

13. *Kravchenko Yu.A.* Sintez raznorodnykh znaniy na osnove ontologii [Synthesis of heterogeneous knowledge based on ontologies], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2012, No. 11 (136), pp. 216-221.
14. *Vagin V.N., Mikhaylov I.S.* Razrabotka metoda integratsii informatsionnykh sistem na osnove metamodelirovaniya i ontologii predmetnoy oblasti [Development of a method of integration of information systems based on a metamodeling and ontology], *Programmnye produkty i sistemy* [Software & Systems], 2008, pp. 22-26.
15. *Gavrilova T.A.* Ontologicheskiy podkhod k upravleniyu znaniyami pri razrabotke korporativnykh informatsionnykh sistem [The ontological approach to knowledge management in the development of corporate information systems], *Novosti iskusstvennogo intellekta* [News of artificial intelligence], 2003, No. 1 (55), pp. 24-30.
16. *Kravchenko Yu.A., Bova V.V.* Nechetkoe modelirovanie raznorodnykh znaniy v intellektual'nykh obuchayushchikh sistemakh [Fuzzy modeling of heterogeneous knowledge in intelligent tutoring systems], *Otkrytoe obrazovanie* [Open Education], 2013, No. 4 (99), pp. 70-74.
17. *Bova V.V., Zammoev A.U., Dukkardt A.N.* Evolyutsionnaya model' intellektual'nogo analiza raznorodnykh znaniy [An evolutionary model of mining heterogeneous knowledge], *Izvestiya KBNTs RAN* [Izvestiya of the Kabardino-Balkarian scientific centre of the RAS], 2013, No. 4 (54), pp. 7-13.
18. *Kuliev E.V., Lezhebokov A.A., Dukkardt A.N.* Podkhod k issledovaniyu okrestnostey v roevykh algoritмах dlya resheniya optimizatsionnykh zadach [Approach to research environs in swarms algorithm for solution of optimizing problems], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2014, No. 7 (156), pp. 15-25.
19. *Rodzina L.S., Rodzin S.I.* Mobil'nye obuchayushchie sistemy i ontologii [Mobile learning systems and ontologies], *Ontologicheskoe modelirovanie* [Ontological Modeling], 2013, No. 3 (9), pp. 70-81.
20. *Bova V.V., Leshchanov D.V., Kravchenko D.Yu., Novikov A.A.* Komp'yuternaya ontologiya: zadachi i metodologiya postroeniya [Computer ontology: objectives and methodology], *Informatika, vychislitel'naya tekhnika i inzhenernoe obrazovanie* [Information, computing and engineering education], 2014, No. 4 (19), pp. 18-24.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Ю.А. Гатчин.

Бова Виктория Викторовна – Южный федеральный университет; e-mail: vvbova@yandex.ru; 347928, г. Таганрог, Некрасовский, 44; тел.: 8863431651; кафедра систем автоматизированного проектирования; доцент.

Bova Victoria Victorovna – Southern Federal University; e-mail: vvbova@yandex.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371651; the department of computer aided design; associate professor.

УДК 519.1, 519.7

Р.А. Кочкаров, А.Н. Кочкарова

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА РАЗМЕЩЕНИЯ ЦЕНТРА НА М-ВЗВЕШЕННОМ ПРЕДФРАКТАЛЬНОМ ГРАФЕ

Современные исследования сложных систем таких, как информационные, электро-энергетические, Интернет, коммуникационные системы показывают, что структуры этих систем по истечении времени претерпевает определенные изменения, вызываемые различными внешними обстоятельствами. Структуру системы, произвольной (социальной, социально-экономической, технической, химико-биологической и т.п.) можно представить в виде графа. Граф – это абстрактный объект, как правило, вершины графа соответствуют элементам системы, а ребра – связям между элементами этой системы. Изменения структуры системы могут быть разовыми, а могут быть постоянными. Для

второго случая, вводится понятие структурной динамики – изменение структуры системы с течением времени. Несомненно, для описания структурной динамики лучше всего подходит аппарат предфрактальных графов. Одним из наиболее распространенных сценариев структурной динамики является рост структуры. Рост структуры – это регулярное появление новых элементов и связей в структуре системы. Рост структуры может происходить по строго сформулированным правилам, не исключая наличие в них фактора случайности. Рассматривается одно из возможных правил задающих структурную динамику сложных систем. Формальным представлением изменения структур систем по этому правилу являются самоподобные графы большой размерности, называемые фрактальными (предфрактальными). В формулировке задач планирования и проектирования (конструирования) содержатся требования и критерии искомой (оптимальной) конструкции или искомого плана. Зачастую эти критерии и требования являются противоречащими друг другу. Что приводит к появлению многокритериальной постановки оптимизационной задачи. Рассмотрен класс предфрактальных графов и многокритериальная постановка задачи размещения центра на M -взвешенном предфрактальном графе. Рассчитана оценка радиального критерия предфрактальных графов, предложен алгоритм размещения центра предфрактального графа при сохранении смежности старых ребер. Решение задачи может быть применено при в оптимизации размещения авиа и железнодорожных узлов, распределения и маршрутизации потоков, в исследовании распространения инфекционных заболеваний на посевах, в создании информационно-коммуникационных сетей с заданными характеристиками надежности и устойчивости.

Предфрактальный граф; многокритериальная постановка; M -взвешенный граф; алгоритм размещения центра.

R.A. Kochkarov, A.N. Kochkarova

MULTICRITERIA PROBLEM OF LOCATION CENTER ON M -WEIGHTED PREFRACTAL GRAPH

Modern studies of complex systems such as informational, electrical, Internet, communication systems show that the structure of these systems after the time undergoes certain changes caused by various external circumstances. Structure of the system, an arbitrary (social, socio-economic, technical, chemical, biological, etc.) can be represented as a graph. Graph is an abstract object, as a rule vertexes of graphs correspond to elements of the system, and the edges - relations between the elements of the system. Changes in the structure of the system can be single, and may be permanent. For the second case, we introduce the notion of structural dynamics - changes in the structure of the system over time. Undoubtedly, for the description of structural dynamics is best suited machine prefractal graphs. The growth of structure is one of the most common scripts of structural dynamics is. The growth of structure is a regular appearance of new elements and ties in the structure of the system. The growth of structure can occur on a strictly formulated rules, not excluding the presence of the factor of chance. In this paper, we consider one of the possible rules defining the structural dynamics of complex systems. Formal representation structures change systems according to this rule are self-similar large-scale graphs, called fractal (prefractal). In the formulation of the problems of planning and designing (design constructional) contains requirements and criteria required (optimal) construction or the desired plan. Often these criteria and requirements are contradictory. This leads to staging multicriteria optimization problem. Class of prefractal graphs and multicriteria problem of location center on M -weighted prefractal graph are discussed in the paper. Evaluation radial criterion of prefractal graphs are calculated, algorithm for location center on prefractal graph while preserving contiguity old edges are proposed. Solution of the problem can be applied by optimizing the placement of air and railway nodes, distributing and routing of streams in the study of infectious diseases of crops in the creation of informational and communication networks with specified characteristics of reliability and stability.

Prefractal graph; multicriteria formulation; M -weighted graph; algorithm for location center.

Многокритериальная постановка задачи. Рассматривается предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ [1], порожденный множеством затравок $H = \{H\}$ [2–4]. Каждому ребру $e^{(l)} \in E_L$ приписано M действительных чисел $w_i(e) = w_i(e^{(l)}) \in (\theta^{l-1}a, \theta^{l-1}b)$, $i = \overline{1, M}$, где $l = \overline{1, L}$ – ранг ребра, $a > 0$, $b > 0$ и $0 < \theta < \frac{a}{b}$ – коэффициент подобия [5–7].

Пусть X – подмножество, состоящее из p вершин множества V_L предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$. Через $d(x, v_i)$ обозначаем наикратчайшее из расстояний между вершинами множества X и вершиной v_i т.е. $d(x, v_i) = \min_{v_j \in X} [d(v_j, v_i)]$ в смысле зафиксированного набора весов из M .

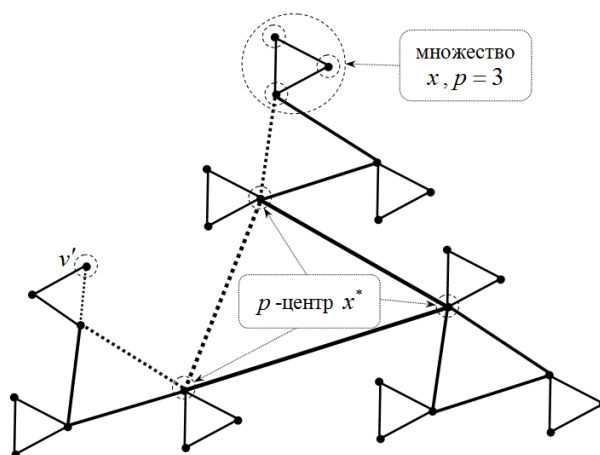


Рис. 1. Предфрактальный граф G_3 , смежность старых ребер которого сохраняется

Число разделения $s(x)$ для множества вершин X определяется следующим образом $s(x) = \max_{v_j \in V_L} [d(x, v_j)]$. Множество X^* , для которого $s(x^*) = \min_{x \subseteq V_L} [s(x)]$, называется p -центром предфрактального графа G_L .

На рис. 1 изображен предфрактальный граф G_3 с сохранением смежности старых ребер, веса ребер взвешены единицами. Кратчайшая цепь между множеством X и вершиной v' выделена пунктирной линией. Длина кратчайшей цепи или наикратчайшее из расстояний $d(x, v') = 4$. Число разделения p -центра $s(x^*) = 2$.

Всевозможные p -центры $\{x\}$ предфрактального графа G_L образуют множество допустимых решений (МДР) $X = X(G_L) = \{x\}$.

На множестве X определим векторно-целевую функцию (ВЦФ):

$$F(x) = (F_1(x), \dots, F_M(x), \dots, F_{2M}(x), F_{2M+1}(x), F_{2M+2}(x)), \quad (1)$$

$$F_i(x) = s_i(x) \rightarrow \min, i = 1, 2, \dots, M, \quad (2)$$

где $s_i(x)$ – число разделения множества x ;

$$F_{M+i}(x) = \sum_{t=1}^p \rho_{i,t} \rightarrow \min, i = 1, 2, \dots, M, \quad (3)$$

$\rho_{i,t}$ – радиус t -вершины p -центра;

$$F_{2M+1}(x) = \bar{h} \rightarrow \min, \quad (4)$$

\bar{h} – количество типов центров;

$$F_{2M+2}(x) = p \rightarrow \min, \quad (5)$$

p – количество вершин, составляющих p -центр.

Все критерии (2)-(5) ВЦФ (1) имеют конкретную содержательную интерпретацию. Веса, приписанные ребрам предфрактального графа G_L , могут отражать как конкретные ограничения (время, расстояние), налагаемые на систему служб (аварийные, пожарные депо, полицейские участки, больницы), так и общие затраты, выражаемые в условных единицах. На практике число разделения $s_i(x)$ может означать, например, расстояние от самого далекого потребителя (дома, квартала, организации) до системы служб.

Полученное значение числа p критерия (5) будет наименьшим числом аварийных служб, а p -центр – их оптимальным размещением, удовлетворяющим предъявляемым требованиям.

Поскольку M веса одного ребра несравнимы, паретовское множество включает в себя p -центры не одного набора весов, а каждого из M . Критерий $F_i(x)$ минимизирует число разделения, а критерий $F_{M+i}(x)$ минимизирует сумму радиусов p -центра по i -му набору весов, $i = \overline{1, M}$.

Алгоритм α_0 размещения центра предфрактального графа при сохранении смежности старых ребер. Рассмотрим предфрактальный граф G_L , порожденный множеством затравок $H = \{H\}$, смежность старых ребер которого сохраняется.

Опишем применение алгоритма для одного фиксированного набора весов $w_i(e)$ из M и далее обобщим для каждого i -го набора, $i = \overline{1, M}$ [8, 9].

Алгоритм α_0 начинает свою работу с подграф-затравок L -го ранга $z_{s_L}^{(L)}$, $s_L = \overline{1, n^{L-1}}$. На последнем шаге порождения предфрактального графа G_L каждая вершина графа G_{L-1} была замещена затравкой H . Поскольку при порождении предфрактального графа действует правило сохранения смежности старых ребер, к каждой вершине G_{L-1} склеиваются затравки одной из своих вершин.

Рассмотрим подграф-затравку $z_1^{(L)}$, так как затравка H является сильно связанной, то для всякой ее вершины можно найти путь к любой другой. Найдем кратчайшие цепи от «общей» вершины $x_1^{(L)}$ до оставшихся $(n-1)$ вершин $v_j^{(L)}$ подграф-затравки $z_1^{(L)}$. Среди кратчайших путей выбираем максимальный и оп-

ределяем число $s(x_1^{(L)}) = \max_{j_1=1, n-1} [d(x_1^{(L)}, v_{j_1}^{(L)})]$, которое называется *числом разделения вершины* $x_1^{(L)}$ подграф-затравки $z_1^{(L)}$.

Далее поочередно осуществляется поиск чисел разделения

$$s(x_{s_L}^{(L)}) = \max_{j_L=1, n-1} [d(x_{s_L}^{(L)}, v_{j_L}^{(L)})], s_L = \overline{1, n^{L-1}},$$

где $d(x_{s_L}^{(L)}, x_{s_L}^{(L)}) = 0$ для общих вершин всех подграф-затравок L -го ранга. Поиск кратчайших путей осуществляется с помощью известного алгоритма Дейкстры, оформленного в виде процедуры.

Рассмотрим далее подграф-затравки $(L-1)$ -го ранга $z_{s_{L-1}}^{(L-1)}, s_{L-1} = \overline{1, n^{L-2}}$.

Каждая из них в процессе порождения предфрактального графа G_{L-1} быласклеена к вершинам предыдущего в траектории графа G_{L-2} , так как действует правило сохранения смежности старых ребер. Тогда каждая подграф-затравка $(L-1)$ -го ранга $z_{s_{L-1}}^{(L-1)}$ также имеет одну общую вершину с соответствующими затравками $(L-2)$ -го ранга $z_{s_{L-2}}^{(L-2)}, s_{L-2} = \overline{1, n^{L-3}}$.

Найдем числа разделения для каждой общей вершины $x_{s_{L-1}}^{(L-1)}$ подграф-затравок $(L-1)$ -го ранга $z_{s_{L-1}}^{(L-1)}, s_{L-1} = \overline{1, n^{L-2}}$ следующим образом: $s(x_{s_{L-1}}^{(L-1)}) = \max [d(x_{s_{L-1}}^{(L-1)}, v_{j_{L-1}}^{(L-1)}) + s(x_{s_L}^{(L)})]$, где $d(x_{s_{L-1}}^{(L-1)}, x_{s_{L-1}}^{(L-1)}) = 0$. То есть находим кратчайшие пути от общей вершины $x_{s_{L-1}}^{(L-1)}$ до оставшихся $(n-1)$ вершин подграф-затравки $z_{s_{L-1}}^{(L-1)}$. Добавляем к длине кратчайшего пути $d(x_{s_{L-1}}^{(L-1)}, v_{j_{L-1}}^{(L-1)})$ соответствующее число разделения $s(x_{s_L}^{(L)})$, найденное для подграф-затравок предыдущего ранга, и среди получившихся сумм выбираем максимальную. Сумма $d(x_{s_{L-1}}^{(L-1)}, x_{s_{L-1}}^{(L-1)}) + s(x_{s_L}^{(L)}) = s(x_{s_L}^{(L)})$, так как $d(x_{s_{L-1}}^{(L-1)}, x_{s_{L-1}}^{(L-1)}) = 0$.

Указанным способом находим числа разделения $s(x_{s_l}^{(l)})$ для общих вершин $x_{s_l}^{(l)}, s_l = \overline{1, n^{l-1}}$ подграф-затравок $z_{s_l}^{(l)}$ до 2-го ранга включительно, то есть для всех $l = L, L-1, \dots, 2$.

На последнем шаге $l = 2$ найдены числа разделения $s(x_{s_2}^{(2)}), s_2 = \overline{1, n}$ для общих вершин $x_{s_2}^{(2)}$ подграф-затравок 2-го ранга $z_{s_2}^{(2)}$ и одной подграф-затравки первого ранга $z_{s_1}^{(1)} = z_1^{(1)}$. Подграф-затравка $z_1^{(1)}$, по сути, соответствует графу G_1 траектории G_1, G_2, \dots, G_L . Тогда для каждой вершины подграф-затравки $z_1^{(1)}$ найдено число $s(x_{s_2}^{(2)}), s_2 = \overline{1, n}$.

Далее рассматриваем подграф-затравку $Z_1^{(1)}$ как отдельный граф и находим для каждой ее вершины $x_{s_1}^{(1)}$ число разделения следующим образом: $s(x_{s_1}^{(1)}) = \max_{j_1=1, n-1} [d(x_{s_1}^{(1)}, v_{j_1}^{(1)}) + s(x_{s_2}^{(2)})]$. Вершина x_0 , для которой число разделения $s(x_0) = \min_{s_1=1, 2, \dots, n} [s(x_{s_1}^{(1)})]$ будет минимальным, является центром предфрактального графа G_L .

АЛГОРИТМ α_0

ВХОД:	взвешенный предфрактальный граф G_L .
ВЫХОД:	вершина x_0 – центр G_L .
ШАГ 1.	Для каждой вершины $x_{s_L}^{(L)}$ подграф-затравки L -го ранга $Z_{s_L}^{(L)}$, $s_L = \overline{1, n^{L-1}}$ найти число разделения $s(x_{s_L}^{(L)}) = \max_{j_L=1, n-1} [d(x_{s_L}^{(L)}, v_{j_L}^{(L)})]$, где $d(x_{s_L}^{(L)}, x_{s_L}^{(L)}) = 0$. Поиск кратчайших путей между вершинами осуществляется с помощью процедуры Дейкстры. Для всех $l = L-1, L-2, \dots, 2$ выполнить:
ШАГ $L-l+1$.	Для каждой вершины $x_{s_l}^{(l)}$ подграф-затравки l -го ранга $Z_{s_l}^{(l)}$ найти число разделения $s(x_{s_l}^{(l)}) = \max_{j_l} [d(x_{s_l}^{(l)}, v_{j_l}^{(l)}) + s(x_{s_{j_l}}^{(l+1)})]$, $s_l = \overline{1, n^{l-1}}$, где $d(x_{s_l}^{(l)}, x_{s_l}^{(l)}) = 0$. Поиск кратчайших путей между вершинами осуществляется с помощью процедуры Дейкстры.
ШАГ L .	Для каждой вершины $x_{s_1}^{(1)}$ подграф-затравки первого ранга $Z_1^{(1)}$ найти число разделения $s(x_{s_1}^{(1)}) = \max_{j_1=1, n-1} [d(x_{s_1}^{(1)}, v_{j_1}^{(1)}) + s(x_{s_{j_1}}^{(2)})]$, $s_1 = \overline{1, n}$, где $d(x_{s_1}^{(1)}, x_{s_1}^{(1)}) = 0$. Поиск кратчайших путей между вершинами осуществляется с помощью процедуры Дейкстры.
ШАГ $L+1$.	Из всех вершин $x_{s_1}^{(1)}$, $s_1 = 1, 2, \dots, n$ в качестве центра предфрактального графа G_L выбрать вершину x^* с наименьшим числом разделения: $s(x^*) = \min_{s_1=1, 2, \dots, n} [s(x_{s_1}^{(1)})]$.
	ПРОЦЕДУРА ДЕЙКСТРЫ
ВХОД:	взвешенный граф $G = (V, E)$.
ВЫХОД:	кратчайшие пути $d(x_i, v_j)$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$.

ТЕОРЕМА 1. Алгоритм α_0 осуществляет поиск центра предфрактального графа G_L , смежность старых ребер которого сохраняется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Алгоритм α_0 находит центр предфрактального графа в одной из вершин подграф-затравки первого ранга $z_1^{(1)}$. Этому способствуют два важных условия: первое – смежность старых ребер сохраняется, второе – взвешивание ребер осуществляется посредством коэффициента подобия $\theta < 1$.

Предположим, что центром предфрактального графа является одна из вершин $v_1^{(L)}$ подграф-затравки L -го ранга $z_1^{(L)}$, которой инцидентны только новые ребра L -го ранга и ни одно старое ребро. Ребра подграф-затравки $z_1^{(L)}$ смежны только ребрам $(L-1)$ -го ранга. Рассмотрим кратчайший путь до другой вершины L -го ранга $v_2^{(L)}$, которая не состоит ни в одном блоке с вершиной $v_1^{(L)}$, кроме блока $B^{(L)} = G_L$. Так как смежность старых ребер сохраняется, то кратчайший путь от вершины $v_1^{(L)}$ до $v_2^{(L)}$ будет проходить последовательно через вершины рангов $L, (L-1), (L-2), \dots, 1, 2, \dots, (L-1), L$. Длина кратчайшего пути $d(v_1^{(L)}, v_2^{(L)})$ будет представлять собой сумму длин кратчайших путей между вершинами разных рангов, то есть :

$$d(v_1^{(L)}, v_2^{(L)}) = d(v_1^{(L)}, v^{(L-1)}) + d(v^{(L-1)}, v^{(L-2)}) + \dots \\ \dots + d(v^{(2)}, v^{(1)}) + d(v^{(1)}, v^{(2)}) + \dots + d(v^{(L-2)}, v^{(L-1)}) + d(v^{(L-1)}, v_2^{(L)}).$$

В случае, когда вершина $v_1^{(L)}$ действительно является центром, нельзя найти никакой другой вершины с меньшим числом внешнего разделения.

Поскольку смежность старых ребер сохраняется, все кратчайшие пути от вершины $v_1^{(L)}$ до других вершин предфрактального графа, за исключением вершин L -го ранга подграф-затравки $z_1^{(L)}$, проходят через вершину $(L-1)$ -го ранга $v_1^{(L-1)}$, которая также принадлежит подграф-затравке $z_1^{(L)}$.

Рассмотрим худший случай, когда подграф-затравка представляет собой простой цикл. Тогда длина кратчайшего пути от вершины $v_1^{(L)}$ до самой отдаленной по числу ребер вершины L -го ранга $v_2^{(L)}$ равна:

$$d(v_1^{(L)}, v_2^{(L)}) = \theta^{L-1}a + (n-1)\theta^{L-2}a + (n-1)\theta^{L-3}a + \dots \\ \dots + (n-1)\theta^1a + (n-1)\theta^0a + (n-1)\theta^1a + \dots \\ \dots + (n-1)\theta^{L-3}a + (n-1)\theta^{L-2}a + (n-1)\theta^{L-1}a.$$

Длина кратчайшего пути от вершины $(L-1)$ -го ранга $v_1^{(L-1)}$ до самой отдаленной по числу ребер вершины L -го ранга $v_2^{(L)}$ равна:

$$\begin{aligned}
d(v_1^{(L-1)}, v_2^{(L)}) &= (n-1)\theta^{L-2}a + (n-1)\theta^{L-3}a + \dots \\
&\dots + (n-1)\theta^1a + (n-1)\theta^0a + (n-1)\theta^1a + \dots \\
&\dots + (n-1)\theta^{L-3}a + (n-1)\theta^{L-2}a + (n-1)\theta^{L-1}a.
\end{aligned}$$

Видим, что $d(v_1^{(L-1)}, v_2^{(L)}) < d(v_1^{(L)}, v_2^{(L)})$ ровно на вес одного ребра L -го ранга $\theta^{L-1}a$. Рассмотрим теперь кратчайший путь от вершины $v_1^{(L-1)}$ до $v_1^{(L)}$. В худшем случае, когда порождающей затравкой является простой цикл, кратчайший путь будет составлять $(n-1)$ ребер, в этом случае длина $d(v_1^{(L-1)}, v_1^{(L)}) = (n-1)\theta^{L-1}b$.

Сравнивая расстояния $d(v_1^{(L-1)}, v_1^{(L)})$ и $d(v_1^{(L)}, v_2^{(L)})$, получаем $d(v_1^{(L-1)}, v_1^{(L)}) < d(v_1^{(L)}, v_2^{(L)})$, так как $(n-1)\theta^{L-1}b < (n-1)\theta^{L-2}a$ в силу правила взвешивания предфрактального графа G_L . Тогда $d(v_1^{(L-1)}, v_2^{(L)}) < d(v_1^{(L)}, v_2^{(L)})$ и $d(v_1^{(L-1)}, v_1^{(L)}) < d(v_1^{(L)}, v_2^{(L)})$, т.е. длины худших (максимальных) кратчайших путей от вершины $(L-1)$ -го ранга $v_1^{(L-1)}$ до вершины $v_2^{(L)}$ и от вершины $(L-1)$ -го ранга $v_1^{(L-1)}$ до вершины $v_1^{(L)}$ меньше длины кратчайшего пути от вершины $v_1^{(L)}$ до самой отдаленной по числу ребер вершины L -го ранга $v_2^{(L)}$, или иначе: число разделения вершины $(L-1)$ -го ранга меньше числа разделения вершины L -го ранга $s(v^{(L-1)}) < s(v^{(L)})$. Таким образом, никакая вершина L -го ранга, которой инцидентны новые ребра L -го ранга, не может быть внешним центром предфрактального графа G_L .

Предположим теперь, что внешним центром предфрактального графа является вершина $(L-1)$ -го ранга $v_1^{(L-1)}$, которой могут быть инцидентны только ребра L -го и $(L-1)$ -го рангов.

Поскольку смежность старых ребер сохраняется, то все кратчайшие пути от вершины $v_1^{(L-1)}$ до других вершин предфрактального графа будут проходить через две вершины: вершину $(L-2)$ -го ранга $v_1^{(L-2)}$ и вершину $(L-1)$ -го ранга подграф-затравки $z_1^{(L-1)}$.

Рассмотрим худший случай, когда подграф-затравка представляет собой простой цикл. Тогда длина кратчайшего пути от вершины $v_1^{(L-1)}$ до самой отдаленной по числу ребер вершины L -го ранга $v_2^{(L)}$ равна:

$$\begin{aligned}
d(v_1^{(L-1)}, v_2^{(L)}) &= \theta^{L-2}a + (n-1)\theta^{L-3}a + \dots \\
&\dots + (n-1)\theta^1a + (n-1)\theta^0a + (n-1)\theta^1a + \dots \\
&\dots + (n-1)\theta^{L-3}a + (n-1)\theta^{L-2}a + (n-1)\theta^{L-1}a.
\end{aligned}$$

Длина кратчайшего пути от вершины $(L-2)$ -го ранга $v_1^{(L-2)}$ до самой отдаленной по числу ребер вершины L -го ранга $v_2^{(L)}$ равна:

$$\begin{aligned} d(v_1^{(L-2)}, v_2^{(L)}) &= (n-1)\theta^{L-3}a + \dots \\ &\dots + (n-1)\theta^1a + (n-1)\theta^0a + (n-1)\theta^1a + \dots \\ &\dots + (n-1)\theta^{L-3}a + (n-1)\theta^{L-2}a + (n-1)\theta^{L-1}a. \end{aligned}$$

Видим, что $d(v_1^{(L-2)}, v_2^{(L)}) < d(v_1^{(L-1)}, v_2^{(L)})$, т.е. меньше ровно на вес одного ребра $(L-1)$ -го ранга $\theta^{L-2}a$.

Продолжая рассматривать вершины разных рангов в качестве внешнего центра, предположим теперь, что внешним центром предфрактального графа является вершина 2-го ранга $v_1^{(2)}$, которой могут быть инцидентны только ребра рангов $L, L-1, L-2, \dots, 2$. Длина кратчайшего пути от вершины $v_1^{(2)}$ до самой отдаленной по числу ребер вершины L -го ранга $v_2^{(L)}$ равна:

$$\begin{aligned} d(v_1^{(2)}, v_2^{(L)}) &= \theta^1a + (n-1)\theta^0a + (n-1)\theta^1a + \dots \\ &\dots + (n-1)\theta^{L-3}a + (n-1)\theta^{L-2}a + (n-1)\theta^{L-1}a. \end{aligned}$$

Длина кратчайшего пути от вершины первого ранга $v_1^{(1)}$ до самой отдаленной по числу ребер вершины L -го ранга $v_2^{(L)}$ равна:

$$\begin{aligned} d(v_1^{(1)}, v_2^{(L)}) &= (n-1)\theta^0a + (n-1)\theta^1a + \dots \\ &\dots + (n-1)\theta^{L-3}a + (n-1)\theta^{L-2}a + (n-1)\theta^{L-1}a. \end{aligned}$$

Видим, что $d(v_1^{(1)}, v_2^{(L)}) < d(v_1^{(2)}, v_2^{(L)})$, т.е. меньше ровно на вес одного ребра второго ранга θ^1a .

Рассмотрим теперь кратчайший путь от вершины $v_1^{(1)}$ до $v_1^{(L)}$. В худшем случае, порождающая затравка – простой цикл, тогда длина кратчайшего пути $d(v_1^{(1)}, v_1^{(L)}) = (n-1)\theta^1b + (n-1)\theta^2b + \dots + (n-1)\theta^{L-1}b$.

Сравнивая расстояния $d(v_1^{(1)}, v_1^{(L)})$ и $d(v_1^{(2)}, v_2^{(L)})$, получаем $d(v_1^{(1)}, v_1^{(L)}) < d(v_1^{(2)}, v_2^{(L)})$. Тогда $d(v_1^{(1)}, v_2^{(L)}) < d(v_1^{(2)}, v_2^{(L)})$ и $d(v_1^{(1)}, v_1^{(L)}) < d(v_1^{(2)}, v_2^{(L)})$, т.е. число разделения вершины первого ранга меньше числа разделения вершины второго ранга $s(v^{(1)}) < s(v^{(2)})$. Таким образом, никакая вершина второго ранга, которой инцидентны только ребра рангов $L, L-1, L-2, \dots, 2$, не может быть центром предфрактального графа

А так как на предфрактальном графе G_L каждая вершина достижима из всякой другой вершины, то на нем можно найти центр. Исключив все вершины рангов $L, L-1, L-2, \dots, 2$, получаем, что центром является одна из вершин первого ранга, которой инцидентны ребра разных рангов $L, L-1, \dots, 1$.

Для того, чтобы найти центр предфрактального графа, достаточно найти числа разделения для каждой вершины первого ранга, то есть для вершин, которым инцидентны старые ребра первого ранга. ◀

СЛЕДСТВИЕ 1. Алгоритм α_0 выделяет центр $x_{i,0}$, $i = \overline{1, M}$ предфрактального графа G_L , смежность старых ребер которого сохраняется [10–12].

Алгоритм осуществляет поиск центра для фиксированного набора весов. Применение алгоритма по каждому набору весов $i = \overline{1, M}$ позволяет находить центры $x_{i,0}$.

ТЕОРЕМА 2. Вычислительная сложность алгоритма α_0 на предфрактальном графе $G_L = (V_L, E_L)$, порожденном затравкой $H = (W, Q)$, равна $O(4n^2 \cdot N)$, где $|V_L| = N$ и $|W| = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

На первом шаге алгоритм работает на подграф-затравках L -горанга $z_{s_L}^{(L)}$, где находит числа внешнего разделения вершин $x_{s_L}^{(L)}$, $s_L = 1, 2, \dots, n^{L-1}$. Поиск числа внешнего разделения на отдельно взятой подграф-затравке состоит из поиска кратчайших путей от вершины $x_{s_L}^{(L)}$ до других вершин подграф-затравки; выбора максимального из кратчайших путей. Поиск кратчайших путей осуществляется с помощью процедуры Дейкстры, вычислительная сложность которого равна n^2 , а выбор максимального элемента или, в худшем случае, сортировка элементов по возрастанию требует выполнения также n^2 операций. Тогда поиск числа внешнего разделения на одной подграф-затравке требует в сумме $2n^2$ операций. Число всех подграф-затравок L -го ранга равно n^{L-1} , для выполнения шага 1 или поиска всех $s(x_{s_L}^{(L)})$, $s_L = 1, 2, \dots, n^{L-1}$ требуется $2n^2 \cdot n^{L-1} = 2n^{L+1}$ операций.

На следующем шаге осуществляется поиск чисел разделения для вершин $x_{s_{L-1}}^{(L-1)}$, $s_{L-1} = 1, 2, \dots, n^{L-2}$, что требует $2n^2 \cdot n^{L-2} = 2n^L$ операций. Продолжая поиск центров вершин до второго ранга включительно, получаем: $2n^{L+1} + 2n^L + 2n^{L-1} + \dots + 2n^3$. На последнем шаге осуществляется поиск кратчайших путей попарно между всеми вершинами $x_{s_1}^{(1)}$, $s_1 = 1, 2, \dots, n$, что требует $n^2 \cdot n = n^3$ операций плюс время поиска максимального элемента.

В сумме получаем:

$$\begin{aligned} & 2n^{L+1} + 2n^L + 2n^{L-1} + \dots + 2n^3 + n^3 + n^2 \leq \\ & \leq 2n^{L+1} + 2n^L + 2n^{L-1} + \dots + 2n^3 + 2n^2 + n^3 = 2 \cdot \frac{n^{L+1} \cdot n - n^2}{n-1} + n^3 \leq \\ & \leq 2n^{L+2} - n^2 + n^3 \leq 2n^{L+2} + n^3 \leq 2n^{L+2} + 2n^{L+2} = 4n^2 \cdot n^L = 4n^2 \cdot N. \end{aligned}$$

Так вычислительная сложность алгоритма α_0 равна $O(4n^2 \cdot N)$. ◀

СЛЕДСТВИЕ 2. Вычислительная сложность алгоритма α_0 поиска центров $x_{i,0}$, $i = \overline{1, M}$ на предфрактальном графе $G_L = (V_L, E_L)$, порожденном затравкой $H = (W, Q)$, равна $O(4n^2 \cdot N \cdot M)$, где $|V_L| = N$ и $|W| = n$.

Вычислительная сложность алгоритма α_0 поиска центра $x_{i,0}$ для одного набора весов равна $O(4n^2 \cdot N)$. Вычислительная сложность поиска центра по каждому набору весов $i = \overline{1, M}$ увеличится в M раз и составит $O(4n^2 \cdot N \cdot M)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Вычислительная сложность алгоритма α_0 меньше вычислительной сложности алгоритма Флойда в $\frac{1}{4}n^{L-2} \cdot N$ раз на предфрактальном графе.

ТЕОРЕМА 3. Алгоритм α_0 выделяет центр $x_{i,0}$ на предфрактальном графе G_L , оптимальный по критериям $F_{2M+1}(x_{i,0})$ и $F_{2M+2}(x_{i,0})$, и оцениваемый по критериям $a \frac{\theta^L - 1}{\theta - 1} \leq F_i(x_{i,0}) \leq b(n-1) \frac{\theta^L - 1}{\theta - 1}$, $i = 1, 2, \dots, 2M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Критерии $F_i(x_{i,0})$, $i = 1, 2, \dots, M$ минимизирует число разделения p -центра.

Алгоритм α_0 выделяет центр $x_{i,0}$ предфрактального графа. Так как смежность старых ребер сохраняется, то кратчайшие пути от центра до вершин L -го ранга проходят последовательно через ребра подграф-затравок рангов $1, 2, \dots, L$. Рассмотрим худший случай, когда, проходя по каждой подграф-затравке, нужно пройти $(n-1)$ ребер. В этом случае число разделения составит:

$$\begin{aligned} s(x_{i,0}) &\leq (n-1)b + (n-1)\theta b + \dots + (n-1)\theta^{L-1}b = \\ &= (n-1)b(1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^{L-1}) = b(n-1) \frac{\theta^L - 1}{\theta - 1}. \end{aligned}$$

В минимальном случае:

$$s(x_{i,0}) \geq a + \theta a + \dots + \theta^{L-1}a = a(1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^{L-1}) = a \frac{\theta^L - 1}{\theta - 1}.$$

То есть, первый критерий $F_i(x_{i,0})$, $i = 1, 2, \dots, M$ оценивается:

$$a \frac{\theta^L - 1}{\theta - 1} \leq F_i(x_{i,0}) \leq b(n-1) \frac{\theta^L - 1}{\theta - 1}.$$

Критерии $F_i(x_{i,0})$, $i = M+1, M+2, \dots, 2M$ минимизирует сумму радиусов p -центра. Поскольку p -центр состоит из одной вершины, то радиус равен числу разделения и оценивается: $a \frac{\theta^L - 1}{\theta - 1} \leq F_i(x_{i,0}) \leq b(n-1) \frac{\theta^L - 1}{\theta - 1}$, $i = M+1, M+2, \dots, 2M$.

Критерий $F_{2M+1}(x_{i,0})$ минимизирует количество типов центров. Так как p -центр состоит из одной вершины, то критерий принимает свое минимально возможное значение, равное единице: $F_{2M+1}(x_{i,0}) = \hbar = 1$.

Критерий $F_{2M+2}(x_{i,0})$ – количество вершин p -центра также принимает свое минимальное значение, равное единице: $F_{2M+2}(x_{i,0}) = p = 1$. ◀

Некоторые приложения интервальных предфрактальных графов. В реальных условиях при моделировании [13–15] сложных систем, например, глобальной сети Интернет, измерения параметров (пропускной способности узла, скорость обработки и др.) производятся с некоторыми погрешностями или задаются в диапазонах. В таком случае взвешивание (назначение) осуществляется недетерминированными весами: временными рядами, многими весами, интервальными числами.

В то же время динамические свойства системы (изменение количества узлов, появление новых и исчезновение старых связей) позволяют решать специфические задачи. Например, задача маршрутизации потоков в беспроводной сети, в которой в качестве узлов выступают wi-fi точки, а связи могут меняться во времени.

В настоящей работе предложена многокритериальная постановка задачи размещения p -центра на M -взвешенном предфрактальном графе, а также эффективный алгоритм решения. Решение задачи может быть применено при в оптимизации размещения авиа и железнодорожных узлов, распределения и маршрутизации потоков, в исследовании распространения инфекционных заболеваний на посевах, в создании информационно-коммуникационных сетей с заданными характеристиками надежности и устойчивости.

Предфрактальные графы и в целом аппарат динамических графов предполагает использование в системах с большим количеством узлов (агентов, вершин) и изменяющихся связей между ними.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.* Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990. – 383 с.
2. *Kigami J.* Analysis on fractals / Volume 143 of Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
3. *Kochkarov A., Perepelitsa V.* Fractal Graphs and Their Properties // ICM 1998 Berlin, International Congress of Mathematicians, Abstracts of Short Communications and Posters. – P. 347.
4. *Barlow M.T.* Diffusions on fractals // Lectures on probability theory and statistics. Springer Verlag, Berlin, 1998. – P. 1-121.
5. *Салтагаров С.И., Кочкаров А.М.* Распознавание предфрактального графа с полной двудольной загрузкой // Деп. ВИНТИ № 2322-В2003.
6. *Перепелица В.А.* Многокритериальные модели и методы для задач оптимизации на графах. LAP LAMBERT Academic Publication, 2013. – 330 с.
7. *Pareto V.* Manuel d'economie politique. – Paris: Giard, 1909.
8. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.
9. *Riehl J., Hespanha J.P.* Fractal graph optimization algorithms // Proc. of the 44th Conf. on Decision and Contr., 2005. – P. 2188-2193.
10. *Кочкаров А.А., Салтагаров С.И., Кочкаров Р.А.* О количественных оценках топологических характеристик предфрактальных графов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2004. – № 8 (43). – С. 298-301.
11. *Ehrgott M., Gandibleux X.* A survey and annotated bibliography of multiobjective combinatorial optimization // OR Spektrum, 2000. – № 22. – P. 425-460.
12. *Krön B.* Green functions on self-similar graphs and bounds for the spectrum of the Laplacian // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). – 2002. – No. 52(6). – P. 1875-1900.

13. *Dorogovtsev S.N., Mendes J.F.F.* Evolution of networks: From Biological Nets to the Internet and WWW. – Oxford: Oxford University Press, 2003.
14. *Albert R., Barabasi A.* Statistical mechanics of complex networks // *Reviews of Modern Physics*. – 2002. – No. 74. – P. 47-97.
15. *Boltt E.M., ben-Avraham D.* What is Special about Diffusion on Scale-Free Nets? // *New J. Phys.* – 2005. – Vol. 7, No. 26. – P. 1-21.

REFERENCES

1. *Emelichev V.A., Mel'nikov O.I., Sarvanov V.I., Tyshkevich R.I.* Lektsii po teorii grafov [Lectures on graph theory]. Moscow: Nauka, 1990, 383 p.
2. *Kigami J.* Analysis on fractals / Volume 143 of Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
3. *Kochkarov A., Perepelitsa V.* Fractal Graphs and Their Properties, *ICM 1998 Berlin, International Congress of Mathematicians, Abstracts of Short Communications and Posters*, pp. 347.
4. *Barlow M.T.* Diffusions on fractals, *Lectures on probability theory and statistics. Springer Verlag, Berlin, 1998*, pp. 1-121.
5. *Salpagarov S.I., Kochkarov A.M.* Raspoznavanie predfraktal'nogo grafa s polnoy dvudol'noy zatravkoy [Recognition of prefractal graphs with complete bipartite seed], Dep. VINITI No. 2322-V2003.
6. *Perepelitsa V.A.* Mnogokriterial'nye modeli i metody dlya zadach optimizatsii na grafakh [Multicriteria models and methods for optimization problems on graphs]. LAP LAMBERT Academic Publication, 2013, 330 p.
7. *Pareto V.* Manuel d'economie politique. Paris: Giard, 1909.
8. *Demidovich B.P., Maron I.A.* Osnovy vychislitel'noy matematiki [Foundations of computational mathematics]. Moscow: Nauka, 1970, 664 p.
9. *Riehl J., Hespanha J.P.* Fractal graph optimization algorithms, *Proc. of the 44th Conf. on Decision and Contr.*, 2005, pp. 2188-2193.
10. *Kochkarov A.A., Salpagarov S.I., Kochkarov R.A.* O kolichestvennykh otsenkakh topologicheskikh kharakteristik predfraktal'nykh grafov [Quantitative estimates of topological characteristics of prefractal graphs], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences]*, 2004, No. 8 (43), pp. 298-301.
11. *Ehrgott M., Gandibleux X.* A survey and annotated bibliography of multiobjective combinatorial optimization, *OR Spektrum*, 2000, No. 22, pp. 425-460.
12. *Krön B.* Green functions on self-similar graphs and bounds for the spectrum of the Laplacian, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 2002, No. 52 (6), pp. 1875-1900.
13. *Dorogovtsev S.N., Mendes J.F.F.* Evolution of networks: From Biological Nets to the Internet and WWW. – Oxford: Oxford University Press, 2003.
14. *Albert R., Barabasi A.* Statistical mechanics of complex networks, *Reviews of Modern Physics*, 2002, No. 74, pp. 47-97.
15. *Boltt E.M., ben-Avraham D.* What is Special about Diffusion on Scale-Free Nets?, *New J. Phys.*, 2005, Vol. 7, No. 26, pp. 1-21.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор Д.М. Эдиев.

Кочкаров Расул Ахматович – Финансовый университет при Правительстве РФ; e-mail: rasul_kochkarov@mail.ru; 125993, Москва, Ленинградский просп., 49; тел.: 89263879473; заместитель директора по информационным технологиям; к.э.н.

Кочкарова Асият Нерчуквна – ГОУ ВПО «Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия»; e-mail: Kochkarova-Asya@mail.ru; 369000, Карачаево-Черкесская республика, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36; тел.: 89283975277; кафедра математики; ассистент.

Kochkarov Rasul Akhmatovich – Financial University under the Government of the Russian Federation; e-mail: rasul_kochkarov@mail.ru; 125993, Moscow, Leningradskiy pr., 49; phone: +79263879473; deputy director of information technology; cand. of ec. sc.

Kochkarova Asiyat Nerchukovna – The North Caucasian state humanitarian and technological academy; e-mail: Kochkarova-Asya@mail.ru; 369000, Karachay-Cherkessian Republic, Cherkessk, Stavropolskaya street, 36; phone: +79283975277; the department of mathematics; assistant.