

Вишневецкий Вячеслав Юрьевич – Южный федеральный университет; e-mail: vvu@fep.tti.sfedu.ru; 347922, г. Таганрог, ул. Шевченко, 2; к.т.н.; доцент.

Строчан Тимур Петрович – e-mail: strochan.timur@rambler.ru; аспирант.

Vishnevetskiy Vyacheslav Yur'evich – Southern Federal University; e-mail: vvu@fep.tti.sfedu.ru; 2, Shevchenko street, Taganrog, 347922, Russia; cand. of eng. sc.; associate professor.

Strochan Timur Petrovich – e-mail: strochan.timur@rambler.ru; postgraduate student.

УДК 581.1

И.А. Кипнис, Ю.М. Вернигоров

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОДЪЕМА ВОДЫ В МНОГОУРОВНЕВОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ*

В литературе отсутствует единое мнение о природе сил, обеспечивающих подъем и распределение воды в ксилеме растений. В ряде работ показано, что, исходя из капиллярной модели, подъем воды в ксилеме происходит силами поверхностного натяжения в мениске капилляра ксилемы и линия, соединяющая мениски воды в капиллярах, образует фигуру, соответствующую форме кроны дерева или листа. Диаметр ветвей деревьев обычно меньше диаметра ствола. Также соотносятся и водопроводящие структуры, содержащиеся в стволах и ветвях. Но до настоящего времени в литературных источниках не рассматривался вопрос о закономерностях продвижения, и распределения воды в ветвящихся капиллярных системах с различным соотношением параметров ветвей разного уровня. В работе рассмотрена модель с капиллярами разного радиуса. Рассчитано продвижение воды в капиллярах, радиусы которых уменьшаются с ростом номера уровня и определено продвижение воды при условии, что углы наклона капилляров в разных уровнях различны, а расстояние между уровнями расположения капилляров не постоянно. Описанная капиллярная модель позволяет изучить распределение воды при различных диаметрах капилляров, расстояниях между уровнями, а также углах наклона капилляров к горизонтали. Показано, что продвижение воды в наклонных ветвях зависит от параметров капиллярной системы. Распределение воды в капиллярах ксилем растений при всем их многообразии может быть описано и изучено с помощью построенной модели многоуровневой системы капилляров с переменными параметрами, исходя из того, что подъем воды в ксилеме происходит силами поверхностного натяжения в мениске капилляра. Показано, что подъем воды в вертикальном капилляре зависит от количества ветвей и соотношения их параметров и всегда больше, чем в одиночном вертикальном капилляре того же радиуса. Установлено, что высота подъема воды в наклонных капиллярных ветвях зависит от соотношения параметров системы, за исключением угла их наклона, и всегда меньше, чем в одиночном вертикальном капилляре равного радиуса.

Растение; капилляры; ксилема; модель; транспирация.

I.A. Kipnis, Yu.M. Vernigorov

MODELING OF THE ASCENT OF WATER IN CAPILLARY MULTILEVEL SYSTEM WITH VARIABLE PARAMETERS

In the literature there is no consensus about the nature of the forces ensuring the rise and distribution of water in the xylem of plants. In some works it is shown that, based on the capillary model, the rise of water in the xylem occurs by surface tension in the meniscus of the capillary xylem and the line connecting the water menisci in the capillaries, forms a shape corresponding to the shape of the crown of a tree or leaf. The diameter of the branches of trees is usually less than the

* Работа выполнена в рамках инициативной НИР.

diameter of the trunk. Also relate to and water conveyance structures contained in the trunks and branches. But so far in the literature not addressed the issue of the patterns of promotion, and distribution of water in capillary branching systems with different ratio of parameters of branches of different levels. The paper considers a model with capillaries of different radius. The calculated promotion of the water in the capillaries, the radii of which decrease with increasing level number and promotion of water determined under the condition that the angles of inclination of the capillaries in different levels are different, and the distance between the location of the capillaries is not constant. Described capillary model allows to study the distribution of water for different capillary diameters, the distances between the levels, and tilt angles of the capillaries to the horizontal. It is shown that the promotion of water in the sloping branches depends on the parameters of the capillary system, the distribution of water in the capillaries of xylem plants in all their diversity can be described and studied using a constructed model of multilevel system of capillaries with variable parameters, based on the fact that the rise of water in the xylem occurs by surface tension in the meniscus of the capillary. It is shown that the rise of water in a vertical capillary depends on the number of branches and the ratio of their parameters and always greater than in a single vertical capillary of the same radius. It is established that the height of rise of water in inclined capillary branches depends on the ratio of system parameters, except for the angle of inclination, and is always less than in a single vertical capillary of equal radius.

Plant; capillaries; xylem; model; transpiration.

Введение. В цепочке влагооборота почва-растение-атмосфера-почва растение играет связующую роль между почвой и атмосферой. Вода по сосудам ксилемы, имеющей сложное анатомическое строение и ветвящуюся архитектуру, распределяется в растении. При этом растение может запастись водой, например во флоэме, с последующим возвратом воды в ксилему при недостатке влаги в почве [1]. Вода может также аккумулироваться в других структурах растения [2]. В литературных источниках дискутируется вопрос о силах, обеспечивающих подъем и распределение воды при её продвижении в ксилеме [3]. В предыдущих работах авторов, например [4, 5, 6] и других, изучено продвижение воды в ветвящихся симметричных и несимметричных капиллярных системах, все ветви которых представляют собой цилиндрические капилляры одинакового радиуса. При этом предполагалось, что соединенные с вертикальным капилляром наклонные ветви всех уровней параллельны, и расстояние между ветвями одинаково. Установлено, что наибольшее продвижение воды, как в прямолинейных, так и в криволинейных боковых ветвях происходит в самом нижнем уровне и уменьшается в ветвях каждого из последующих уровней. Наличие боковых капилляров приводит к увеличению высоты подъема воды в вертикальном капилляре по сравнению с одиночным вертикальным капилляром того же радиуса. Показано, что линия, последовательно соединяющая мениски воды в капиллярах ветвей разных уровней, образует фигуру, по форме напоминающую коническую крону дерева или листа. Это позволило предположить, что своей специфической конической формой растения и их части обязаны наличию в них капиллярных систем. В ряде работ, например [7–17], и др. экспериментально определена скорость продвижения воды в ксилемах стволов и стеблей многих растений в разных условиях и описана физиология и строение их ксилем. Но полученные результаты не позволяют выяснить общие закономерности подъема и распределения влаги в ксилеме с учетом ее анатомического строения. Авторами [19] показано, что единственной силой, обеспечивающей подъем воды в ксилеме растений, является сила поверхностного натяжения воды в менисках капилляров. А корневое давление компенсирует, как максимум, гидравлические потери, возникающие при движении воды через систему окаймленных пор трахеид ксилемы хвойных растений [20]. В природе диаметр ветвей деревьев не одинаков и обычно меньше диаметра ствола. Такое же соотношение имеют содержащиеся в них водопроводящие структуры. В литературных источниках не рассмотрены продвижения и распределения воды в многоуровневых капиллярных системах с переменными параметрами.

Решение этой задачи и является целью настоящей работы.

Теоретическая модель. Допустим, что имеется капиллярная система, с произвольным углом наклона ветвей, показанная на рис. 1, а каждая пара боковых капилляров одного уровня в M -уровневой системе имеют одинаковый радиус. При этом радиус капилляров в ветвях уменьшается с ростом номера уровня. Для простоты расчетов примем также, что угол наклона правой и левой ветвей в каждом уровне одинаков, то есть $\beta_{лв}^{(M)} = \beta_{пр}^{(M)}$, но может отличаться от углов наклона капилляров других уровней. Примем радиус вертикального капилляра равным r_0 , а радиус капилляров i -ого уровня равным

$$r_i = m_i r_0, r_i < r_0, \quad 0 < m_i \leq 1, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (1)$$

Будем также считать, что величина h_j между уровнями не одинакова

$$1 \leq j \leq N \text{ и } M=N. \quad (2)$$

и различны также углы наклона ветвей β_i^M к горизонтали. Поскольку радиусы капилляров в общем случае не равны, необходимо определить степень влияния сил поверхностного натяжения в менисках капилляров F_n разных ветвей на подъем воды в системе. Учитывая, что F_n прямо пропорциональна радиусу капилляра [4], равнодействующая сила натяжения в системе пропорциональна сумме радиусов капилляров, которая равна

$$\begin{aligned} r_0 + m_1 r_0 + m_1 r_0 + m_2 r_0 + m_2 r_0 + m_3 r_0 + m_3 r_0 + \dots + m_i r_0 + m_i r_0 + \dots = \\ = r_0 (1 + 2(m_1 + m_2 + \dots + m_i + \dots)) = r_0 (1 + 2 \sum_1^{(M)} m_i). \end{aligned} \quad (3)$$

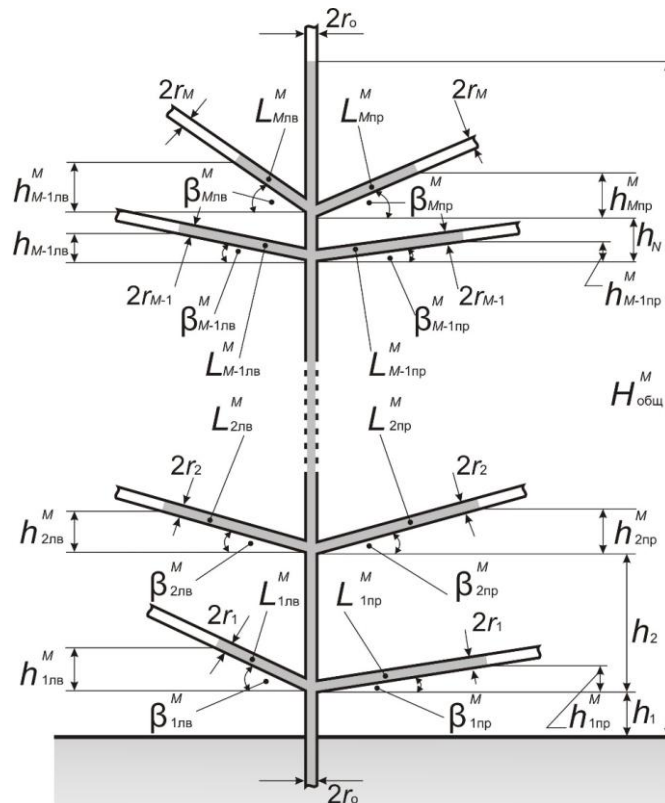


Рис. 1. Модель многоуровневой капиллярной системы с цилиндрическими капиллярами разного радиуса

Каждая из сил поверхностного натяжения в менисках капилляров вносит свой вклад в продвижение и распределение воды в системе. В силу независимости действия этих сил можно определить степень участия каждой из них в подъеме воды. Так на вертикальный участок капилляра высотой h_1 , предшествующий наклонным капиллярным ветвям первого уровня, действуют одновременно силы поверхностного натяжения в менисках всех капилляров системы. Поэтому сила поверхностного натяжения в мениске каждой капиллярной ветви будет воздействовать на участок вертикальной ветви высотой h_1 силой прямо пропорциональной радиусу ее капилляра. Тогда для каждой из ветвей (начиная с вертикальной) можно записать коэффициент пропорциональности ее воздействия (относительно равнодействующей силы натяжения) на участок h_1 в виде:

$$\frac{1}{1+2\sum_1^{(M)} m_i}, \frac{m_1}{1+2\sum_1^{(M)} m_i}, \frac{m_1}{1+2\sum_1^{(M)} m_i}, \frac{m_2}{1+2\sum_1^{(M)} m_i}, \frac{m_2}{1+2\sum_1^{(M)} m_i}, \dots$$

$$\dots \frac{m_i}{1+2\sum_1^{(M)} m_i}, \frac{m_i}{1+2\sum_1^{(M)} m_i}, \dots \quad (4)$$

Участок вертикальной ветви высотой h_2 будет находиться под действием всех F_n ветвей от 2-й и расположенных выше. Силы же поверхностного натяжения менисков капилляров ветвей первого уровня не осуществляют «прямой» работы по продвижению воды в капиллярах последующих уровней, а участвуют в этом случае опосредованно, обеспечивая частично подъем воды на участке h_1 и продвижение ее в капиллярах боковых ветвей первого уровня. Тогда коэффициенты пропорциональности в (4) относительно ветвей второго уровня примут вид

$$\frac{1}{1+2\sum_1^{(M)} m_i}, 0, 0, \frac{m_2}{1+2\sum_1^{(M)} m_i}, \frac{m_2}{1+2\sum_1^{(M)} m_i}, \dots \frac{m_i}{1+2\sum_1^{(M)} m_i}, \frac{m_i}{1+2\sum_1^{(M)} m_i}, \dots \quad (5)$$

Используя далее ту же логику и метод построения уравнений продвижения воды в многоуровневой ветвящейся капиллярной системе, как и в [4], можно записать общие уравнения для продвижения воды в ветвях многоуровневой капиллярной системы с капиллярами разного радиуса в следующем виде:

для левого и правого боковых капилляров

$$\pi r_0^2 \rho g m_{i=j} \sum_{j=1}^{(N)} \frac{h_j}{1+2\sum_{i=j}^{(M)} m_i} + \pi r_i^2 \rho g L_{i\text{лв}}^{(M)} \sin \beta_{i\text{лв}}^{(M)} = 2\pi r_i \sigma \cos \alpha \quad (6)$$

$$\pi r_0^2 \rho g m_{i=j} \sum_{j=1}^{(N)} \frac{h_j}{1+2\sum_{i=j}^{(M)} m_i} + \pi r_i^2 \rho g L_{i\text{пр}}^{(M)} \sin \beta_{i\text{пр}}^{(M)} = 2\pi r_i \sigma \cos \alpha \quad (7)$$

а для вертикального

$$\pi r_0^2 \rho g (H_{\text{общ}}^{(M)} - \sum_{j=1}^{(N)} h_j + \sum_{j=1}^{(N)} \frac{h_j}{1+2\sum_{i=j}^{(M)} m_i}) = 2\pi r_0 \sigma \cos \alpha \quad (8)$$

где $L_{i\text{лв(пр)}}^{(M)}$ – величина продвижения воды в капиллярах M -уровневой системы, $\beta_{i\text{лв(пр)}}^{(M)}$ – углы наклона боковых ветвей разных уровней к горизонтали, $H_{\text{общ}}^{(M)}$ – высота подъема воды в вертикальном капилляре, индекс $i=j$ при $m_{i=j}$ в (5) и (6) равен номеру уровня капиллярной ветви, для которой записывается уравнение продвижения воды.

Сокращая (6), (7) и (8) на $\pi r_0^2 \rho g$ и решая (6) и (7) относительно $L_{i\text{лв(пр)}}^{(M)} \sin \beta_{i\text{лв(пр)}}^{(M)}$, а (8) относительно $H_{\text{общ}}^{(M)}$, а также учитывая, что $r_0/r_i=1/m_i$ получим

$$L_{i\text{лв}}^{(M)} \sin \beta_{i\text{лв}}^{(M)} = H_i^{(M)} - \frac{1}{m_{i=j}} \sum_{j=1}^{(N)} \frac{h_j}{1+2\sum_{i=j}^{(M)} m_i} = h_{i\text{лв}}^{(M)} \quad (9)$$

$$L_{i\text{пр}}^{(M)} \sin \beta_{i\text{пр}}^{(M)} = H_i^{(M)} - \frac{1}{m_{i=j}} \sum_{j=1}^{(N)} \frac{h_j}{1+2\sum_{i=j}^{(M)} m_i} = h_{i\text{пр}}^{(M)} \quad (10)$$

$$H_{\text{общ}}^{(M)} = H_0^{(M)} + \sum_{j=1}^{(N)} h_j - \sum_{j=1}^{(N)} \frac{h_j}{1+2\sum_{i=j}^{(M)} m_i} \quad (11)$$

где $h_{\text{лв}}^{(M)}$ и $h_{\text{пр}}^{(M)}$ – высоты подъема воды (рис.1) в левой и правой ветвях капилляров i -го уровня, $H_0^{(M)}$, $H_i^{(M)}$ – высоты подъема воды в одиночных вертикальных капиллярах радиусов r_0 и r_i .

Анализ соотношений (9) – (11) показывает следующие общие закономерности распределения воды в рассматриваемой модели. Поскольку с учетом (1) вторые слагаемые в (9) и (10) при любых значениях входящих в него параметров больше нуля, то всегда $h_{\text{лв(пр)}}^{(M)} < H_i^{(M)}$. Физически это означает, что высота подъема воды в наклонном капилляре всегда меньше высоты ее подъема в одиночном вертикальном капилляре того же радиуса, а абсолютная величина $h_{\text{лв(пр)}}^{(M)}$ не зависит от угла наклона капилляра $\beta_{\text{лв(пр)}}^{(M)}$, а зависит только от соотношения параметров системы. Величина продвижения воды $L_{\text{лв(пр)}}^{(M)}$ в наклонных ветвях кроме соотношения параметров системы зависит также от $\beta_{\text{лв(пр)}}^{(M)}$. При $\beta_{\text{лв(пр)}}^{(M)} \rightarrow 0$ $L_{\text{лв(пр)}}^{(M)} \rightarrow \infty$, а при $\beta_{\text{лв(пр)}}^{(M)} = 90^\circ$ величина $L_{\text{лв(пр)}}^{(M)}$ примет минимально возможное значение, равное $h_{\text{лв(пр)}}^{(M)}$.

Из (11) следует, что в рассматриваемой модели всегда $H_{\text{общ}}^{(M)} > H_0^{(M)}$, поскольку знаменатель третьего слагаемого $1 + 2 \sum_{i=j}^{(M)} m_i > 1$ и, следовательно, второе слагаемое больше третьего. Это говорит о том, что в рассматриваемой многоуровневой системе подъем воды в вертикальном капилляре зависит от количества ветвей и соотношения их параметров и всегда больше, чем в одиночном вертикальном того же радиуса.

Влияние соотношения параметров в уравнениях (9)–(11) на величины $L_{\text{лв(пр)}}^{(M)}$, $h_{\text{лв(пр)}}^{(M)}$, $H_{\text{общ}}^{(M)}$ рассмотрим на конкретных примерах. Запишем уравнения (9)–(11), например для значений $M = 2$ и $M = 5$ с учетом того, что $\beta_{\text{лв}}^{(M)} = \beta_{\text{пр}}^{(M)}$.

Двухуровневая система:

для правой и левой ветвей первого уровня

$$\frac{m_1}{1+2(m_1+m_2)} \pi r_0^2 \rho g h_1 + \pi r_1^2 \rho g L_{\text{лв(пр)}}^{(2)} \sin \beta_{\text{лв(пр)}}^{(2)} = 2\pi r_1 \sigma \cos \alpha \quad (12)$$

для правой и левой ветвей второго уровня

$$\begin{aligned} & \frac{m_2}{1+2(m_1+m_2)} \pi r_0^2 \rho g h_1 + \frac{m_2}{1+2m_2} \pi r_0^2 \rho g h_2 + \\ & + \pi r_2^2 \rho g L_{\text{лв(пр)}}^{(2)} \sin \beta_{\text{лв(пр)}}^{(2)} = 2\pi r_2 \sigma \cos \alpha \end{aligned} \quad (13)$$

для вертикального капилляра

$$\begin{aligned} & \pi r_0^2 \rho g (H_{\text{общ}}^{(2)} - h_1 - h_2) + \frac{1}{1+2(m_1+m_2)} \pi r_0^2 \rho g h_1 + \\ & + \frac{1}{1+2m_1} \pi r_0^2 \rho g h_2 = 2\pi r_0 \sigma \cos \alpha \end{aligned} \quad (14)$$

Пятиуровневая система:

для правой и левой ветвей первого уровня

$$\frac{m_1}{1+2(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)} \pi r_0^2 \rho g h_1 + \pi r_1^2 \rho g L_{\text{лв(пр)}}^{(5)} \sin \beta_{\text{лв(пр)}}^{(5)} = 2\pi r_1 \sigma \cos \alpha \quad (15)$$

для правой и левой ветвей второго уровня

$$\begin{aligned} & \frac{m_2}{1+2(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)} \pi r_0^2 \rho g h_1 + \frac{m_2}{1+2(m_2+m_3+m_4+m_5)} \pi r_0^2 \rho g h_2 + \\ & + \pi r_2^2 \rho g L_{\text{лв(пр)}}^{(5)} \sin \beta_{\text{лв(пр)}}^{(5)} = 2\pi r_2 \sigma \cos \alpha \end{aligned} \quad (16)$$

для правой и левой ветвей третьего уровня

$$\begin{aligned} & \frac{m_3}{1+2(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)} \pi r_0^2 \rho g h_1 + \frac{m_3}{1+2(m_2+m_3+m_4+m_5)} \pi r_0^2 \rho g h_2 + \\ & + \frac{m_3}{1+2(m_3+m_4+m_5)} \pi r_0^2 \rho g h_3 + \pi r_3^2 \rho g L_{\text{лв(пр)}}^{(5)} \sin \beta_{\text{лв(пр)}}^{(5)} = 2\pi r_3 \sigma \cos \alpha \end{aligned} \quad (17)$$

для правой и левой ветвей четвертого уровня

$$\begin{aligned} & \frac{m_4}{1+2(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)} \pi r_0^2 \rho g h_1 + \frac{m_4}{1+2(m_2+m_3+m_4+m_5)} \pi r_0^2 \rho g h_2 + \\ & + \frac{m_4}{1+2(m_3+m_4+m_5)} \pi r_0^2 \rho g h_3 + \frac{m_3}{1+2(m_4+m_5)} \pi r_0^2 \rho g h_4 + \\ & + \pi r_4^2 \rho g L_{4\text{пр(лев)}}^{(5)} \sin \beta_{4\text{пр(лев)}}^{(5)} = 2\pi r_4 \sigma \cos \alpha \end{aligned} \quad (18)$$

для правой и левой ветвей пятого уровня

$$\begin{aligned} & \frac{m_5}{1+2(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)} \pi r_0^2 \rho g h_1 + \frac{m_5}{1+2(m_2+m_3+m_4+m_5)} \pi r_0^2 \rho g h_2 + \\ & + \frac{m_5}{1+2(m_3+m_4+m_5)} \pi r_0^2 \rho g h_3 + \frac{m_5}{1+2(m_4+m_5)} \pi r_0^2 \rho g h_4 + \frac{m_5}{1+2m_5} \pi r_0^2 \rho g h_5 + \\ & + \pi r_5^2 \rho g L_{5\text{пр(лев)}}^{(5)} \sin \beta_{5\text{пр(лев)}}^{(5)} = 2\pi r_5 \sigma \cos \alpha \end{aligned} \quad (19)$$

для вертикального капилляра

$$\begin{aligned} & \pi r_0^2 \rho g (H_{\text{общ}}^{(5)} - h_1 - h_2 - h_3 - h_4 - h_5) + \frac{1}{1+2(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)} \pi r_0^2 \rho g h_1 + \\ & + \frac{1}{1+2(m_2+m_3+m_4+m_5)} \pi r_0^2 \rho g h_2 + \frac{1}{1+2(m_3+m_4+m_5)} \pi r_0^2 \rho g h_3 + \\ & + \frac{1}{1+2(m_4+m_5)} \pi r_0^2 \rho g h_4 + \frac{1}{1+2m_5} \pi r_0^2 \rho g h_5 = 2\pi r_0 \sigma \cos \alpha \end{aligned} \quad (20)$$

Не трудно показать, что при $m_i=1$ и $h_i=h$ приведенные выше соотношения совпадают с таковыми, полученными в [4] для многоуровневой системы с капиллярами равных радиусов и расстояний между уровнями.

Решая уравнения (15)–(19) для двухуровневой системы получим:

$$L_{1\text{пр(лев)}}^{(2)} \sin \beta_{1\text{пр(лев)}}^{(2)} = H_1^{(2)} - \frac{1}{m_1} \frac{h_1}{1+2(m_1+m_2)} = h_{1\text{пр(лев)}}^{(2)} \quad (21)$$

$$L_{2\text{пр(лев)}}^{(2)} \sin \beta_{2\text{пр(лев)}}^{(2)} = H_2^{(2)} - \frac{1}{m_2} \left(\frac{h_1}{1+2(m_1+m_2)} + \frac{h_2}{1+2m_2} \right) = h_{2\text{пр(лев)}}^{(2)} \quad (22)$$

$$H_{\text{общ}}^{(2)} = H_0^{(2)} + h_1 + h_2 - \left(\frac{h_1}{1+2(m_1+m_2)} + \frac{h_2}{1+2m_2} \right) \quad (23)$$

а решения уравнений (36) - (46) для правой и левой ветвей пятиуровневой системы будут иметь следующий вид

для первого уровня

$$L_{1\text{пр(лев)}}^{(5)} \sin \beta_{1\text{пр(лев)}}^{(5)} = H_1^{(5)} - \frac{1}{m_1} \frac{h_1}{1+2(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)} = h_{1\text{пр(лев)}}^{(5)} \quad (24)$$

для второго уровня

$$\begin{aligned} L_{2\text{пр(лев)}}^{(5)} \sin \beta_{2\text{пр(лев)}}^{(5)} &= H_2^{(5)} - \frac{1}{m_2} \left(\frac{h_1}{1+2(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)} + \frac{h_2}{1+2(m_2+m_3+m_4+m_5)} \right) = \\ &= h_{2\text{пр(лев)}}^{(5)} \end{aligned} \quad (25)$$

для третьего уровня

$$\begin{aligned} L_{3\text{пр(лев)}}^{(5)} \sin \beta_{3\text{пр(лев)}}^{(5)} &= H_3^{(5)} - \frac{1}{m_3} \left(\frac{h_1}{1+2(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)} + \frac{h_2}{1+2(m_2+m_3+m_4+m_5)} + \right. \\ & \left. + \frac{h_3}{1+2(m_3+m_4+m_5)} \right) = h_{3\text{пр(лев)}}^{(5)} \end{aligned} \quad (26)$$

для четвертого уровня

$$\begin{aligned} L_{4\text{пр(лев)}}^{(5)} \sin \beta_{4\text{пр(лев)}}^{(5)} &= H_4^{(5)} - \frac{1}{m_4} \left(\frac{h_1}{1+2(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)} + \frac{h_2}{1+2(m_2+m_3+m_4+m_5)} + \right. \\ & \left. + \frac{h_3}{1+2(m_3+m_4+m_5)} + \frac{h_4}{1+2(m_4+m_5)} \right) = h_{4\text{пр(лев)}}^{(5)} \end{aligned} \quad (27)$$

для пятого уровня

$$\begin{aligned} L_{5\text{пр(лев)}}^{(5)} \sin \beta_{5\text{пр(лев)}}^{(5)} &= H_5^{(5)} - \frac{1}{m_5} \left(\frac{h_1}{1+2(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)} + \frac{h_2}{1+2(m_2+m_3+m_4+m_5)} + \right. \\ & \left. + \frac{h_3}{1+2(m_3+m_4+m_5)} + \frac{h_4}{1+2(m_4+m_5)} + \frac{h_5}{1+2m_5} \right) = h_{5\text{пр(лев)}}^{(5)} \end{aligned} \quad (28)$$

для вертикального капилляра

$$H_{\text{общ}}^{(5)} = H_0^{(5)} + \sum_j^{(5)} h_j - \left(\frac{h_1}{1+2(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)} + \frac{h_2}{1+2(m_2+m_3+m_4+m_5)} + \frac{h_3}{1+2(m_3+m_4+m_5)} + \frac{h_4}{1+2(m_4+m_5)} + \frac{h_5}{1+2m_5} \right) \quad (29)$$

Величины $H_0^{(5)} - H_5^{(5)}$ – высоты подъема воды в одиночных вертикальных капиллярах радиусов $r_0 - r_5$. При $m_i=1$ и $h_i = h$ полученные выражения совпадают с аналогичными в [4] для пятиуровневой системы с капиллярами равного радиуса.

Воспользовавшись 3d графикой и задавая соотношения между r_0 , r_i и $\beta_{\text{инр(лв)}}^{(M)}$, по соотношениям (21)–(29) можно оценить степень их влияния на продвижение и высоту подъема воды в системе. Для построения в 3d графике зависимости (23) от соотношения параметров системы преобразуем это уравнение. Нормируя (23) по $H_0^{(2)}$ и далее полагая $h_2/h_1 = x$, где $x \geq 1$, и с учетом (1) $m_2/m_1=y$ при $y \leq 1$ упомянутые соотношения можно записать в виде

$$H_{\text{общ}}^{(2)} / H_0^{(2)} = 1 + \frac{h_1}{H_0^{(2)}} \left(1+x - \frac{1}{1+2m_1(1+y)} - \frac{x}{1+2m_1y} \right) \quad (30)$$

Нормируя (29) по $H_0^{(5)}$, полагая $h_i/h_1 = x$, где $x \geq 1$, и выражая m_i через m_1 с учетом (1) и при выполнении условия $r_i/r_{i+1} = 1,2$, (29) можно записать в виде

$$H_{\text{общ}}^{(5)} / H_0^{(5)} = 1 + \frac{h_1}{H_0^{(5)}} \left(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 - \left(\frac{x^0}{1+6,72y} + \frac{x^1}{1+4,72y} + \frac{x^2}{1+3,12y} + \frac{x^3}{1+1,84y} + \frac{x^4}{1+0,82y} \right) \right) \quad (31)$$

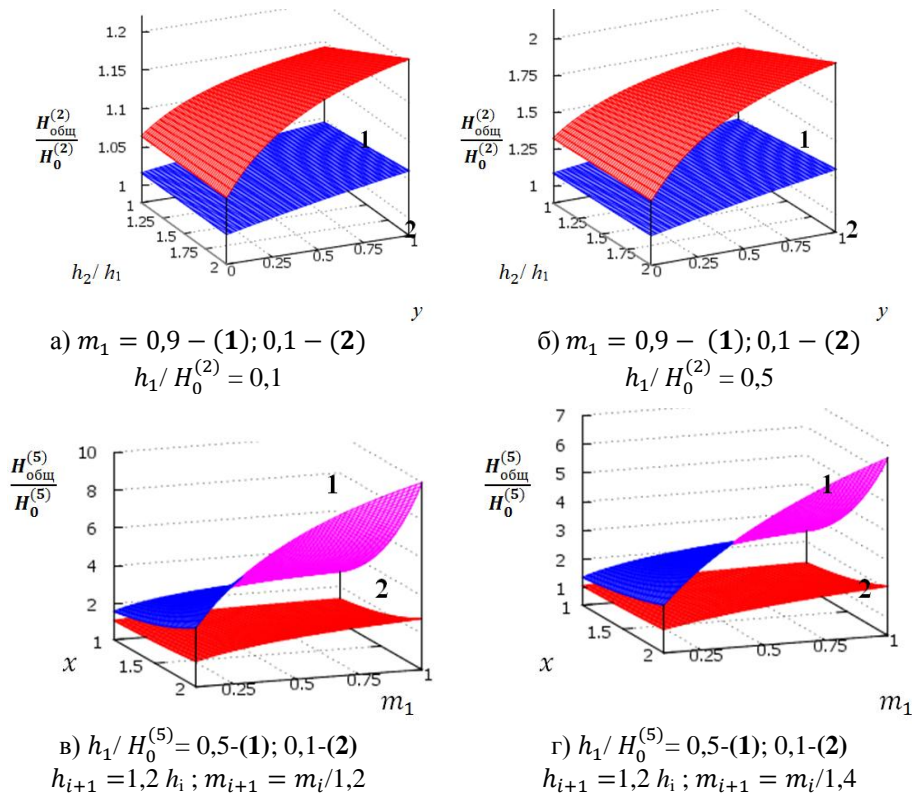


Рис. 2. Зависимости $H_{\text{общ}}^{(M)} / H_0^{(M)}$ для $M=2$ (а и б) и $M=5$ (в, г) от соотношения параметров капиллярной системы. Пояснения в тексте

Положим в (30) $h_1/H_0^{(2)}$ равным 0,1 и 0,5, m_1 равными 0,9 и 0,1, диапазон изменения x от 1 до 2, а y от 0,1 до 1, а в (31) $m_1=y$ $0,1 \leq y \leq 1$ и построим 3d графики для (30) и (31). Результаты представлены на рис. 2. Анализ рисунков показывает следующее. При $M=2$ (рис. 2а,б) $H_{\text{общ}}^{(2)}/H_0^{(2)}$ тем больше, чем больше m_1 , т.е. когда $r_1 \rightarrow r_0$ и чем больше $h_1/H_0^{(2)}$ при прочих равных условиях. Максимального значения $H_{\text{общ}}^{(2)}/H_0^{(2)} = 2,2$ достигает при $r_1=r_2=r_0$ ($y=1$) $h_1/H_0^{(2)} = 0,5$, а минимального, равного $\approx 1,01$ достигает при $r_1=0,1$ во всем диапазоне изменения h_2/h_1 (рис. 2,а). Физическая интерпретация результатов заключается в том, что при r_1 и $r_2 \rightarrow r_0$ перераспределение сил в системе приводит к увеличению высоты подъема воды в вертикальном капилляре. Этот результат сохраняется и при $M=5$ (рис. 2в, г). Но с увеличением M на столб воды в вертикальном капилляре действует больше сил и $H_{\text{общ}}^{(5)}/H_0^{(5)}$ увеличивается, достигая величины, например 10, при $r_1=r_0$ ($m_1=1$ и $x=2$, рис. 2,в) при этом радиус капилляров в уровнях уменьшается, как $m_{i+1} = m_i/1,2$. При соотношении $m_{i+1} = m_i/1,4$ и прочих равных условиях $H_{\text{общ}}^{(5)}/H_0^{(5)} \approx 6,5$ (рис. 2,г), что объясняется уменьшением воздействия сил поперечного натяжения в ветвях на подъем воды в вертикальном капилляре.

Аналогично могут быть построены графики для (21), (22) и (24)–(28). В качестве примера на рис. 3 показаны зависимости высот подъема воды в ветвях (рис. 3,а) и ее продвижение в зависимости от угла их наклона (рис. 3б) для разных параметров системы. Так из рис. 3,а следует, что при $h_1 \rightarrow 0$ $h_{1\text{пр(лв)}}^{(i)} \rightarrow H_1^{(i)}$ при всех значениях m_1 . Увеличение h_1 и уменьшение m_1 приводит к уменьшению высоты подъема воды в ветвях. Сказанное справедливо для всех значений M . При этом $h_{1\text{пр(лв)}}^{(2)} \leq h_{1\text{пр(лв)}}^{(5)}$, то есть увеличение M приводит к увеличению $h_{1\text{пр(лв)}}^{(i)}$. Анализ рис. 3,б показывает, что при $M=5$ и $\sin \beta_1^j \rightarrow 1$ $L_{1\text{пр(лв)}}^{(j)} \rightarrow H_1^{(j)}$. При $\sin \beta_1^j \rightarrow 0$ в зависимости от величины m_1 $L_{1\text{пр(лв)}}^{(j)}$ может превышать $H_1^{(j)}$ до 10 раз. Величина этого превышения будет зависеть от соотношения между m_1 , β_1^j и $h_1/H_1^{(j)}$, уменьшаясь с увеличением последнего. Физическая интерпретация полученных результатов заключается в том, что изменение величины промежутков между ветвями, равно как и соотношения радиусов вертикального капилляра и радиусов капилляров боковых ветвей и их углов наклона приводит к перераспределению сил в системе, и как следствие изменению продвижения в них воды.

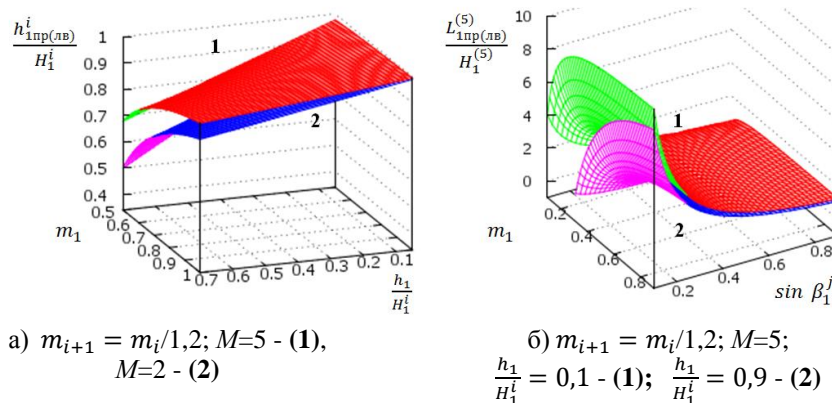


Рис. 3. Зависимости: а) $h_{1\text{пр(лв)}}^{(i)}/H_1^{(i)} = f(\frac{h_1}{H_1^i}, m_1)$, б) $L_{1\text{пр(лв)}}^{(j)}/H_1^{(j)} = f(\beta_1^j, m_1)$ при $j=1$ для капиллярных систем $M=2$ и $M=5$. Пояснения по тексту

Задавая в рассмотренной модели другие соотношения параметров, аналогично тому, как сделано выше, можно изучить разнообразные возможности подъема и распределения воды в ветвящихся капиллярных системах.

Выводы:

1. Распределение воды в капиллярах ксилем растений при всем их многообразии может быть описано и изучено с помощью модели многоуровневой системы капилляров с переменными параметрами, исходя из того, что подъем воды в ксилеме происходит силами поверхностного натяжения в мениске капилляра.

2. Рассчитано продвижение воды в системе криволинейных капилляров при условии:

- ♦ радиусы капилляров уменьшаются с ростом номера уровня;
- ♦ углы наклона капилляров в разных уровнях различны;
- ♦ расстояние между уровнями капилляров не одинаково.

3. Установлено, что высота подъема воды в наклонных капиллярных ветвях:

- ♦ зависит от соотношения параметров системы, за исключением угла их наклона;
- ♦ всегда меньше, чем в одиночном вертикальном капилляре равного радиуса.

4. Величина продвижения воды в ветвях зависит от угла их наклона, от соотношения параметров системы и принимает минимальные значения при углах наклона, равных 90^0 .

5. Показано, что подъем воды в вертикальном капилляре зависит от количества ветвей и соотношения их параметров и всегда больше, чем в одиночном вертикальном капилляре того же радиуса.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Pfautsch S., Renard J., Tjoelker M.G., Salih A.* Phloem as Capacitors: Radial Transfer of water into xylem of Trees Stems Occurs Via Simplastic Transport in Ray Parenchima // *Plant Physiology*. – March 2015. – Vol. 167, No. 3. – P. 963-971.
2. *Scholz F.G., Phyllips N.G., Bucci S.J., Meinzer F.C., Goldstein G.* Hydraulic capacitance: Biophysics and Functional Significance Internal Water Sources in Relation to Tree Size // *Tree Physiology*. – 2001. – Vol. 4. – P. 341-361.
3. *Harvay B.R.* The theory of rise of sap in trees: Some historical and conceptual remarks // *Physics in Perspective*. – 2013. – Vol. 15. – P. 320 -358.
4. *Вернигоров Ю.М. Кипнис И.А.* Математическое моделирование распределения жидкости в ветвящихся капиллярных системах // *Вестник ДГТУ*. – 2010. – Т. 10, № 8 (51). – С. 1195-1206.
5. *Кипнис И.А., Вернигоров Ю.М.* Капиллярная модель габитуса растений // *Известия ЮФУ. Технические науки*. – 2013. – № 9 (146). – С. 250-255.
6. *Кипнис И.А., Вернигоров Ю.М.* Продвижение воды в системе несимметричных линейных капилляров // *Вестник ДГТУ*. – 2013. – № 3–4 (72–73). – С. 54-63.
7. *Smith D.M., Allen S.J.* Measurement of sap flow in plant stems // *Jornal of Experimental Botany*. – 1996. – Vol. 47, No. 305. – P. 1833-1844.
8. *Nicolova P.S., Blaschke R. Matyssek H. Pretzsch T. Seifert, Eur. J.* Combined application of computer tomography and light microscopy for analysis of condition xylem area IN COARSE ROOT OF European beech and Norway spruce // *HForest Res.* – 2009. – Vol. 128. – P. 145-153.
9. *Жиренко Н.Г.* Изучение сокодвижения в стволе дуба черешчатого термозлектрическим методом // *Лесоведение*. – 1994. – № 6. – С. 46-52.
10. *Жиренко Н.Г.* Физические основы транспорта воды в древесных растениях // *Материалы V международной научно-практической конференции / под ред. С.Е. Зюзина*. – Борисоглебск: ГОУ ВПО «Борисоглебский ГПИ», 2010. – С. 169-173.
11. *Жиренко Н.Г.* Оценка некоторых параметров водопроводящей системы дуба черешчатого // *Исследования естественных экосистем Прихоперья и сопредельных территорий (флора, фауна, экология, физиология)*. Вып. 6. – Борисоглебск, 2010. – С. 34-36.

12. *Borghetty M. Grace J., Raschi A.* Water transport in plant under climatic stress. – Cambridge University Press, Cambridge, 1993. – 300 p.
13. *Lee S.-J., Kim Y.* In vivo visualization of the water – refilling process un xylem vessels using X-ray micro –imaging // Oxford university press, *Annals of Botany*. – 2008. – Vol. 101. – P. 595-602.
14. *Zeiger T, Lond E.* *Plant Physiology*. – 3rd Edition, Sinauer Associated, Inc. Sunderland, MA, 2002. – 690 p.
15. *Scholz F.G., Phyllips N.G., Bucci S.J., Meinzer F.C., Goldstein G.* Hydraulic capacitance: Biophysics and Functional Significance od Internal Water Sources in Relation to Tree Size // *Tree Physiology*. – 2001. – Vol. 4. – P. 341-361.
16. *Крамер П.Д., Козловский Т.Т.* Физиология древесных растений: пер. с англ. – М.: Лесная промышленность, 1983. – 464 с.
17. *Тимонин А.К.* Ботаника: в 4 т. Т. 3. Высшие растения: учебник для студентов вузов. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 352 с.
18. *Zimte П., Вайлер Э.В., Кадерайт Й.В., Брезински А., Кёрнер К.* Ботаника: учебник для вузов: в 4 т. Т. 2.: на основе учебника Э. Страсбургера [и др.]: пер. с нем. Физиология растений / под ред. В.В. Чуба – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 496 с.
19. *Кипнис И.А., Вернигоров Ю.М.* Механизм продвижения воды в капиллярах ксилемы растений // *Вестник ДГТУ*. – 2014. – Т. 14, № 3 (78). – С. 78-88.
20. *Кипнис И.А., Вернигоров Ю.М.* Подъем воды в ксилеме растений с трахеидальной проводимостью // *Вестник ДГТУ*. – 2015. – Т. 2, № 81. – С. 131-145.

REFERENCES

1. *Pfautsch S., Renard J., Tjoelker M.G., Salih A.* Phloem as Capacitors: Radial Transfer of water into xylem of Trees Occurs Via Simplastic Transport in Ray Parenchima, *Plant Physiology*, March 2015, Vol. 167, No. 3, pp. 963-971.
2. *Scholz F.G., Phyllips N.G., Bucci S.J., Meinzer F.C., Goldstein G.* Hydraulic capacitance: Biophysics and Functional Significance Internal Water Sources in Relation to Tree Size, *Tree Physiology*, 2001, Vol. 4, pp. 341-361.
3. *Harvay B.R.* The theory of rise of sap in trees: Some historical and conceptual remarks, *Physicsin Perspective*, 2013, Vol. 15, pp. 320 -358.
4. *Vernigоров Yu.M. Kipnis I.A.* Matematicheskoe modelirovanie raspredeleniya zhidkosti v vetvyashchikhysya kapillyarnykh sistemakh [Mathematical modeling of fluid distribution in branching capillary systems], *Vestnik DGTU* [Bulletin of the Don State Technical University], 2010, Vol. 10, No. 8 (51), pp. 1195-1206.
5. *Kipnis I.A., Vernigоров Yu.M.* Kapillyarnaya model' gabitusa rasteniy [Capillary model habitus of plants], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2013, No. 9 (146), pp. 250-255.
6. *Kipnis I.A., Vernigоров Yu.M.* Prodvizhenie vody v sisteme nesimmetrichnykh lineynykh kapillyarov [Promotion of water in the system unbalanced line capillaries], *Vestnik DGTU* [Bulletin of the Don State Technical University], 2013, No. 3–4 (72–73), pp. 54-63.
7. *Smith D.M., Allen S.J.* Mtsurment of sap flow in plant stems, *Jornal of Experimental Botany*, 1996, Vol. 47, No. 305, pp. 1833-1844.
8. *Nicolova P.S., Blaschke R. Matyssek H. Pretzsch T. Seifert, Eur. J.* Combined application of computer tomography and light microscopy for analysis of condition xylem area IN COARSE ROOT OF European beech and Norway spruce, *HForest R\$es*, 2009, Vol. 128, pp. 145-153.
9. *Zhirenko N.G.* Izuchenie sokodvizheniya v stvole duba chereshchatogo termoelektricheskim metodom [The study of SAP flow in the trunk of English oak thermoelectric method], *Lesovedenie* [Dendrology], 1994, No. 6, pp. 46-52.
10. *Zhirenko N.G.* Fizicheskie osnovy transporta vody v drevesnykh rasteniyakh [The physical basis of water transport in woody plants], *Materialy V mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [roceedings of the V international scientific-practical conference under], Ed. by S.E. Zyuzina. Borisoglebsk: GOU VPO «Borisoglebskiy GPI», 2010, pp. 169-173.
11. *Zhirenko N.G.* Otsenka nekotorykh parametrov vodoprovodyashchey sistemy duba chereshchatogo [Evaluation of some parameters of the water-conducting system of oak-trees], *Issledovaniya estestvennykh ekosistem Prikhoper'ya i sopredel'nykh territoriy (flora, fauna, ekologiya, fiziologiya)* [Studies of natural ecosystems of the territory Prekhoperia and adjacent territories (flora, fauna, ecology, physiology)]. Issue 6. Borisoglebsk, 2010, pp. 34-36.

12. *Borghetty M., Grace J., Raschi A.* Water transport in plant under climatic stress. Cambridge University Press, Cambridge, 1993, 300 p.
13. *Lee S.-J., Kim Y.* In vivo visualization of the water – refilling process un xylem vessels using X-ray micro –imaging, *Oxford university press, Annals of Botany*, 2008, Vol. 101, pp. 595-602.
14. *Zeiger T., Lond E.* Plant Physiology. 3rd ed. Sinauer Associated, Inc. Sunderland, MA, 2002, 690 p.
15. *Scholz F.G., Phyllips N.G., Bucci S.J., Meinzer F.C., Goldstein G.* Hydraulic capacitance: Biophysics and Functional Significance od Internal Water Sources in Relation to Tree Size, *Tree Physiology*, 2001, Vol. 4, pp. 341-361.
16. *Kramer P.D., Kozlovskiy T.T.* Физиология древесных растений [Physiology of woody plants]: Тнrans. angl. Moscow: Lesnaya promyshlennost', 1983, 464 p.
17. *Timonin A.K.* Ботаника [Botany]: in 4 vol. Vol. 3. [Vysshie rasteniya: uchebnik dlya studentov vuzov [Higher Plants: A textbook for students]. Moscow: Izdatel'skiy tsentr «Akademiya», 2007, 352 p.
18. *Zitte P., Vayler E.V., Kaderayt Y.V., Brezinski A., Kerner K.* Ботаника: uchebnik dlya vuzov: v 4 t. T. 2.: na osnove uchebnika E. Strasburgera [i dr.]: per. s nem. Физиология растений [Botany. Textbook for high schools: in 4 vol.: based on the textbook E. Strasburger [et al.], Trans. with German. Vol. 2 of Plant Physiology], Ed. by V.V. Chuba. Moscow: Izdatel'skiy tsentr «Akademiya», 2008, 496 p.
19. *Kipnis I.A., Vernigorov Yu.M.* Mekhanizm prodvizheniya vody v kapillyarakh ksilemy rasteniy [Mechanism of promotion of water in the xylem capillaries plants], *Vestnik DGTU [Bulletin of the Don State Technical University]*, 2014, Vol. 14, No. 3 (78), pp. 78-88.
20. *Kipnis I.A., Vernigorov Yu.M.* Pod"em vody v ksileme rasteniy s trakheidal'noy provodimost'yu [The rise of water in the xylem of plants with tracheidal conductivity], *Vestnik DGTU [Bulletin of the Don State Technical University]*, 2015, Vol. 2, No. 81, pp. 131-145.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор М.А. Тамаркин.

Кипнис Иосиф Аншелевич – ООО «Научно-производственная фирма «КАСИОР»»; e-mail: ikipnis@yandex.ru; 119571, Москва, Ленинский проспект, 154; тел.: 89165205843; зам. генерального директора по научной работе; к.т.н.

Вернигоров Юрий Михайлович – Донской государственный технический университет; e-mail: jvernigorov@dstu.edu.ru; 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1; тел.: 89282291508; д.т.н.; профессор.

Kipnis Iosif Anshelevich – Scientific and production firm "KASIOR" ltd; e-mail: ikipnis@yandex.ru; 154, Leninskiy prospect, Moscow, 119571, Russia; phone: +79165205843; Associate General Director on science; cand. of eng. sc.

Vernigorov Yury Mihailovich – Don State Technical University; e-mail: jvernigorov@dstu.edu.ru; 1, Gagarina sq., Rostov-on-Don, 344000, Russia; phone: +79282291508; dr. of eng. sc.; professor.