22. *Pivnev V.V., Basan S.N., Voloshchenko Y.P*. The Application of Approximation Characteristics Non-Linear Resistor Implement the Required Current-Voltage Characteristics, *Proceedings of International Conference on Advances in Energy, Environment and Chemical Engineering (AEECE 2015), The proceedings series Advances in Engineering Research (AER) (ISSN 2352-5401) Amsterdam-Beijing-Paris:Atlantis Press, 2015*. Available at: http://dx.doi.org/10.2991 /aeece-15.2015.2.
23. *Alexander C., Sadiku M.* Fundamentals of Electric Circuits. Columbus, OH: McGraw-Hill Science, 2008, 935 p.
24. GOST 19880-74. Elektrotekhnika. Osnovnye ponyatiya. Terminy i opredeleniya [State Standard 19880-74. Electrical engineering. Basic concepts. Terms and definitions]. Moscow: Izd-vo standartov, 1974, 34 p.
25. GOST R 52161.1-2004. Bezopasnost' bytovykh i analogichnykh elektricheskikh priborov [State Standard R 52161.1-2004. Safety of household and similar electrical appliances]. Moscow: IPK Izd-vo standartov, 2004, 96 p.
26. GOST R MEK 60745-1–2005. Mashiny ruchnye elektricheskie. Bezopasnost' i metody ispytaniy [State Standard R MEK 60745-1–2005. Machines manual electric. Safety and test methods]. Moscow: Standartinform, 2006, 89 p.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф-м.н., профессор А.И. Жорник.

Волощенко Петр Юрьевич – Южный федеральный университет; e-mail: petrvoloshchenko@mail.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371629; кафедра радиотехнической электроники; к.т.н.; доцент.

Волощенко Юрий Петрович – e-mail: yvoloshchenko@yandex.ru; тел.: 88634371694; кафедра электротехники и мехатроники; к.т.н.; доцент.

Мальков Станислав Борисович – e-mail: stiff@tgn.sfedu.ru; тел.: 88634371694; кафедра электротехники и мехатроники; к.т.н.; доцент.

Voloshchenko Peter Yurievich – Southern Federal University; e-mail: petrvoloshchenko@mail.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371617; the department of radioengineering electronics; cand. of eng. sc.; associate professor.

Voloshchenko Yuri Petrovich – e-mail: yvoloshchenko@yandex.ru; phone: +78634371694; the department of electrical engineering and mechatronics; cand. of eng. sc.; associate professor.

Malkov Stanislav Borisovich – e-mail: stiff@tgn.sfedu.ru; phone: +78634371694; the department of electrical engineering and mechatronics; cand. of eng. sc.; associate professor.

УДК 621.37; 575.3; 519-21.519-27

А.М. Макаров, А.С. Ермаков

ОПТИМАЛЬНЫЙ СОГЛАСОВАННЫЙ ФИЛЬТР ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛА НА ФОНЕ ШУМА С НЕИЗВЕСТНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ

К настоящему времени одной из нерешенных задач теории обнаружения сигналов является задача синтеза оптимального обнаружения сигналов на фоне шумов с полностью неизвестной автокорреляционной функцией. Особенно актуально решение такой задачи для обнаружения сложных широкополосных сигналов. В работе предложен подход, основанный на синтезе согласованного фильтра в пространстве сигналов интегрального преобразования Меллина исходной аддитивной смеси сигнала и шума. Как показано авторами в предыдущей работе эта возможность появляется на основании того факта, что корреляционная функция случайных процессов после интегрального преобразования Меллина инвариантна к виду исходной автокорреляционной функции. Приведены основные математические соотношения, доказывающие свойство инвариантности и приводится основная *теорема, результаты которой положены в основу данной работы. Доказательство этой теоремы показывает, что значение реальной части базисной функции ядра преобразования Меллина основывается на фундаментальном равенстве в теории обработки сигналов – равенстве Парсеваля. Ее значение равно ½. Далее, используя классический математический аппарат, синтезируется оптимальный в пространстве интегрального преобразования Меллина алгоритм согласованного фильтра и его структура. Приводится структурная схема оптимального согласованного фильтра. В качестве примера рассмотрено спектральное представление гармонического колебания в базисе интегрального преобразования Меллина. Показано, что спектральное плотность сигнала носит постоянный характер в спектре частот базиса Меллина. Изменение частоты исходного гармонического сигнала приводит к изменению амплитуды отклика на выходе преобразования Меллина. Получено спектральное представление отрезка гармонического колебания, имеющего конечную длительность. Таким образом, появляется возможность дальнейшего исследования свойств оптимального фильтра для сигналов с фазовой относительной телеграфией. Сигналы с фазовой манипуляцией широко применяются в большинстве современных систем передачи данных. Эти сигналы имеют наибольшую помехоустойчивость среди других манипулированных сигналов. В целом можно сделать вывод о создании нового научного направления в теории разработки нового поколения систем передачи информации, обладающими свойством инвариантности к виду корреляционной функции шума.*

Преобразования Меллина; априорная неопределенность о корреляционной функции шума; оптимальные согласованные фильтры; спектральная плотность мощности; равенство Парсеваля; теорема Виннера-Хинчина.

A.M. Makarov, A.S. Ermakov

OPTIMAL MATCHED FILTER FOR DETECTING THE SIGNAL AGAINST NOISE WITH THE UNKNOWN CORRELATION FUNCTIONS

To date, one of the unsolved problems of the theory of signal detection is the problem of synthesis of optimal signal detection in noise with completely unknown autocorrelation function. Especially true solution of this problem is the detection of complex wideband signals. In this article we propose an approach based on the synthesis of the matched filter in the signal space of the Mellin integral transform of the original additive mixture of signal and noise. As shown by the authors in a previous article this option appears on the basis of the fact that the correlation function of the random processes after integral Mellin transform is invariant to the form of the original autocorrelation function. The article presents the basic mathematical equations to prove the invariance property and is the main theorem, the results of which form the basis of this work. The proof shows that the value of the real part of the basic core functions of the Mellin transform based on the fundamental equality in signal processing theory – Parseval's equality. Its value is equal to ½. Next, using the classic mathematical apparatus of optimum synthesized in integral space of Mellin transform we matched filter algorithm and its structure. Block diagrams of the optimum matched filter is also provided. As an example, consider the spectral representation of harmonic vibrations in the basis of the integral Mellin transform. It is shown that the spectral density of the signal is permanent basis in the frequency spectrum Mellin. Changing the frequency of the harmonic signal source causes a change in amplitude of the response at the output of the Mellin transform. Received a spectral representation of a segment of harmonic oscillation having a finite duration. Thus, there is an opportunity for further study of the properties of the optimal filter for signals with a relative phase telegraphy. Phase shift keyed signals are widely used in most modern data transmission systems. These signals have the highest noise immunity among others manipulated signals. In general it can be concluded on the establishment of a new scientific direction in the theory of the development of a new generation of information transfer systems, possessing the property of invariance to the form of the correlation function of noise.

Mellin transform; aprioristic indeterminacy of the correlation function of the noise; optimal matched filters; power spectrum density; Parseval equality; theorem of Wiener-Hinchey.

Введение. Решение задачи синтеза оптимального обнаружения сигнала на фоне шума с неизвестной формой корреляционной функции рассматривалось в работах [1–5, 9, 10]. В результате проведенных исследований ее удалось решить с использованием методов оценки корреляционной функции или ее спектральной плотности мощности, что естественно не позволяет работать в реальном масштабе времени.

Постановка задачи. С появлением в современных системах связи широкополосных сигналов не удается привести спектральную плотность мощности шума к постоянной величине в полосе пропускания сигнала. Актуальность решения такой задачи увеличивается с появлением широкого класса сигналов со скачками частоты в современных системах обработки информации.

Выбор метода решения. Как показано в работах [6, 7], решение возможно в базисе интегрального преобразования Меллина [13–20]. Показано, что в этом базисе при интервале корреляции намного меньшим длительности анализируемой выборки, спектральная плотность мощности имеет вид

$$P(u) = \int_0^\infty B(\tau)d\tau \int_0^\infty \frac{\cos(uy)}{ch(y/2)}d\gamma, \tag{1}$$

где $B(\tau)$ – автокорреляционная функция шума.

На основе теоремы Виннера-Хинчина для корреляционной функции имеем:

$$R(y) = \frac{\tau_k\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(yt)}{ch(\pi t)}dt = \frac{\pi\tau_k\sigma}{ch\left(\frac{y}{2}\right)}, \tag{2}$$

где σ– среднеквадратичное отклонение шума; τ_k – интервал корреляции шума.

Из выражения (2) следует, что корреляционная функция шума поле преобразования Меллина инвариантна к виду исходной корреляционной функции шума.

Преобразование Меллина имеет вид

$$M(S) = \int_0^\infty p(t)\cdot t^{s-1}dt, \tag{3}$$

где $S = \frac{1}{2} + ju, u \in (-\infty;\infty)$.

Значения реальной части, S равное $\frac{1}{2}$, обосновывается из результатов следующей теоремы:

Теорема: Пусть $t^{k-1}f(t) \in L(0,\infty]$ в некоторой окрестности $(x-\sigma, x+\sigma)$ точки $t = x > 0$ имеем ограниченное изменение. Если $\sigma = \frac{1}{2}$, то будет выполняться равенство Парсеваля, если $\sigma > \frac{1}{2}$, то неравенство Бесселя ($\sigma_1 < \sigma \le \sigma_2$, область сходимости преобразования Меллина).

Для математических приложений значение σ определяет область сходимости интеграла преобразования Меллина. В обработке сигналов основополагающим является выполнение равенства Парсеваля, аналога закона о сохранении энергии. Поэтому необходимо и доказать условие выполнения равенства.

Доказательство:

Запишем выражение квадрат модуля

$$[\![M(S)]\!]^2 = \int_0^\infty\int_0^\infty t_1^{s-1}\cdot t_1^{s^*-1}f(t_1)f(t_2)dt_1dt_2,$$

где $*$ −знак комплексно-сопряженной величины;

$$f(t_1), f(t_2) \in L(0,\infty].$$

Тогда энергия $f(t)$ равна

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\![M(S)]\!]^2\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty t_1^{s-1}\cdot t_1^{s^*-1}f(t_1)f(t_2)dt_1dt_2ds = \int_0^\infty f^2(t)dt.$$

Пусть

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty} t_1^{s-1} t_1^{s^*-1} f(t_1) f(t_2) dt_1\right] ds = f(t_2).$$

Полагая, что условия перемены порядка интегрирования выполняются, имеем

$\Psi(t_1, t_2) f(t_1) dt_1 = f(t_2)$,

$\int \Psi(t_1, t_2) dt_1 = \int_0^{\infty} t_1^{s-1}\, t_2^{s^*-1} ds = 2\pi j t_1^{\sigma-1} \int_0^{\infty} t_1^{\sigma-1} f(t_1) \delta(lnt_1 - lnt_2) dt_1$,

где δ – дельта функция.

Сделав замену переменной $t_1 = e^{alnt}$, получим равенство:

$$2\pi j t_2^{2\sigma-1} f(t_2) = f(t_2),$$

которое выполняется при $\sigma = \frac{1}{2}$. Теорема доказана.

Моделью сигнала является аддитивная смесь полезного сигнала $S(t, \vec{\alpha})$ и шума:

$$Y(t) = S(t, \vec{\alpha}) + n(t), (4)$$

или $M\{y(t)\} = M\{S(t, \vec{\alpha})\} + M\{n(t)\}$, где $M\{.\}$ – операция преобразования Меллина.

$$\int_0^{\tau} y(t) t^{S-1} dt = \int_0^{\tau} S(t, \vec{\alpha}) t^{S-1} dt + \int_0^{\tau} n(t) t^{S-1} dt,$$

$$\int_0^{\tau} y(t) e^{(S-1)\ln t} d(t) = \int_0^{\tau} S(t, \vec{\alpha}) e^{(S-1)\ln t} + \int_0^{\tau} n(t) e^{(S-1)} d(t),$$

$$e^{(S-1)\ln t} = e^{\left(\frac{1}{2} + ju - 1\right)\ln t} = e^{-\frac{1}{2}\ln t} e^{ju \ln t} = \frac{1}{\sqrt{t}} (\cos u \ln t + j \sin u \ln t),$$

$$t^{S-1} = t^{\sigma-1+ju} = t^{\sigma-1} t^{ju} = \frac{1}{\sqrt{t}} (\cos u \ln t + j \sin u \ln t).$$

Тогда

$$\int_0^{\tau} \frac{y(t)}{\sqrt{t}} (\cos u \ln t + j \sin u \ln t) dt =$$

$$= \int_0^{\tau} \frac{S(t_1 \vec{\alpha})}{\sqrt{t}} (\cos u \ln t + j \sin u \ln t) dt + \int_0^{\tau} \frac{n(t)}{\sqrt{t}} (\cos u \ln t + j \sin u \ln t) dt.$$

Квадрат реальной части равен:

$$R_e^2 = \left(\int_0^{\tau} \frac{y(t)}{\sqrt{t}} \cos u \ln t\right)^2 = \left(\int_0^{\tau} \frac{S(t_1 \vec{\alpha})}{\sqrt{t}} \cos u \ln t + \int_0^{\tau} \frac{n(t)}{\sqrt{t}} \cos u \ln t\, dt\right)^2 =$$

$$= \left(\int_0^{\tau} \frac{S(t_1 \vec{\alpha})}{\sqrt{t}} \cos u \ln t\, dt\right)^2 +$$

$$+2 \int_0^{\tau} \frac{S(t_1 \vec{\alpha})}{\sqrt{t_1}} \cos u \ln t_1 \int_0^{\tau} \frac{n(t_2)}{\sqrt{t_2}} \cos u \ln t_2 dt_2 +$$

$$+ \left(\int_0^{\tau} \frac{n(t)}{\sqrt{t}} \cos u \ln \mathrm{t}\, dt\right)^2 =$$

$$= \int_0^{\tau} \frac{S(t_1 \vec{\alpha})}{\sqrt{t_1}} \cos u \ln t_1\, dt_1 \int_0^{\tau} \frac{S(t_2 \vec{\alpha})}{\sqrt{t_2}} \cos u \ln t_2\, dt_2 +$$

$$+ 2 \int_0^{\tau} \frac{S(t_1 \vec{\alpha})}{\sqrt{t_1}} \cos u \ln t_1 \int_0^{\tau} \frac{n(t_2 \vec{\alpha})}{\sqrt{t_2}} \cos u \ln t_2\, dt_2 +$$

$$+\int_0^\tau \frac{n(t_2)}{\sqrt{t_2}} \cos u \ln t_2 \, dt_2 =$$

$$= \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{S(t_1\vec{\alpha})S(t_2\vec{\alpha})}{\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}} \cos u \ln t_1 \cos u \ln t_2 \, dt_1 dt_2 +$$

$$+2\int_0^\tau \int_0^\tau \frac{S(t_1\vec{\alpha})n(t_2)}{\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}} \cos u \ln t_1 \cos u \ln t_2 \, dt_1 dt_2 +$$

$$+\int_0^\tau \int_0^\tau \frac{n(t_1)n(t_2)}{\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}} \cos u \ln t_1 \cos u \ln t_2 \, dt_1 dt_2. \quad (5)$$

Квадрат мнимой части равен

$$I_m^2 = \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{y(t_1)y(t_2)}{\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}} \sin \mathrm{u} \ln t_1 \sin \mathrm{u} \ln t_2 \, dt_1 dt_2 =$$

$$= \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{S(t_1\vec{\alpha})S(t_2\vec{\alpha})}{\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}} \sin u \ln t_1 \cdot \sin u \ln t_2 dt_1 dt_2 +$$

$$+2\int_0^\tau \int_0^\tau \frac{S(t_1\vec{\alpha})n(t_2)}{\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}} \sin u \ln t_1 \sin u \ln t_2 dt_1 dt_2 +$$

$$+\int_0^\tau \int_0^\tau \frac{n(t_1)n(t_2)}{\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}} \sin \mathrm{u} \ln t_1 \sin \mathrm{u} \ln t_2 \, dt_1 dt_2. \quad (6)$$

Модуль преобразования из (5) и (6) запишем в виде выражения

$$\sqrt{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^\tau \int_0^\tau \frac{y(t_1)y(t_2)}{\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}} \cos u \ln t_1 \cos u \ln t_2 \, dt_1 dt_2 + \\ \displaystyle+\int_0^\tau \int_0^\tau \frac{S(t_1\vec{\alpha})S(t_2\vec{\alpha})}{\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}} \sin u \ln t_1 \sin u \ln t_2 \, dt_1 dt_2 = \end{array}}$$

$$= \sqrt{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^\tau \int_0^\tau \frac{S(t_1\vec{\alpha})S(t_2\vec{\alpha})}{\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}} \cos u \ln t_1 \cos u \ln t_2 \, dt_1 dt_2 + \\ \displaystyle+2\int_0^\tau \int_0^\tau \frac{S(t_1\vec{\alpha})n(t_2\vec{\alpha})}{\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}} \cos u \ln t_1 \cos u \ln t_2 \, dt_1 dt_2 + \\ \displaystyle+\int_0^\tau \int_0^\tau \frac{n(t_1)n(t_2)}{\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}} \cos u \ln t_1 \cos u \ln t_2 \, dt_1 dt_2 \end{array}\right]^2 + \\ \left[\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^\tau \int_0^\tau \frac{S(t_1\vec{\alpha})S(t_2\vec{\alpha})}{\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}} \sin u \ln t_1 \sin u \ln t_2 \, dt_1 dt_2 + \\ \displaystyle+2\int_0^\tau \int_0^\tau \frac{S(t_1\vec{\alpha})n(t_1)}{\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}} \sin u \ln t_1 \sin u \ln t_2 \, dt_1 dt_2 + \\ \displaystyle+\int_0^\tau \int_0^\tau \frac{n(t_1)n(t_2)}{\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}} \sin u \ln t_1 \sin u \ln t_2 \, dt_1 dt_2. \end{array}\right]^2 \end{array}} \quad (7)$$

Для удобства дальнейшего анализа выражения (7) целесообразно воспользоваться модулем преобразования (4). Для него запишем:

$$|M[y(t)]| = M[y(t)] \cdot M^*[y(t)], \quad (8)$$

$$|M[y(t)]| = \int_0^\infty [S(t_1\vec{\alpha}) + n(t_1)] t_1^{S-1} dt_1 \cdot \int_0^\infty [S(t_2\vec{\alpha}) + n(t_2)] t_2^{S^*-1} dt_2 =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty [S(t_1\vec{\alpha})S(t_2\vec{\alpha}) + S(t_1\vec{\alpha})n(t_2) + n(t_1)S(t_2\vec{\alpha}) + n(t_1)n(t_2)] t_1^{S-1} t_2^{S^*-1} dt_1 dt_2 =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty S(t_1\vec{\alpha})S(t_2\vec{\alpha})\, t_1^{S-1} t_2^{S^*-1} dt_1 dt_2 + \int_0^\infty \int_0^\infty S(t_1\vec{\alpha})n(t_2)\, t_1^{S-1} t_2^{S^*-1} dt_1 dt_2 +$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty S(t_2\vec{\alpha})n(t_1)\, t_1^{S-1} t_2^{S^*-1} dt_1 dt_2 + \int_0^\infty \int_0^\infty n(t_1)n(t_2)\, t_1^{S-1} t_2^{S^*-1} dt_1 dt_2. \quad (9)$$

Последовательно вычисляем соотношение:

$$t_1^{S-1} t_2^{S^*-1} = t_1^{ju+\sigma-1} t_2^{-ju+\sigma-1} = (t_1 t_2)^{-1} \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{ju}, \text{при} \sigma = \frac{1}{2}.$$

Сделаем замену переменной

$$\frac{t_1}{t_2} = \beta, t_2 = \tau,$$

$$t_1 = t_2\beta = \tau \cdot \beta.$$

Якобиан преобразования

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\delta t_1}{\delta \tau} & \frac{\delta t_1}{\delta \beta} \\ \frac{\delta t_2}{\delta \tau} & \frac{\delta t_2}{\delta \beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta & \tau \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \beta \cdot 0 - \tau \cdot 1 = -\tau.$$

$$|I| = \tau.$$

$$|M[y(t)]| = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{S(t_1\vec{\alpha})S(t_2\vec{\alpha})}{\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}} e^{ju \ln(t_1/t_2)} dt_1\, t_2 +$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{S(t_1\vec{\alpha})n(t_2)}{\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}} e^{ju \ln(t_1/t_2)} dt_1\, t_2 +$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{S(t_2\vec{\alpha})n(t_1)}{\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}} e^{ju \ln(t_1/t_2)} dt_1\, t_2 + \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{n(t_1)n(t_2)}{\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}} e^{ju \ln(t_1/t_2)} dt_1\, t_2.$$

Тогда

$$|M[y(t)]| = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{S(\tau\beta, \vec{\alpha})S(\tau, \vec{\alpha})}{\sqrt{\tau^2\beta}} e^{juln\beta} |\tau| d\beta d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{S(\tau\beta, \vec{\alpha})n(\tau)}{\sqrt{\tau^2\beta}} e^{juln\beta} |\tau| d\beta d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{S(\tau, \vec{\alpha})n(\beta\tau)}{\sqrt{\tau^2\beta}} e^{juln\beta} |\tau| d\beta d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{n(\tau\beta)n(r)}{\sqrt{\tau^2\beta}} e^{juln\beta} |\tau| d\beta d\tau =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{S(\tau\beta, \vec{\alpha})S(\tau, \vec{\alpha})}{\sqrt{\beta}} e^{juln\beta} d\beta d\tau +$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{S(\tau\beta,\vec{\alpha})n(\tau)}{\sqrt{\beta}} e^{julnβ} d\beta d\tau +$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{S(\tau,\vec{\alpha})n(\beta\tau)}{\beta} e^{julnβ} d\beta d\tau +$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{n(\tau\beta)n(\tau)}{\sqrt{\beta}} e^{julnβ} d\beta d\tau.$$

Используя теорему Фубини, получим:

$$|M[y(t)]| = \int_0^\infty \frac{e^{julnβ}}{\beta}\int_0^\infty S(\tau\beta,\vec{\alpha})S(\tau,\vec{\alpha})d\tau)d\beta +$$

$$+\int_0^\infty \frac{e^{julnβ}}{\sqrt{\beta}}\int_0^\infty S(\tau\beta,\vec{\alpha})n(\tau)d\tau\, d\beta +$$

$$+\int_0^\infty \left(\frac{e^{julnβ}}{\sqrt{\beta}}\int_0^\infty S(\tau,\vec{\alpha}\right)n(\beta\tau)d\tau d\beta +$$

$$+\int_0^\infty \frac{e^{julnβ}}{\sqrt{\beta}}\int_0^\infty n(\tau\beta)n(\tau)\, d\tau d\beta.$$

При условии, что $m[n(t_1)] = m[n(t_2)] = 0$, и шум не коррелирован сигналом, имеем

$$y(u)=S(u) + h(u),$$

$$S(u) = \int_0^\infty\int_0^\infty S(t_1)\, S(t_2) t_1^{ju+\sigma-1} t_2^{-ju+\sigma-1} dt_1 dt_2, \quad (10)$$

где

$$h(u) = \int_0^\infty\int_0^\infty n(t_1)\, n(t_2) t_1^{ju+\sigma-1} t_2^{-ju+\sigma-1} dt_1 dt_2.$$

При $\sigma = \frac{1}{2}$

$$y(u) = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{S(t_1)S(t_2)}{t_1 t_2} dt_1 dt_2 +$$
$$+\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{h(t_1)h(t_2)}{t_1 t_2} dt_1 dt_2. \quad (11)$$

Синтез квазиоптимального согласованного фильтра. Для синтеза квазиоптимального согласованного фильтра по критерию максимума отношения сигнал/шум по выходу воспользуемся методом приведения шума произвольной КФ к «белому» шуму.

$$P(t) = S(t) \to S(\omega); h(t) \to W(\omega);$$
$$y(u) \to S(f); h(u) \to W(f),$$

где $S(\omega)$ – спектральная плотность сигнала $S(u)$ на входе; $W(\omega)$ – СПМ шума $S(u)$ на входе; $S(f)$ – спектральная плоскость сигнала $S(f)$ после интегрального ПМ $W(f)$ – СПМ шума после интегрального ПМ.

Следуя работе [2, 3, 4, 10], передаточную функцию квазиоптимального фильтра получим:

$$K(jf)_{opt} = k_0 \cdot \frac{S(f)}{W(f)} \cdot e^{-jft_0}, \quad (12)$$

где t_0 – время отсчета отклика на выходе согласованного фильтра; k_0 – постоянная величина.

На рис. 1 приведена реализация определения модуля преобразования Меллина входной смеси сигнала и помехи.

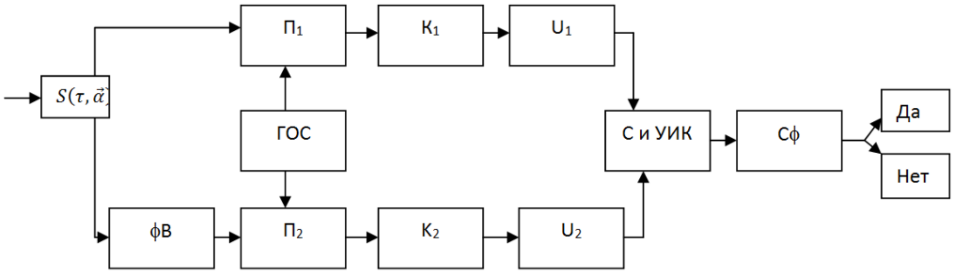

Рис. 1. Структурная схема обнаружителя квазидетерминированного сигнала в пространстве преобразования Меллина

где фВ – фазовращатель на $\frac{\pi}{2}$;

ГОС – генератор опорного сигнала вида $\frac{\cos u \ln x}{\sqrt{x}}$ или $\frac{\sin u \ln x}{\sqrt{x}}$;

$П_1$, $П_2$ – первый и второй перемножители опорных сигналов и сигналов ГОС;

$К_1$, $К_2$ – первый и второй квадраторы;

U_1, U_2 – первый и второй интеграторы;

С и УИК – сумматор и устройство извлечения корня квадратного;

Сф – согласованный фильтр в пространстве переменной интегрального преобразования Меллина.

В качестве примера рассмотрим сигнал в виде гармонического колебания.

$$f(t) = \begin{cases} \sin at, t \in (0; \infty) \\ 0, \quad\quad t \notin (0; \infty) \end{cases},$$

где a – круговая частота равная $2\pi f$,
тогда

$$M(S) = \int_0^\infty \sin at \cdot t^{s-1} dt = a^s \Gamma(S) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right), \tag{13}$$

где $\Gamma(S)$ – гамма функция комплексного аргумента

Найдем модуль(13)

$$|M(s)| = \left| |\Gamma(S)| \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \right|. \tag{14}$$

Для первого множителя $|a^{-s}| = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

Для второго множителя необходимо вычислить квадрат модуля гамма-функции.

Найдем квадрат модуля гамма-функции при $\sigma = Re\{s\} = \frac{1}{2}$.

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + ju\right)\right|^2 = \int_0^\infty e^{-x_1} x_1^{s-1} dx_1 \int_0^\infty e^{-x_2} x_2^{s^*-1} dx_2, \tag{15}$$

где s^*– комплексно-сопряженная величина к S.

Представим (15) в виде:

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + ju\right)\right|^2 = \int_0^\infty e^{-(x_1+x_2)} (x_1 \cdot x_2)^{\sigma-1} \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{ju} dx_1 dx_2,$$

где – реальная составляющая параметра s; ju – комплексная составляющая параметра s; $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ – кольцо существования квадрата модуля гамма-функция;

$$u \in (-\infty, \infty).$$

Для вычисления (15) осуществим замену переменных $x_1 + x_2 = \xi,\ \frac{x_1}{x_2} = \beta.$

Тогда $x_1 = \frac{\beta\xi}{\beta+1};\ x_2 = \frac{\xi}{\beta+1}\ ; x_1 \cdot x_2 \frac{\beta\xi^2}{(\beta+1)^2}.$

Модуль Якобиана представляет

$$|\text{I}| = \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{d\xi} \cdot \frac{dx_1}{d\beta} \\ \frac{dx_2}{d\xi} \cdot \frac{dx_2}{d\beta} \end{vmatrix} = \frac{dx_1}{d\xi} \cdot \frac{dx_2}{d\beta} - \frac{dx_1}{d\beta} \cdot \frac{dx_2}{d\xi} \quad (16)$$

$$\frac{dx_1}{d\xi} = \frac{\beta}{\beta+1};\ \frac{dx_1}{d\beta} = \frac{\xi}{(\beta+1)^2} \quad (17)$$

Подставив (16) в (17), получим

$$|I| = \frac{\xi}{(\beta+1)^2}. \quad (18)$$

С учетом проведенных преобразований

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + ju\right)\right|^2 = \int_0^\infty e^{-\xi} d\xi \int_0^\infty \frac{\beta^{jy-\frac{1}{2}}}{\beta+1} d\beta,$$

так как $\int_0^\infty e^{-\xi} d\xi = 1$, то

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + ju\right)\right|^2 = \int_0^\infty \frac{\beta^{p-1}}{\beta+1} d\beta,$$

где $p = ju + \frac{1}{2}$.

Воспользовавшись результатом [6, 7], окончательно получим

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + ju\right)\right|^2 = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \cdot \frac{1}{ch(\pi u)},$$

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + ju\right)\right|^2 = \frac{1}{ch(\pi u)}.$$

Квадрат модуля

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} + j\frac{\pi}{4}\right)\right|^2 = \sin\left(\frac{\pi}{4} + j\frac{\pi 4}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - j\frac{\pi 4}{2}\right) = \frac{1}{2} ch\pi u,$$

таким образом получаем:

$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + ju\right)^2\right| = \sqrt{\frac{\pi}{2\text{a}}}$, с учетом $a = 2nf$,

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + ju\right)^2\right| = \frac{1}{2\sqrt{f}}.$$

В случае ограниченной синусоиды интервала T, т.е.

$$f(t) = \begin{cases} \sin\omega_0 t, & t \le T \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

В [12] показано, что

$$M(S) = \frac{1}{2} is^{-1} T^s [F_1(S; S+1;\ -j\omega_0 T) - F_1(S; S+1;\ j\omega_0 T)],$$

при $S > -1$.

Так при больших значениях $\omega_0 T = 2\pi f_0 T$,

$$T/_{T_0} = N\ ; f_0 = \frac{1}{T_0},$$

$$w_0 T = \frac{2\pi T}{T_0} = 2\pi N,$$

для отрезка синусоиды длительностью T в [12] получено его преобразование Меллина в виде

$$M(S) = \frac{j}{2} s^{-1} T^s [F_1(S; S+1;\ j\omega_0 T) - 1F^1(S; S+1;\ -j\omega_0 T)],$$

где $R_e S > -1$; $F_1(\cdot\,;\cdot\,;\cdot)$ – функция Куммера;

$\omega_0 = 2\pi f_0$ – центральная частота сигнала.

Введя обозначения

$$2\pi f_0 T = {}^{2\pi T}\!/_{T_0},$$

где $T_0 = \frac{1}{f_0}$; ${}^{T}\!/_{T_0} - N$ –число периодов на длительности T; $2\pi N = N_1$– нормированное значение N.

Тогда:

$$M(S) = \frac{j}{2} s^{-1} T^s [F_1(S; S+1;\ jN_1) - F_1(S; S+1; -jN_1)],$$

$$F_1\left(S; S+1;\ jN_1 e^{j\frac{\pi}{2}}\right) \approx \frac{\Gamma(S+1)}{\Gamma(S)} e^{N_1 e j\frac{\pi}{2}} (N_1 e^{j\frac{\pi}{2}})^{S-S-1}, N_1 e^{j\frac{\pi}{2}} \to +\infty,$$

$$F_1\left(S; S+1; -jN_1 e^{j\frac{\pi}{2}}\right) \approx \frac{\Gamma(S+1)}{\Gamma(S+1-S)} (-\left(-N_1 e^{j\frac{\pi}{2}} \to -\infty\right).$$

Преобразовав эти выражения, получим:

$$F_1\left(S; S+1;\ jN_1 e^{j\frac{\pi}{2}}\right) \approx SN_1 e^{N_1}.$$

В асимптотике при $N_1 \to \mp\infty$ функция Куммера имеют вид:

$$F_1(S; S+1;\ jN_1) \approx \frac{\Gamma(S+1)}{\Gamma(S)} e^{jN_1} (jN_1)^{S-S-1}, N_1 \to +\infty,$$

$$F_1(S; S+1; -jN_1) \approx \frac{\Gamma(S+1)}{\Gamma(S+1-S)} (jN_1)^{-S}, N_1 \to -\infty.$$

После их преобразования получим:

$$F_1(S; S+1;\ jN_1) \approx \Gamma(S)(jN_1)^{-1} e^{jN_1},$$

$$F_1(S; S+1; -jN_1) \approx S\Gamma(S)(jN_1)^{-S},$$

$$M(S) = \frac{j}{2} \cdot \frac{T^s}{s} S((jN_1)^{-1} e^{jN_1} - \Gamma(S)(jN_1)^{-s}),$$

$$M(S) = \frac{T^S}{2}\left(\frac{j \cdot 1}{j \cdot N_1} e^{jn1} - \Gamma(S)(j^{-s} N_1^{-s} j)\right) = \frac{T^2}{2}\left(\frac{1}{N_1} e^{jn1} - \Gamma(S)(j^{-s+1}) N_1^{-s}\right)).$$

Выводы. Анализ $M(S)$при $N_1 \to -\infty$ показывает, что модуль преобразования с точностью до постоянной, примерно, равен модулю гармонического сигнала большой длительности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Акимов П.С., Евстратов Ф.Ф., Захаров С.И. и др.* Обнаружение радиосигналов / под ред. А.А. Колосова. – М.: Радио и связь, 1989. – 288 с.
2. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 1. – М.: Советское радио, 1972. – 744 с.
3. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы. Ч. 1. – М.: Советское Радио, 1966. – 438 с.
4. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы. Ч. 2. – М.: Советское Радио, 1967. – 327 с.
5. *Котельников В.А.* Теория потенциальной помехоустойчивости. – М.: Советское радио, 1956. – 152 с.

6. *Макаров А.М.* Взаимосвязь автокорреляционной функции стационарных случайных процессов в базисе преобразования Фурье со спектральной плотностью мощности в базисе преобразования Меллина (аналог теоремы Винера-Хинчина) // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2014. – № 11 (160). – С. 52-57.
7. *Макаров А.М.* Применение интегрального преобразования Меллина в исследовании свойств гамма функций // Материалы Международной молодежной НК «Математические функции и ее приложения (МФП-12) в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры информационной России, Пятигорск, СКФУ 2012-2013». – Т. 1. – С. 100-106.
8. *Макаров А.М.* Спектральное представление гармонических сигналов в базисе интегрального преобразования Меллина // Управление и информационные технологии: Межвузовский научный сборник. – Пятигорск: Рекламно-информационное агентство на КМВ, 2010. – 216 с.
9. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. – 2 изд. перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
10. *Френкс Л.* Теория сигналов: Пер с англ. / под ред. Д.Е. Вакмана. – М.: Советское радио, 1974. – 344 с.
11. *Шапиро Д.А.* Уравнения в частных производных. Специальные функции. Асимптотики. Конспект лекций по математическим методам физики. – Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2004. – 122 с.
12. *Oberhettinger F.* Tables of Mellin Transforms. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1974. – 278 с.
13. Antonio de Sena, Davide Rocchesso. The Mellin Pizzicator. Proc. of 9 Int. Conference on Digital Audio Effects(DAFx-06). Montreal, Canada. September 18-20. 2006.
14. *Norbert Soullonol, Gerol Boumonn*. Of the Mellin transforms of dirac's delta dunction, the Housdorff dimension function, and the theorem by Mellin // Fractional Calculus Applied Analysis. – 2004. – Vol. 7, No. 4.
15. *Bertrand J., Bertrand P., Ovarlez j.* The Mellin Transform. The Transformsand Applications Handbook: Second Edition. Ed. Alexander D. Poularikas. Boca Raton: CRCPress LLC, 2000.
16. *Philippe Flajolet, Xavier Gourdon, Philippe Dullas*. Mellin transforms and asymtotics: Harmonic sums // Theoretical Computer Science. – 1995. – No. 144. – P. 3-38.
17. *Ovarlez J., Bertrand P., Bertrand P*. Computation of offine time – frequency distributions using the Fast Mellin transform. Proc IEEE – ICASSP. 1992.
18. *Sheng Y., Arsenault H.* Experiments on pattern recognition using invariant Fourier – Mellin descriptors // J. Opt. Soc. Am. – 1986. – No. 3 (6). – P. 885-887.
19. *Glanni Pagnini, Yang Quon Chen*. Mellin convolution for signal filtering and ITC application to the Gaussianization of Lewy noise. Proceedings of the ASME 2011 // International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Confernce IDETC/CIE 2011, August 26-31, 2011, Washington DC, USA.
20. *Шуванов Р.И.* Распознавание образов на цифровых изображениях на основе теории инвариантов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки (моделирование в информатике). – 2012. – С. 158-165.

REFERENCES

1. *Akimov P.S., Evstratov F.F., Zakharov S.I. i dr.* Obnaruzhenie radiosignalov [Detection of radio signals], Ed. by A.A. Kolosova. Moscow: Radio i svyaz', 1989, 288 p.
2. *Van Tris G.* Teoriya obnaruzheniya, otsenok i modulyatsii [Theory of detection, assessment and modulation]. Vol. 1. Moscow: Sovetskoe radio, 1972, 744 p.
3. *Gonorovskiy I.S.* Radiotekhnicheskie tsepi i signaly [Radio circuits and signals]. Part 1. Moscow: Sovetskoe Radio, 1966, 438 p.
4. *Gonorovskiy I.S.* Radiotekhnicheskie tsepi i signaly [Radio circuits and signals]. Part 2. Moscow: Sovetskoe Radio, 1967, 327 p.
5. *Kotel'nikov V.A.* Teoriya potentsial'noy pomekhoustoychivosti [Theory of potential noise immunity]. Moscow: Sovetskoe radio, 1956, 152 p.

6. *Makarov A.M.* Vzaimosvyaz' avtokorrelyatsionnoy funktsii statsionarnykh sluchaynykh protsessov v bazise preobrazovaniya Fur'e so spektral'noy plotnost'yu moshchnosti v bazise preobrazovaniya Mellina (analog teoremy Vinera-Khinchina) [Interrelation of autocorrelated function of stationary casual processes in basis of the Furye transformation from the spectral density of power in basis of the Mellin transformation (analog of viner-hinchin theorem)], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2014, No. 11 (160), pp. 52-57.
7. *Makarov A.M.* Primenenie integral'nogo preobrazovaniya Mellina v issledovanii svoystv gamma funktsiy [The application of the integral Mellin transform in the study of the properties of gamma functions], *Materialy Mezhdunarodnoy molodezhnoy NK «Matematicheskie funktsii i ee prilozheniya (MFP-12) v ramkakh federal'noy tselevoy programmy «Nauchnye i nauchno-pedagogicheskie kadry informatsionnoy Rossii, Pyatigorsk, SKFU 2012-2013»* [proceedings of the International youth NC "Mathematical function and its applications (MFP-12) in the framework of the Federal target program "scientific and Scientific-pedagogical personnel of information of Russia, Pyatigorsk, NCFU in 2012-2013"]. Vol. 1, pp. 100-106.
8. *Makarov A.M.* Spektral'noe predstavlenie garmonicheskikh signalov v bazise integral'nogo preobrazovaniya Mellina [Spectral representation of harmonic signals in the basis of the integral of the Mellin transform], *Upravlenie i informatsionnye tekhnologii: Mezhvuzovskiy nauchnyy sbornik* [Management and information technologies: interuniversity scientific collection]. Pyatigorsk: Reklamno-informatsionnoe agentstvo na KMV, 2010, 216 p.
9. *Tikhonov V.I.* Statisticheskaya radiotekhnika [Statistical radio engineering]. 2nd. ed. Moscow: Radio i svyaz', 1982, 624 p.
10. *Frenks L*. Teoriya signalov [Signal theory]: Translation from English, Ed. by D.E. Vakmana. Moscow: Covetskoe radio, 1974, 344 p.
11. *Shapiro D.A.* Uravneniya v chastnykh proizvodnykh. Spetsial'nye funktsii. Asimptotiki. Konspekt lektsiy po matematicheskim metodam fiziki [Equation in partial derivatives. Special functions. The asymptotics. Lecture notes on mathematical methods of physics]. Novosibirsk: Novosibirskiy gosudarstvennyy universitet, 2004, 122 p.
12. *Oberhettinger F.* Tables of Mellin Transforms. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1974, 278 p.
13. Antonio de Sena, Davide Rocchesso. The Mellin Pizzicator. Proc. of 9 Int. Conference on Digital Audio Effects(DAFx-06). Montreal, Canada. September 18-20. 2006.
14. *Norbert Soullonol, Gerol Boumonn*. Of the Mellin transforms of dirac’s delta dunction, the Housdorff dimension function, and the theorem by Mellin, *Fractional Calculus Applied Analysis,* 2004, Vol. 7, No. 4.
15. *Bertrand J., Bertrand P., Ovarlez j.* The Mellin Transform. The Transformsand Applications Handbook: Second Edition. Ed. Alexander D. Poularikas. Boca Raton: CRCPress LLC, 2000.
16. *Philippe Flajolet, Xavier Gourdon, Philippe Dullas*. Mellin transforms and asymtotics: Harmonic sums, *Theoretical Computer Science,* 1995, No. 144, pp. 3-38.
17. *Ovarlez J., Bertrand P., Bertrand P*. Computation of offine time – frequency distributions using the Fast Mellin transform. Proc IEEE – ICASSP. 1992.
18. *Sheng Y., Arsenault H*. Experiments on pattern recognition using invariant Fourier – Mellin descriptors, *J. Opt. Soc. Am*., 1986, No. 3 (6), pp. 885-887.
19. *Glanni Pagnini, Yang Quon Chen*. Mellin convolution for signal filtering and ITC application to the Gaussianization of Lewy noise. Proceedings of the ASME 2011, *International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Confernce IDETC/CIE 2011, August 26-31, 2011, Washington DC, USA*.
20. *Shuvanov R.I.* Raspoznavanie obrazov na tsifrovykh izobrazheniyakh na osnove teorii invariantov [Pattern recognition on digital images based on invariant theory], *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki (modelirovanie v informatike)* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences (modeling in computer science)], 2012, pp. 158-165.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор И.М. Першин.

Макаров Анатолий Михайлович – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Северо-Кавказский федеральный университет», филиал в г. Пятигорске; e-mail: mellin_22@mail.ru; 357501, Ставропольский край, г Пятигорск, ул Красноармейская, 20; д.т.н; профессор.

Ермаков Александр Сергеевич – e-mail: konturtv@mail.ru; аспирант.

Makarov Anatoly Mikhaylovich – Federal State Autonomous Educational Establishment of Higher Vocational Education "North-Caucasus Federal University", branch in Pyatigorsk; e-mail: mellin_22@mail.ru; 20, Krasnoarmeyskaya street, Pyatigorsk, 357501, Russia; dr. of. eng. sc; professor.

Ermakov Alexander Sergeevich – e-mail: konturtv@mail.ru; postgraduate student.