

17. *Pegat A.* Nechetkoe modelirovanie i upravlenie [Fuzzy modeling and control]. Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy, 2009, 798 p.
18. *Borisov V.V., Kruglov V.V., Fedulov A.S.* Nechetkie modeli i seti [Fuzzy models and networks]. Moscow: Goryachaya liniya – Telekom, 2007, 284 p.
19. *Gladkov L.A.* Integrirovannyi algoritm resheniya zadach razmeshcheniya i trassirovki na osnove nechetkikh geneticheskikh metodov [The integrated algorithm of the decision of problems of placement and routing on the basis of fuzzy genetic methods], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2011, No. 7 (120), pp. 22-30.
20. *Gladkov L.A.* Gibridnyy geneticheskiy algoritm resheniya zadachi razmeshcheniya elementov SBIS s uchetom trassiruемости soedineniy [A hybrid genetic algorithm for solving the placement of elements VLSI traceability connections], *Vestnik rostovskogo gosudarstvennogo universiteta putey soobshcheniya* [Vestnik of Rostov State University of Railway Engineering], 2011, No. 3, pp. 58-66.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Л.С. Лисицына.

Гладков Леонид Анатольевич – Южный федеральный университет; e-mail: leo@tgn.sfedu.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371625; кафедра САПР; доцент.

Гладкова Надежда Викторовна – тел.: 88634393260; кафедра ДМ и МО; старший преподаватель.

Лейба Сергей Николаевич – тел.: 88534371625; кафедра САПР; аспирант.

Gladkov Leonid Anatol'evich – Southern Federal University; e-mail: leo@tgn.sfedu.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: 88634371625; the department of CAD; associate professor.

Gladkova Nadezhda Viktorovna – phone: +78634393260; the department of DM&MO; senior teacher.

Leiba Sergej Nikolaevich – phone: +78534371625; the department of CAD; postgraduate student.

УДК 004.023

А.В. Мартынов, В.М. Курейчик

ГИБРИДНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА*

Целью данной работы является разработка эффективного гибридного метода для решения задачи коммивояжера на основе эволюционного и роевого методов. Муравьиный и генетический алгоритмы являются альтернативами для решения задач дискретной оптимизации. Генетический алгоритм – это эвристический алгоритм поиска, используемый для решения задач оптимизации и моделирования путём случайного подбора, комбинирования и вариации искомым параметров с использованием механизмов, аналогичных естественному отбору в природе, а муравьиный, в свою очередь, использует поведенческие инструменты децентрализованной самоорганизующейся колонии муравьёв для поиска оптимального маршрута в графовой модели. Предложен гибридный алгоритм решения задачи коммивояжера на основе муравьиного и генетического алгоритмов, при этом гибридизация заключается не только в последовательном использовании операторов муравьиного и генетического алгоритмов, но и учёт генетической информации агентом муравьиного алгоритма при принятии решения в процессе построения пути. Операторы генетического алгоритма используются для рекомбинации решений-кандидатов, полученных в ходе работы муравьиного алгоритма. Представлена эвристика оценки найденных решений агентами

* Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда в ЮФУ (проект № 15-07-05523).

муравьиного алгоритма для дальнейшей их селекции генетическим алгоритмом. В ходе проделанной работы была разработана программа ЭВМ, реализующая описанный алгоритм. Представлено сравнение результатов тестирования муравьиного и гибридного алгоритмов на международных бенчмарках. Полученные в ходе экспериментов результаты показали, что гибридный алгоритм осуществляет поиск решений более качественно, чем обычный муравьиный алгоритм.

Муравьиный алгоритм; генетический алгоритм; роевой интеллект; коммивояжер; дискретная оптимизация.

A.V. Martinov, V.M. Kureichik

HYBRID APPROACH FOR TRAVELLING SALESMAN PROBLEM

The purpose of this work is to develop an effective hybrid method for solving the traveling salesman problem based on evolutionary and swarm techniques. Ant colony optimization and genetic algorithms are alternatives for solving discrete optimization problems. Genetic algorithm is a heuristic search algorithm used for solving optimization problems and modeling by random selection, combinations and variations of the unknown parameters using mechanisms similar to natural selection in nature, and the ant colony optimization, in turn, uses a decentralized self-organizing behavioral tools of ant colony which search the optimal route in the graph model. This paper presents a combination study for genetic algorithm and ant colony optimization applied in the travelling salesman problem. This hybridization is not only successively use of genetic algorithm and ant colony optimization, but also integrating the genetic information in ant colony optimization selection path rule. The genetic algorithm operators used for recombination of candidate solutions obtained in the course of the ant colony optimization algorithm. A heuristic evaluation of the solutions found by agents of ant algorithm to further their selection genetic algorithm is presented. In the course of this work was developed computer programs that implements the algorithm described above. A comparison of the test results and the hybrid ant algorithms on international benchmarks is presented. The results obtained in the experiments showed that hybrid algorithm searches solution higher quality than the conventional ant algorithm.

Ant colony optimization; genetic algorithm; swarm intelligence; traveling salesman problem; discrete optimization.

Введение. Муравьиный алгоритм (Ant colony optimization, MA) – метод, разработанный на основе поведения реальной муравьиной колонии, в основе которого лежит способность находить муравьями кратчайший путь к пище, используя феромон [1]. Этот метод позволяет находить эффективные решения для сложных задач комбинаторной оптимизации, таких как задача коммивояжера (Traveling Salesman Problem, TSP) [2]. Задача коммивояжера является одной из основных проблем комбинаторной оптимизации на графовых моделях, на поиск эффективного решения которой тратится много усилий [3]. Целевой функцией (ЦФ) данной задачи является минимальная длина гамильтонова цикла, проходящего через множество вершин графа [4, 5]. В MA поиск оптимума задачи коммивояжера осуществляется путём использования агентов (муравьев), оставляющих феромон на пройденном маршруте, а именно, чем короче путь, тем больше концентрация феромона и, соответственно, выше вероятность использования этого пути последующими агентами. Оптимальным маршрутом будет тот, где концентрация феромона самая высокая [6]. MA выбран, потому что является эффективным методом решения задачи коммивояжера [7]. Тем не менее, данный метод имеет один недостаток – существует вероятность достижения локального оптимума решения.

Генетический алгоритм (ГА) – метод, за основу которого взят биологический процесс эволюции живых организмов, является эффективным для решения задач, пространство решения которых неизвестно [8]. Решения в ГА выражены в виде генетического кода (хромосом) агента, а каждый агент имеет свой уникальный код. ГА представляет собой набор агентов, которые способны порождать новые

лучшие решения, используя различные стратегии поиска оптимума: кроссинговер, мутацию, селекцию и другие. Существует большое количество разных модификаций ГА, отличия которых, в основном, заключаются в представлении хромосом и реализации генетических операторов. ГА часто сочетают с методами локального поиска для получения качественных решений.

В данной работе решение задачи коммивояжера осуществляется путем включения ГА в процессе работы муравьиного алгоритма. МА, в свою очередь, производит поиск кратчайшего маршрута в графе, поддерживая наиболее приспособленных агентов, передающих генетическую информацию последующим поколениям через кроссинговер и мутацию [9].

Постановка задачи. Задачу коммивояжера сформулируем следующим образом. Дан конечный полностью связанный граф $G=(X,U)$, где U – ребра графа, представляющие собой пути между городами; $X=\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ – общее множество вершин (городов) задачи коммивояжера; x_i – обозначает i позицию вершины ($i=1, 2, \dots, N$); N – количество вершин графа.

Требуется найти минимальную длину гамильтонова цикла графа $\sum_{i,j \in N} c_{i,j} x_{ij}$, при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N \cup \{d\}} x_{ij} &= 1, \quad \forall i \in N; \\ \sum_{i \in N \cup \{d\}} x_{ij} &= 1, \quad \forall j \in N; \\ \sum_{j \in N} x_{o,j} &= 1; \\ \sum_{i \in N} x_{i,d} &= 1; \\ \sum_{i \in N \cup \{o\}} x_{ij} - \sum_{i \in N \cup \{d\}} x_{ji} &= 0, \quad \forall j \in N; \end{aligned}$$

Описание алгоритма. Для дальнейшего описания алгоритма введем следующие обозначения:

M – количество агентов; $\tau_{i,j}(t)$ – количество феромона, отложенного на пути $D_{ij}(t)$ между вершинами x_i и x_j , для первой итерации алгоритма значение $\tau_{i,j}(t) = \tau_0$; D_{ij} – геометрическое расстояние в двумерном пространстве между вершинами x_i и x_j ; $g_{i,j}(t)$ – генетическая информация агента, на первой итерации алгоритма; $g_{i,j}(t) = g_0$, g_0 задается пользователем; $0 < \rho < 1$ – коэффициент испарения феромона; $\Delta\tau_{i,j}(t)$ – переменная, показывающая, насколько увеличится количество феромона на ребре $D_{ij}(t)$ в промежутке времени $[(t-1), t]$; $J_{i,k}$ – множество не посещенных вершин для агента k , расположенного в вершине x_i ; $\eta_{ij}(t)$ – привлекательность пути от вершины x_i к вершине x_j , определяется как: $\eta_{ij} = 1/D_{ij}$; $L_k(t)$ – длина маршрута, построенного агентом k ; $T_k(t)$ – маршрут, построенный агентом k ; α, β, γ – параметры, определенные пользователем, они же – параметры привлекательности перехода в вершину, определяющие относительную важность феромона в зависимости от расстояния. При $\alpha = 0$ агент стремится выбирать кратчайшее ребро, при $\beta = 0$ – ребро с наибольшим количеством феромона, γ же отвечает за степень важности генетической информации агента.

Каждый агент размещается в одной из вершин графа случайно. После этого запускается процедура поиска маршрута для каждого агента.

Поиск пути. На этом этапе введем понятие генетической информации ребра, являющейся показателем качества данного ребра, таким же как и феромон. Основная стратегия выбора пути каждым агентом выглядит как модифицированное вероятностное правило [1]:

$$\begin{cases} P_{ij}^k(t) = \frac{[\tau_{ij}(t)]^\alpha \cdot [\eta_{ij}(t)]^\beta \cdot [g_{ij}(t)]^\gamma}{\sum_{k \in J_{i,l}} [\tau_{il}(t)]^\alpha \cdot [\eta_{il}(t)]^\beta \cdot [g_{il}(t)]^\gamma}, & j \in J_{i,k}; \\ P_{ij}^k(t) = 0; \end{cases} \quad (1)$$

Перед выбором следующей для посещения вершины j каждый агент оценивает количество феромона на ребре (i,j) , его длину и генетическую информацию данного ребра. Соответственно, чем выше значение $P_{ij}^k(t)$, тем выше вероятность

того, что агент выберет именно вершину j следующей для посещения, нулевое значение обозначает что вершина уже была посещена. Не трудно заметить, что данная стратегия реализуется на основе рулетки.

Правило обновления феромона. После того, как все агенты завершат поиск маршрутов, производится расчет длины каждого найденного маршрута $L_k(t)$ и обновление феромона $\tau_{ij}(t+1)$ на каждом ребре данного маршрута [2]:

$$\begin{cases} \Delta\tau_{ij}^k(t) = \frac{1}{L_k}, (i, j) \in T_k(t); \\ \Delta\tau_{ij}^k(t) = 0; \end{cases} \quad (2)$$

$$\tau_{ij}(t+1) = (1 - \rho) \cdot \tau_{ij}(t) + \sum_k \Delta\tau_{ij}^k(t). \quad (3)$$

Из выражения 3 видно, что феромон будет испаряться равномерно на всех ребрах графа не вошедших в маршрут $L_k(t)$, а для ребер вошедших в этот маршрут испарение будет происходить медленнее. Соответственно, чем больше феромона на пути, тем он качественнее.

Оценка. Решения, полученные на предыдущем этапе можно трактовать как хромосому ГА, которая состоит из отдельных генов, представляющих собой вершины графа [10, 11]. Пример хромосомы изображен на рис. 1.

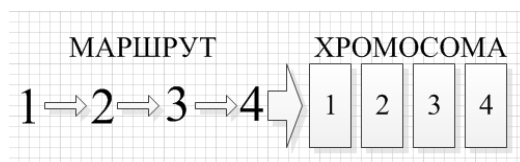


Рис. 1. Представление хромосомы

Для того, чтобы сравнить качество построенных агентами маршрутов введем оценку e_k маршрута агента k :

$$e_k = N/L_k, \quad (4)$$

где N – размерность задачи, L_k – длина маршрута агента k . Из выражения 4 видно, что чем короче найденный путь, тем выше его оценка.

Селекция решений. Хромосомы с лучшими решениями алгоритм допускает к следующей итерации, что в последствие даст оптимальное решение. В данном методе проводится качественная оценка ЦФ f_k в зависимости от оценки найденных решений. Качественная оценка ЦФ выглядит как:

$$f_k = \frac{[X(e_k - e_{ave}) + (e_{max} - e_k)]e_{ave}}{e_{max} - e_{ave}}, \quad (5)$$

где X – параметр масштабирования; e_{ave} – среднее значение оценок в популяции; e_{max} – лучшее значение оценки в популяции. Большому значению f_k соответствует большая вероятность применения операторов кроссинговера и мутации для хромосомы k .

Агенты, чья генетическая информация перейдет на следующую итерацию, выбираются согласно вероятности P_{GA}^k , на основе селекции рулеткой. Эта вероятность имеет следующий вид:

$$P_{GA}^k = \frac{f_k}{\sum_{k=1}^M f_k}. \quad (6)$$

После проведения селекции решений, производится операция кроссинговера, скрещивания решений.

Кроссинговер. Кроссинговер подразумевает собой скрещивание решений двух родительских агентов для получения нового дочернего решения. Эта операция производится до тех пор, пока количество дочерних решений не станет равным количеству родительских решений агентов. Вероятность кроссинговера задается переменной P_c , $0 < P_c < 1$. В данной работе используется частично соответ-

свующий кроссинговер (PMX, Partial Mapped Crossover) [10, 12]. Суть его заключается в следующем. Даны две родительские хромосомы S, T и точка разреза хромосом k . Дочерние хромосомы будут формироваться следующим образом: выбирается ген $s_i, (i=1, \dots, k)$ хромосомы S , находящийся в пределах зоны кроссинговера $(1, \dots, k)$ и меняется местами с геном $s_j = t_i$. Процесс продолжается, пока не будет достигнут ген s_k . На рис. 3 изображен процесс получения дочерней хромосомы S' , хромосома T' строится аналогичным образом.



Рис. 3. Пример работы оператора кроссинговера

Такой подход позволяет избежать некорректных решений задачи коммивояжера, полученных в результате скрещивания двух хромосом. После этого с определенной вероятностью в работу вступает оператор мутации.

Мутация. Вероятность срабатывания операции мутации задается как $P_m, 0 < P_m < 1$. В данном алгоритме используется инверсионная мутация генов в хромосомах [13]. В данном методе используется RSM мутация (Restriction site mutation), показавшая свою эффективность в решении задачи коммивояжера [14].

Суть данного оператора заключается в следующем: случайно выбираются три гена хромосомы в следующей последовательности $i < j < l$. Ген позиции i переходит в позицию j , ген позиции j в l , а ген l в позицию i . Пример работы RSM мутации приведен на рис. 4.

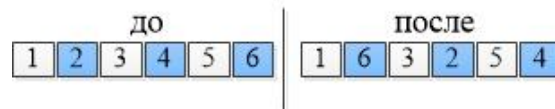


Рис. 4. Пример работы инверсионной мутации

После проведения инверсии генов, запускается процедура обновления генетической информации.

Обновление генетической информации. Механизм передачи генетической информации следующим поколениям схож с процедурой обновления феромона у МА, таким образом, мы усиливаем влияние генетических операторов на принятие решения агентами МА в процессе построения маршрута. После применения генетических операторов кроссинговера и мутации, производится подсчет длины полученных маршрутов $G_k(t)$. Генетическая информация $\Delta g_{ij}^k(t)$, передаваемая следующему поколению k агента определяется как:

$$\begin{cases} \Delta g_{ij}^k(t) = \frac{1}{G_k}, (i, j) \in T_k(t); \\ \Delta g_{ij}^k(t) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где G_k – длина маршрута агента k .

Генетическая информация $g_{ij}(t)$ для каждого участка пути (i, j) обновляется следующим образом:

$$g_{ij}(t + 1) = g_0 + \sum_{k=1}^M \Delta g_{ij}^k(t), \quad (8)$$

где g_0 инициализируется на каждой итерации одним и тем же значением. Из выражений 7, 8 видно, что чем меньше длина маршрута $G_k(t)$, тем выше значение $g_{ij}(t)$ на ребрах этого маршрута. Далее процесс повторяется пока не будет достигнут критерий останова алгоритма.

На рис. 5 представлена структурная схема алгоритма.

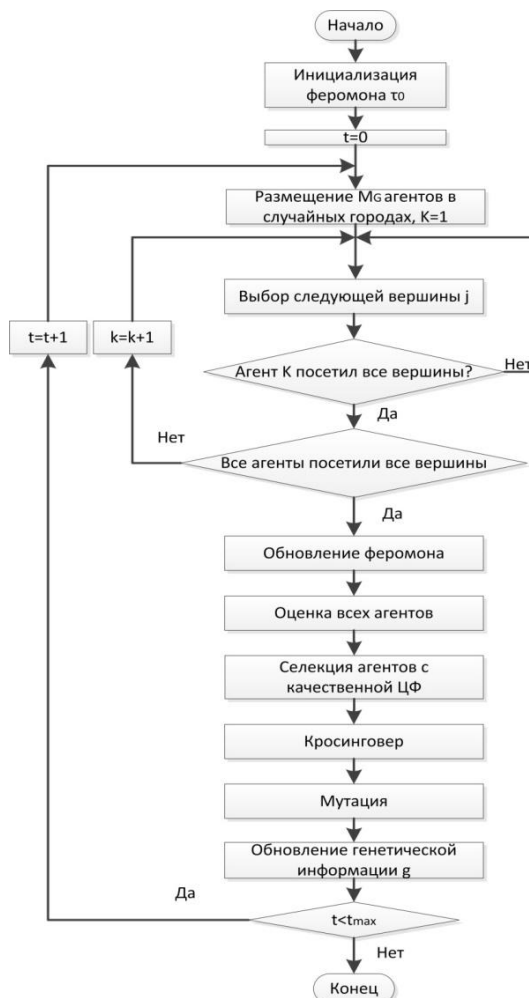


Рис. 5. Структурная схема алгоритма

Как видно из приведенного выше описания метода и его структурной схемы, гибридизация алгоритмов заключается не только в последовательном использовании операторов ГА и МА, но и интеграцией генетической информации в процесс построения пути агентом МА.

Для нашего алгоритма важными параметрами являются:

- ◆ оптимальность, характеризующая способность алгоритма выбирать наилучший маршрут;
- ◆ простота, обеспечивающая функциональные возможности алгоритма с минимальными затратами ресурсов;
- ◆ быстрая сходимость алгоритма – процесс получения без предварительной сходимости (конвергенции).

- ♦ гибкость, алгоритм быстро и точно адаптируется к разнообразным обстоятельствам при взаимодействии с внешней средой или лицом принимающим решение [20].

Экспериментальные исследования. На основе предложенного подхода была разработана программа ЭВМ, в которой реализован описанный выше гибридный алгоритм и классический муравьиный алгоритм [1]. Экспериментальные исследования проводились на международных стандартных тестах [16], каждый тест запускался 3 раза, после чего рассчитывались среднее и лучшее значения полученных решений. Уточним важную деталь, значения матрицы расстояний между вершинами графа округлены до целого. Часть результатов отображена в табл. 1.

Таблица 1

Сравнительная таблица результатов работы алгоритмов

Название теста	Количество вершин	Время работы	Значения ЦФ			
			АСО		АСО+GA	
			Среднее	Лучшее	Среднее	Лучшее
bayg29	29	1 мин.<	1610	1610	1610	1610
eil51	51	1 мин.	433	428	426	426
berlin52	52	1 мин.	7643	7542	7560	7542
eil76	76	1 мин.	561	546	541	538
eil101	101	2 мин.	667	655	638	629

Из таблицы видно, что гибридный алгоритм в среднем находит решения более качественно, чем МА за одинаковое время работы. Также заметим, что гибридный алгоритм для каждого из представленных в таблице бенчмарков нашел оптимум, в то время как МА нашел оптимум только в двух случаях.

Заключение. В работе предложен гибридный алгоритм решения задачи коммивояжера. Предложен способ оценки маршрутов, полученных МА и эвристика их дальнейшего использования в ГА. Из результатов, полученных в ходе экспериментов, следует, что гибридный алгоритм находит более качественные решения за то же время, чем обычный МА. Также среднее качество решений при неоднократных запусках приложения выше у гибридного алгоритма. Дальнейшая работа в развитии алгоритма предполагает исследование использования модифицированных операторов ГА, способов инициализации и реинициализации [17, 18, 19] феромона МА, модификаций правил обновления феромона, применение алгоритма к задаче коммивояжера с дополнительными ограничениями, к примеру, с временными окнами [20].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Dorigo M., Stutzle T.* Ant Colony Optimization // Bradford Books, 2004.
2. *Dorigo M., Gambardella L.M.* Ant colonies for the travelling salesman problem // BioSystems. – July 1997. – Vol. 43, No. 2. – P. 73-81.
3. *Hahsler M., Hornik K.* TSP – Infrastructure for the Traveling Salesperson Problem // Journal of Scientific Software. – 2007. – Vol. 32, Issue 2. – P. 1-21.
4. *Paschos V., Monnot J., Toulouse S.* The travelling salesman problem and its variations // Paradigms of Combinatorial Optimization. – 2014. – P. 173-214.
5. *Борознов В.О.* Исследование решения задачи коммивояжера // Вестник Астраханского государственного технического университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – С. 147-151.
6. *Кажаров А.А. Курейчик В.М.* Муравьиные алгоритмы для решения транспортных задач // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2010. – № 1. – С. 32-45.
7. *Штовба Д.С.* Муравьиные алгоритмы: теория и применение // Математика в приложениях. – 2004. – С. 70-75.

8. *Goldberg D.E.* Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning, USA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989.
9. *Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М.* Генетические алгоритмы. – М.: Физматлит, 2006. – 320 с.
10. *Goldberg D.E., Lingle R.* Alleles, Loci, and the Traveling Salesman Problem // Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms and Their Application. – 1985. – P. 154-159.
11. *Чернышев Ю.О., Басова А.В., Полуйан А.Ю.* Решение задач транспортного типа генетическими алгоритмами. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУГОУ, 2008. – 73 с.
12. *Kumar N., Karambir, Kumar R.* A comparative analysis of PMX, CX and OX Crossover operators for solving traveling salesman problem // International Journal of Latest Research in Science and Technology. – 2012. – P. 98-101.
13. *Курейчик В.М., Лебедев Б.К., Лебедев О.К.* Поиск адаптация: теория и практика. – М.: Физматлит, 2006. – 272 с. – ISBN 5-9221-0749-6.
14. *Abdoun O., Abouchakaba J, Tajani C.* Analyzing the Performance of Mutation Operators to Solve the Travelling Salesman Problem // CoRR. Vol. abs/1203.3099. – 2012. – P. 66-77.
15. Параметры и классы протоколов маршрутизации [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://skif.bas-net.by/bsuir/base/node360.html>. – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 23.01.2015).
16. TSPLIB [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/tsp/>. – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 23.01.2015).
17. *Ciba M., Sekaj I.* Ant colony optimization with re-initialization // Automation, Control and Intelligent Systems. – 2013. – № 1 (3). – P. 53-66.
18. *Dai Q., Junzhong J., Chunnian L.*, An effective initialization strategy of pheromone for ant colony optimization // Bio-Inspired Computing, 2009.
19. *Zhu Q.B., Yang Z.J.* An Ant Colony Optimization Algorithm Based on Mutation and Dynamic Pheromone Updating // Journal of Software. – 2004. – № 2 (15). – P. 185-192.
20. *Solomon M.M.* Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time windows constraints // Operations Research. – 1987. – № 35. – P. 254-265.

REFERENCES

1. *Dorigo M., Stutzle T.* Ant Colony Optimization, *Bradford Books*, 2004.
2. *Dorigo M., Gambardella L.M.* Ant colonies for the travelling salesman problem, *BioSystems*, July 1997, Vol. 43, No. 2, pp. 73-81.
3. *Hahsler M., Hornik K.* TSP – Infrastructure for the Traveling Salesperson Problem, *Journal of Scientific Software*, 2007, Vol. 32, Issue 2, pp. 1-21.
4. *Paschos V., Monnot J., Toulouse S.* The travelling salesman problem and its variations, *Paradigms of Combinatorial Optimization*, 2014, pp. 173-214.
5. *Boroznov V.O.* Issledovanie resheniya zadachi kommivoyazhera [Study on the solution of traveling salesman problem], *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Vestnik of Astrakhan State Technical University. Control, computer engineering and computer science], 2009, pp. 147-151.
6. *Kazharov A.A., Kureychik V.M.* Murav'inye algoritmy dlya resheniya transportnykh zadach [Ant algorithms for the solution of transport problems], *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya* [Journal of Computer and Systems Sciences International], 2010, No. 1, pp. 32-45.
7. *Shtovba D.S.* Murav'inye algoritmy: teoriya i primeneniye [Ant algorithms: theory and application], *Matematika v prilozheniyakh* [Mathematics in applications], 2004, pp. 70-75.
8. *Goldberg D.E.* Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning, USA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989.
9. *Gladkov L.A., Kureychik V.V., Kureychik V.M.* Geneticheskie algoritmy [Genetic algorithms]. Moscow: Fizmatlit, 2006, 320 p.
10. *Goldberg D.E., Lingle R.* Alleles, Loci, and the Traveling Salesman Problem, *Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms and Their Application*, 1985, pp. 154-159.
11. *Chernyshev Yu.O., Basova A.V., Poluyan A.Yu.* Reshenie zadach transportnogo tipa geneticheskimi algoritmami [The solution of problems of transportation type of genetic algorithms]. Rostov-on-Don: Izd-vo YuFUGOU, 2008, 73 p.

12. Kumar N., Karambir, Kumar R. A comparative analysis of PMX, CX and OX Crossover operators for solving traveling salesman problem, *International Journal of Latest Research in Science and Technology*, 2012, pp. 98-101.
13. Kureychik V.M., Lebedev B.K., Lebedev O.K. Poiskovaya adaptatsiya: teoriya i praktika [Search adaptation: theory and practice]. Moscow: Fizmatlit, 2006, 272 p. ISBN 5-9221-0749-6.
14. Abdoun O., Abouchakaba J, Tajani C. Analyzing the Performance of Mutation Operators to Solve the Travelling Salesman Problem, *CoRR*, Vol. abs/1203.3099, 2012, pp. 66-77.
15. Parametry i klassy protokolov marshrutizatsii [The parameters and classes of routing protocols]. Available at: <http://skif.bas-net.by/bsuir/base/node360.html> (Accessed 23 February 2015).
16. TSPLIB. Available at: <http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/tsp/> (Accessed 23 February 2015).
17. Ciba M., Sekaj I. Ant colony optimization with re-initialization, *Automation, Control and Intelligent Systems*, 2013, No. 1 (3), pp. 53-66.
18. Dai Q., Junzhong J., Chunnian L., An effective initialization strategy of pheromone for ant colony optimization, *Bio-Inspired Computing*, 2009.
19. Zhu Q.B., Yang Z.J. An Ant Colony Optimization Algorithm Based on Mutation and Dynamic Pheromone Updating, *Journal of Software*, 2004, No. 2 (15), pp. 185-192.
20. Solomon M.M. Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time windows constraints, *Operations Research*, 1987, 35, pp. 254-265.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Я.Е. Ромм.

Мартынов Артём Владимирович – Южный федеральный университет; e-mail: sir.aspex@gmail.com; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 89508459429; кафедра дискретной математики и методов оптимизации; аспирант.

Курейчик Виктор Михайлович – e-mail: kur@tsure.ru; тел.: 89282132730; кафедра дискретной математики и методов оптимизации; зав. кафедрой; д.т.н.; профессор.

Martinov Artem Vladimirovich – Southern Federal University; e-mail: sir.aspex@gmail.com; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +79508459429; the department of discrete mathematics and optimization methods; postgraduate student.

Kureichik Viktor Mihaylovich – e-mail: kur@tsure.ru; phone: +79282132730; the department of discrete mathematics and optimization methods; head of department; dr. of eng. sc.; professor.

УДК 681.3.06: 681.323(519.6)

Я.Е. Ромм, Е.Г. Назарьянц

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ФОРМЫ МЕТОДА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОВАЖЕРА

Работа содержит параллельное преобразование алгоритма Дж. Литтла реализации метода ветвей и границ для решения задачи коммивояжера на основе идентификации экстремумов при помощи максимально параллельной сортировки подсчетом по матрицам сравнений. Приводится описание и программа сортировки с оценкой временной сложности. Описан метод и реализующие его программные операторы идентификации локальных экстремумов. Предложенный параллельный алгоритм цикличен, даны две оценки его временной сложности $T(n^4/6 - n^3/4) = O(n \log_2 n)$ и $T(n^4/6 - n^3/4) = O(n^5 \log_2 n)$ для случаев без возвратов к оборванным ветвям и с возвратом к одной из них (без учета вложений). При одновременной обработке всех обрываемых ветвей без учета вложений временная сложность по сравнению с обработкой одной оборванной ветви не увеличивается за счет роста числа процессоров, и имеет место оценка $T(n^4/6) = O(n^5 \log_2 n)$. Оценки с учетом числа процессоров используют абстрактную модель неветвящихся параллельных программ, при этом не учитывается архитектура параллельной вычислительной системы и время обмена. Вы-