012. – № 3 (15). – С. 66-81.
7. *Georg C.* The effect of the interbank network structure on contagion and common shocks // Journal of Banking & Finance. – 2013.
8. *Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.* Лекции по теории графов. – М.: УРСС, 2009. – 392 с.
9. *Кочкаров А.А.* Структурная динамика: свойства и количественные характеристики предфрактальных графов. – М.: Вега-Инфо, 2012. – 120 с.
10. *Подлазов А.В., Щетинина Д.П.* Модель роста социальной сети // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2013. – № 95. – 16 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-95.
11. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977. – 208 с.
12. *Krön B.* Growth of self-similar graphs // J. Graph Theory. – 2004. – № 45(3). – P. 224-239.
13. *Rozenfeld H.D., Gallos L.K, Song Ch., Makse H.A.* Fractal and Transfractal Scale-Free Networks. Mathematics of Complexity and Dynamical Systems. Edited by Robert A. Meyers. New York: Springer, 2012. – 1858 p.
14. *Milgram S.* The small world problem // Psychology Today. –1967. – № 2. –P. 60-67.
15. *Ахромеева Т.С. [и др.]*. Синергетика и сетевая реальность // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2013. – № 34. – 32 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-34.
16. *Митин Н.А., Подлазов А.В., Щетинина Д.П.* Исследование сетевых свойств Живого журнала // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2012. – № 78. – 16 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-78.
17. *Кочкаров А.А.* Моделирование структурно-динамических процессов в сетецентрических системах мониторинга // Антенны. – 2013. – № 1. – С. 164-168.

REFERENCES

1. *Westaby J.D.* Dynamic Network Theory: How Social Networks Influence Goal. American Psychological Association, 2011, 279 p.
2. *Gubanov D.A., Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Seti: modeli informatsionnogo vliyaniya, upravleniya i protivoborstva [Network: models of information influence, control and warfare]. Moscow: Fizmatlit, 2010, 228 p.
3. *Kucheryavyy A.E., Prokop'ev A.V., Kucheryavyy E.A.* Samoorganizuyushchiesya seti [Samoorganizuyuschejsya network]. St. Petersburg: Izd-vo «Lyubavich», 2011, 311 p.
4. *Goldsmit A., Medar M., Effros M.* Samoorganizuyushchiesya besprovodnye seti [Self-organizing wireless networks], *V mire nauki* [In the world of science], 2012, No. 6, pp. 76-81.

5. *Sheresheva M.Yu*. Formy setevogo vzaimodeystviya kompaniy. Kurs lektsiy [Forms of networking companies. A course of lectures]. Moscow: Izd. dom Gos. un-ta – Vysshey shkoly ekonomiki, 2010, 339 p.
6. *Vizgunov A.N., Gol'dengorin B.I., Zamaraev V.A., Kalyagin V.A., Koldanov A.P., Koldanov P.A., Pardalos P.M.* Primenenie rynochnykh grafov k analizu fondovogo rynka Rossii [The application of market-based graphs to the analysis of the Russian stock market], *Zhurnal Novoy ekonomicheskoy assotsiatsii* [Journal of the New economic Association], 2012, No. 3 (15), pp. 66-81.
7. *Georg C.* The effect of the interbank network structure on contagion and common shocks, *Journal of Banking & Finance,* 2013.
8. *Emelichev V.A., Mel'nikov O.I., Sarvanov V.I., Tyshkevich R.I.* Lektsii po teorii grafov [Lectures on the theory of graphs]. Moscow: URSS, 2009, 392 p.
9. *Kochkarov A.A.* Strukturnaya dinamika: svoystva i kolichestvennye kharakteristiki predfraktal'nykh grafov [Structural dynamics: properties and quantitative characteristics of prefractal graphs]. Moscow: Vega-Info, 2012, 120 p.
10. *Podlazov A.V., Shchetinina D.P.* Model' rosta sotsial'noy seti [The growth model of the social network] *Preprinty-IPM im. M.V. Keldysha* [Preprinted them. M.V. Keldysh], 2013, No. 95, 16 p. Available at: http://library.keldysh.ru/ preprint.asp?id=2013-95.
11. *Uilson R.* Vvedenie v teoriyu grafov [Introduction to graph theory]. Moscow: Mir, 1977, 208 p.
12. *Krön B.* Growth of self-similar graphs, *J. Graph Theory,* 2004, No. 45 (3), pp. 224-239.
13. *Rozenfeld H.D., Gallos L.K, Song Ch., Makse H.A.* Fractal and Transfractal Scale-Free Networks. Mathematics of Complexity and Dynamical Systems. Edited by Robert A. Meyers. New York: Springer, 2012, 1858 p.
14. *Milgram S.* The small world problem, *Psychology Today,*1967, No. 2, pp. 60-67.
15. *Akhromeeva T.S. [i dr.].* Sinergetika i setevaya real'nost' [Synergetics and network reality], *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha* [Keldysh Institute preprints them. M.V. Keldysh], 2013, No. 34, 32 p. Available at: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-34.
16. *Mitin N.A., Podlazov A.V., Shchetinina D.P.* Issledovanie setevykh svoystv Zhivogo zhurnala [The study of network properties LiveJournal], *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha* [Keldysh Institute preprints them. M.V. Keldysh], 2012, No. 78, 16 p. Available at: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-78.
17. *Kochkarov A.A.* Modelirovanie strukturno-dinamicheskikh protsessov v setetsentricheskikh sistemakh monitoringa [Modeling structural-dynamic processes in network-centric systems monitoring], *Antenny* [Antenna], 2013, No. 1, pp. 164-168.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н. А.О. Жуков.

Кочкаров Азрет Ахматович – ОАО «РТИ»; e-mail: akochkar@gmail.com; 127083, Москва, ул. 8 Марта, д. 10, стр. 1; тел.: 84957880007, доб. 3689; кафедра прикладной математики Финансового университета при Правительстве РФ; заместитель директора НТЦ-3; к.ф.-м.н.; доцент.

Сенникова Людмила Игоревна – Северо-Кавказский социальный институт; e-mail: s-ludhen@yandex.ru; 355012, Ставрополь, ул. Голенева, 59А; кафедра прикладной информатики и математики; старший преподаватель.

Кочкаров Расул Ахматович – Финансовый университет при Правительстве РФ; e-mail: RKochkarov@fa.ru; 125993, Москва, Ленинградский пр-т, 49; тел.: 84999223436; к.э.н.; зам. директора по информационным технологиям.

Kochkarov Azret Akhmatovich – JSC “RTI”; e-mail: akochkar@gmail.com; Moscow, 127083, 8 Marta str., 10, bild 1; phone: +74957880007, ad. 3689; applied mathematics department of the Financial University under the Government of the Russian Federation; vice-chief of R&D centre; cand. of phis.-math. sc.; associate professor.

Sennikova Ludmila Igorevna – North-Caucasian Social Institute; e-mail: s-ludhen@yandex.ru; 59A, Goleneva street, Stavropol, 355012, Russia; the department of applied informatics and mathematics; senior lecturer.

Kochkarov Rasul Akhmatovich – Financial University under the Government of the Russian Federation; e-mail: RKochkarov@fa.ru; 49, Leningradsky pr., Moscow, 125993, Russia; phone: +74999223436; vice-CIO.