

## Раздел VI. Синергетика, кибернетика и синтез систем

УДК 556.3

**И.М. Першин, Г.Е. Веселов, М.И. Першин**

### **СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ И ОБРАБОТКИ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ИНФОРМАЦИИ**

*Рассмотрено применение теории анализа и синтеза распределенных систем к системам передачи и обработки информации. В отличие от известных систем передачи информации, вводится дополнительный ортогональный базис, с использованием собственных вектор-функций оператора объекта (пространственных мод), с помощью которого осуществляется пространственная модуляция полезных сигналов. Суммируя все сигналы с выхода блока пространственной модуляции, получим поле информации, которое поступает на передающее устройство. С выхода приемного устройства, поле информации (дискретный аналог) поступает на вход блока пространственной фильтрации, сформированного их пространственного сканера и пространственных фильтров. Пространственный сканер используется для определения параметров пространственных фильтров. Пространственные фильтры позволяют выделить из поля информации заданные пространственные моды (магистраль передачи информации). Восстановление модулированного полезного сигнала осуществляется известными методами. Цель рассматриваемой работы – описание математической модели и исследование характеристик модифицированного одномерного пространственного сканера и фильтра, на основе которых разработана схема передачи и обработки распределенной информации. Предлагаемая схема передачи и обработки информации обладает следующими свойствами: передаваемый сигнал не доступен к прямому извлечению (для извлечения информации требуется специальная аппаратура, реализующая работу пространственного фильтра); на одной и той же несущей частоте может быть передано множество полезных сигналов (работать множество источников информации, в рассматриваемом примере их десять). Это достигается путем осуществления пространственной модуляции, формируя магистраль передачи информации; каждая магистраль может нести совокупность полезной информации, с использованием множества несущих частот (как это осуществляется сейчас в радиозэфире).*

*Распределенный сканер; распределенный фильтр; система обработки информации.*

**I.M. Pershin, G.E. Veselov, M.I. Pershin**

### **TRANSMISSION SYSTEM AND DISTRIBUTED INFORMATION PROCESSING**

*Considered the application of the theory of analysis and synthesis of distributed systems for communication and information processing. In contrast to known communication systems, introduces an additional orthogonal basis, using its own vector-functions of the operator object (spatial modes), with which the spatial modulation of the useful signal. Summing all the signals from the output of the spatial modulation unit, obtain field information, which is supplied to the transmitting device. From the output of the receiving device, the information field (the discrete analogue) to the input of the spatial filter formed their spatial scanner and spatial filters. Spatial scanner is used to determine the parameters of the spatial filters. Spatial filters allow you to select from a field of information specified spatial modes (railway information transmission). The recovery of the modulated signal is carried out by known methods. The purpose of the considered work – the description of mathematical model and research of characteristics of the modified one-*

*dimensional spatial scanner and the filter on the basis of which the scheme of transfer and processing of the distributed information is developed. The proposed scheme of transfer and processing of information has the following properties: the transmitted signal is not available for direct extraction (extraction requires special equipment, implements the operation of the spatial filter); on the same carrier frequency can be transferred to many useful signals (work multiple sources information, in this example, ten). This is achieved through the implementation of the spatial modulation, forming the backbone transmission of information; each line can carry a set of useful information, using multiple carrier frequencies (as it is now on the radio).*

*Distributed scanner; distributed filter; the system of information processing.*

**Введение.** Процессы в окружающей нас среде неразрывно связаны с пространственными координатами, а их модели описываются уравнениями в частных производных. Системный анализ таких (распределенных) процессов связан усложнением математического аппарата, который опирается на методы решений уравнений в частных производных. Как правило, если найдены решения (реакция объекта на заданное входное воздействие) то эти решения математически могут быть представлены бесконечной совокупностью ортогональных пространственных мод. Методы анализа распределенных объектов рассмотрены в [1–6, 10, 15, 16]. Основные направления, используемые при синтезе распределенных систем управления, приведены в [2, 4, 7]. В [8, 9–14] показано решение практических задач управления распределенными объектами.

Современные технологии обработки информации позволяют использовать принципы и методы распределенных систем в различных областях.

В историческом плане, совсем недавно для фиксации процессов, мы использовали обычный фотоаппарат и пленку. На сегодняшний день известно, что распределенный сигнал, несущий информацию о процессе, с помощью современных технологий, разбивается на миллионы дискрет (пикселей) и в виде дискретного аналога исследуемого процесса поступает для обработки и представления его в желаемом виде. Распределенная информация из мультимедийной аппаратуры, с помощью светового луча, передается на экран для демонстрации процессов. В системах с распределенными параметрами для формирования информации используют пространственные ортогональные формы (пространственные моды), амплитуда которых формируется из совокупности полезных сигналов, модулированных соответствующими несущими частотами. Поскольку используются ортогональные формы, то информация разных форм не влияет друг на друга. Суммируя пространственные моды, получим распределенный сигнал. Представляя распределенный сигнал в дискретном (по пространственным координатам) виде подаем его в устройство передачи распределенной информации. Если распределенную информацию передаем с помощью светового луча, то рассматриваемый луч сформирован из совокупности отдельных лучей, несущих информацию о каждой «дискрете» распределенного сигнала. Формирование электромагнитных распределенных лучей, несущих информацию, это дело ближайшего будущего. С выхода приемного устройства дискретный аналог распределенного поступает в устройство, осуществляющее его распаковку-выделение пространственных форм (пространственных мод) и известными методами выделение полезных сигналов. Для выделения пространственных форм используются пространственные сканеры фильтры, рассмотренные ниже.

**Математическая модель модифицированного одномерного пространственного сканера.** Положим, что имеется распределенный объект (рис. 1,б), математическая модель которого описывается уравнением

$$A \cdot \frac{\partial^2 T(x, z, \tau)}{\partial x^2} + T(x, z, \tau) + \frac{\partial^2 T(x, z, \tau)}{\partial z^2} = 0, \quad (0 < z < Z_L, 0 < x < X_L), \quad (1)$$

где  $A$  – заданное число,  $x, z$  – пространственные координаты,  $\tau$  – время,  $T(x, z, \tau)$  – фазовая переменная,  $X_L, Z_L$  – заданные величины.

Граничные условия заданы в виде следующих соотношений:

$$T(x=0, z, \tau) = T(x=X_L, z, \tau) = 0, \quad (0 < z < Z_L), \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(x, z=Z_L, \tau)}{\partial z} = U(x, \tau), \quad (0 < x < X_L), \quad (3)$$

$$\frac{\partial T(x, z=0, \tau)}{\partial z} = 0, \quad (0 < z < Z_L, \quad 0 < x < X_L). \quad (4)$$

Начальные условия полагаются нулевыми.

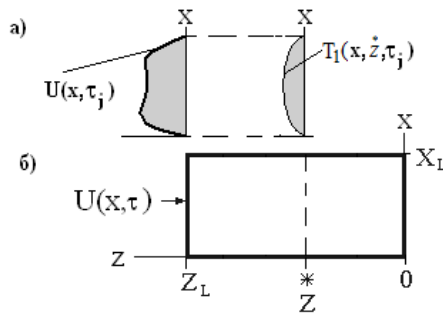


Рис. 1. Схема распределенного объекта

Рассматриваемая математическая модель пространственного сканера, в отличие от моделей, изложенных в [17–21], зависит от пространственных координат  $x$  и  $z$ .

Положим, что входное воздействие представлено в виде ряда Фурье по пространственной координате, которое, с учетом граничного условия (2), записывается в виде

$$U(x, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{C}_{\eta}(\tau) \cdot \sin(\Psi_{\eta} \cdot x), \quad (5)$$

$$\Psi_{\eta} = \frac{\pi \cdot \eta}{X_L}, \quad (6)$$

где  $\bar{C}_{\eta}(\tau)$  – заданные функции (несущие информацию о полезном сигнале).

Коэффициент передачи ( $K_{\eta} = T_{\eta}(x, Z, \tau) / (\bar{C}_{\eta}(\tau) \cdot \sin(\Psi_{\eta} \cdot x))$ ) по каждой пространственной моде определяется из следующего соотношения [20]

$$K_{\eta} = \frac{e^{\beta_{\eta} \cdot Z} + e^{-\beta_{\eta} \cdot Z}}{\beta_{\eta} \cdot (e^{\beta_{\eta} \cdot Z_L} - e^{-\beta_{\eta} \cdot Z_L})}, \quad \eta = \overline{1, \infty}, \quad \beta_{\eta} = (A \cdot \Psi_{\eta}^2 - 1)^{1/2}. \quad (7)$$

Положим, что  $A=1/G$ , где  $G$  непрерывна функция, пробегающая все значения  $\Psi_{\eta}^2$ , ( $\eta = \overline{1, \infty}$ ) (в [5, 7], эта функция названа обобщенной координатой). Для значений  $G \rightarrow \Psi_{\eta}^2$ , ( $\eta = \overline{1, \infty}$ )  $\beta_{\eta} \rightarrow 0$ , а значение  $abs(K_{\eta}) \rightarrow \infty$  (рис. 2). Уравнения (1)–(4) описывают модель одномерного пространственного сканера (мерность пространственного сканера и пространственного фильтра будем определять по числу пространственных координат, используемых при описании входных воздействий),

коэффициент передачи по каждой пространственной моде которого определяется из соотношения (7). Если входное воздействие представлено в виде (5), то, изменяя в (7) значение  $A$  от 0 до  $\infty$ , могут быть определены пространственные частоты ( $\Psi^2_{\eta}$ ) пространственных мод, формирующих входное воздействие  $U(x, \tau)$ .

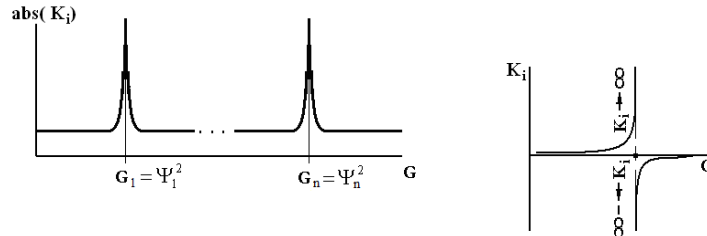


Рис. 2. График коэффициента передачи

**Дискретная модель одномерного пространственного сканера фильтра.** Представим дискретную модель уравнений (1)–(4). При этом, в отличие от схемы дискретизации, рассмотренной в [17–21], будем полагать, что число точек дискретизации по координате  $z$  равно  $N_z$ .

Схема дискретизации по пространственным координатам приведена на рис. 3.

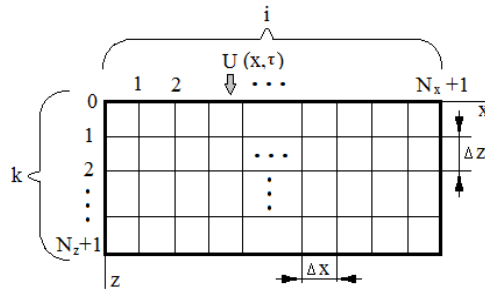


Рис. 3. Схема дискретизации

Положим, что число точек дискретизации по осям следующее:  
по оси  $x$  ( $0 \dots N_x+1$ ), граничные точки  $0$  и  $N_x+1$ ;  
по оси  $z$  ( $0 \dots N_z+1$ ), граничные точки  $0$  и  $N_z+1$ .

Дискретная модель уравнений (1)–(4) может быть представлена в виде

$$A \cdot \frac{T_{i-1,k} - 2 \cdot T_{\eta,k} + T_{\eta+1,k}}{\Delta x^2} + T_{i,k} + \frac{T_{i,k-1} - 2 \cdot T_{i,k} + T_{i,k+1}}{\Delta z^2} = 0, \quad i = 1, N_x, k = 1, N_z \quad (8)$$

Из граничных условий (4), (3)  $T_{i, N_z+1} = T_{i, N_z}$ ,  $T_{0,k} = 0, T_{N_x+1,k} = 0$ ,

$$\frac{T_{i,0} - T_{i,1}}{\Delta z} = U_i \rightarrow T_{i,0} = U_i \cdot \Delta z + T_{i,1}$$

Преобразуя (8), для  $k=1$ , получим

$$\frac{A}{\Delta x^2} \cdot (T_{i-1,1} - 2 \cdot T_{i,1} + T_{i+1,1}) + T_{i,1} + \frac{1}{\Delta z^2} \cdot (U_i \cdot \Delta z + T_{i,1} - 2 \cdot T_{i,1} + T_{i,2}) = 0, \quad i = 1 \dots N_x,$$

или

$$\frac{A}{\Delta x^2} \cdot T_{i-1,1} + \left(1 - \frac{2A}{\Delta x^2} - \frac{1}{\Delta z^2}\right) \cdot T_{i,1} + \frac{A}{\Delta x^2} \cdot T_{i+1,1} + \frac{1}{\Delta z^2} \cdot T_{i,2} = -\frac{1}{\Delta z} \cdot U_i \quad (9)$$

Преобразуя (8), для  $k > 1$ , получим

$$\frac{A}{\Delta x^2} \cdot (T_{i-1,k} - 2 \cdot T_{i,k} + T_{i+1,k}) + T_{i,k} + \frac{1}{\Delta z^2} \cdot (T_{i,k-1} - 2 \cdot T_{i,k} + T_{i,k+1}) = 0,$$

( $i=1 \dots N_x, k=2 \dots N_z$ ),

или

$$\frac{A}{\Delta x^2} \cdot T_{i-1,k} + \left(1 - \frac{2A}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta z^2}\right) \cdot T_{i,k} + \frac{A}{\Delta x^2} \cdot T_{i+1,k} + \frac{1}{\Delta z^2} \cdot T_{i,k-1} + \frac{1}{\Delta z^2} \cdot T_{i,k+1} = 0, \quad (10)$$

Запишем (9)–(10) в матричном виде

$$D \cdot X = U, \quad (11)$$

где

$$D = \begin{bmatrix} D_1^* & D_2 & 0 & \dots & 0 \\ D_2 & D_1 & D_2 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & D_2 & D_1 & D_2 \\ 0 & \dots & 0 & D_2 & D_1^* \end{bmatrix}_{(N_z \cdot N_z)}, \quad (12)$$

$$D_1^* = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 & \dots & 0 \\ C_2 & C_1 & C_2 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & C_2 & C_1 & C_2 \\ 0 & \dots & 0 & C_2 & C_1 \end{bmatrix}_{(N_x \cdot N_x)}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} C_3 & C_2 & 0 & \dots & 0 \\ C_2 & C_3 & C_2 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & C_2 & C_3 & C_2 \\ 0 & \dots & 0 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}_{(N_x \cdot N_x)},$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_4 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & & C_4 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}_{(N_x \cdot N_x)}, \quad X = \begin{bmatrix} T_{1,1} \\ \vdots \\ T_{N_z, N_x} \end{bmatrix}, \quad U = -1/\Delta z \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{N_x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(n)}$$

$$C_1 = \left(1 - \frac{2 \cdot A}{\Delta x^2} - \frac{1}{\Delta z^2}\right), \quad C_2 = \frac{A}{\Delta x^2}, \quad C_3 = \left(1 - \frac{2 \cdot A}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta z^2}\right), \quad C_4 = \frac{1}{\Delta z^2}, \quad n = N_x \cdot N_z.$$

Преобразуя (11), придем к следующему результату

$$X = D^{-1} \cdot U, \quad (14)$$

Положим, что  $A=1/G$ , где  $G$  непрерывна функция, пробегаящая все значения  $\Psi^2_\eta$  ( $\eta=1, \infty$ ). Для переменных значений  $G$ , уравнение (14) описывает дискретную модель одномерного *пространственного сканера* (если  $G \rightarrow \Psi^2_\eta$ , ( $\eta=1, \infty$ ), то  $\det(D(G)) \rightarrow 0$ ). Если  $\Psi^2_\eta$  – фиксированное значение, то матрица  $D^{-1}$  описывает дискретную модель *одномерного пространственного фильтра*. Этот пространственный фильтр выделяет из вектора входного воздействия  $U$  дискретные аналоги пространственных мод ( $X_\eta = D^{-1}(\Psi^2_\eta) \cdot U$ , см.(14)), для которых  $A = 1/\Psi^2_\eta$  (выделяет из вектора входного воздействия  $U$   $\eta$ -ю магистраль передачи информации). На рис. 1,а) показано выделение 1-й пространственной магистрали. Определитель матрицы  $D$ , в окрестности  $G_\eta$ , стремится к нулю, при этом  $\text{abs}(K_\eta) \rightarrow \infty$  (см. рис. 2).

Известно, что свойства дискретных моделей распределенных систем отличаются от свойств исходных моделей в частных производных [5, 6]. Результаты численных экспериментов и исследований показывают, что свойства дискретной модели пространственного сканера отличаются от свойств исходного уравнения в частных производных (1)–(4). Так, например, точки  $G_\eta$ , вычисленные для исходного уравнения (1), в которых  $\text{abs}(K_\eta) \rightarrow \infty$  (см. рис. 2) и дискретной модели этого уравнения, в которых  $\det(D(G_\eta))=0$  не совпадают.

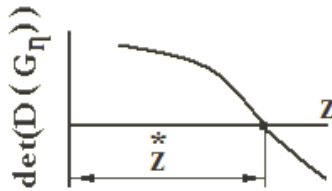


Рис. 4. График изменения  $\det(D(G_\eta))$

Для коррекции, в рассматриваемой дискретной модели сканера, используем параметра  $\Delta z$ , который связан с параметрами дискретной модели следующими со-

отношениями  $L_z = \Delta z \cdot (N_z + 1)$ ,  $Z = \Delta z \cdot N_z$  (см. рис. 4). Функция выхода может быть

представлена в виде  $T(x, z = Z, \tau)$ , дискретный аналог которой (для  $A=1/\Psi_\eta$ ) записывается в виде  $X_\eta = X$  и вычисляется с помощью (14). В векторе  $X_\eta$  содержится информация о полезных сигналах  $\eta$ -й магистрали. Для ее извлечения может быть использовано одно из значений вектора  $X_\eta$ .

**Пример.** Рассмотрим численное моделирование работы одномерной системы передачи и приема информации. Подготовка полезной информации к передаче заключается в следующем:

– полезные сигналы (в рассматриваемом примере они выбраны в виде импульсов) умножаются на несущую частоту (рис. 5).

В рассматриваемом примере для всех десяти полезных сигналов выбрана несущая частота  $\omega = \pi/4$ ;

– полученные сигналы  $B_\eta(\tau)$  умножаются на соответствующие пространственные моды (осуществляем пространственную модуляцию, формируя магистрали передачи информации) (графики сигналов  $B_\eta(\tau)$ ,  $\eta=1 \dots 10$ , приведены на рис. 6). В примере, в рассматриваемых магистралях содержится только по одному полезному сигналу. В общем случае в каждой магистрали можно располагать сколько угодно большое число полезных сигналов, по аналогии, как это осуществляется в радиоэфире. В качестве пространственных мод выбраны ортогональные функции  $\sin(\psi_\eta \cdot x)$ ,  $\psi_\eta = \pi \cdot \eta / (X_L)$ ,  $X_L = \Delta x \cdot (10 + 1)$ ,  $\Delta x = 0.0675$  м, которые соответствуют собственным вектор-функциям оператора объекта (1)–(4).

– суммируя все сигналы с выхода блока пространственной модуляции, получим поле информации  $U_V(x, \tau)$

$$U_V(x, \tau) = \sum_{\eta=1}^{10} B_{\eta}(\tau) \cdot \sin(\psi_{\eta} x) \cdot$$

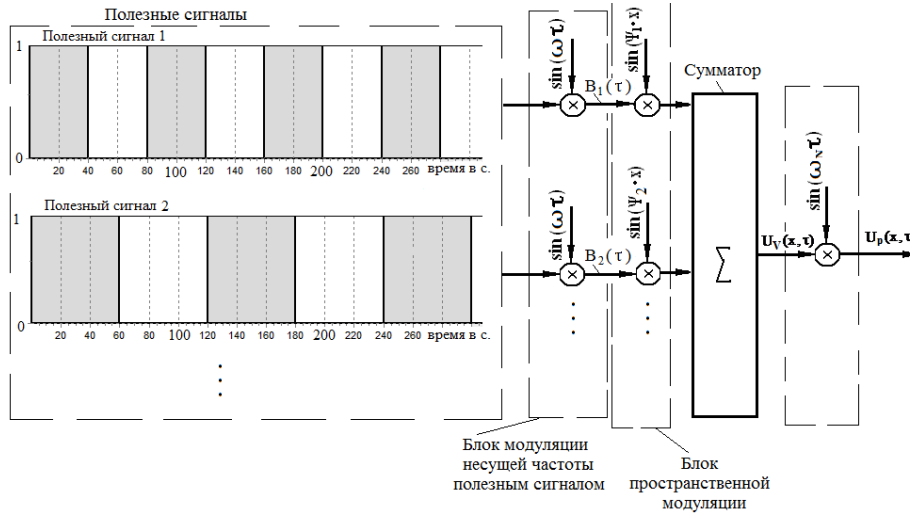


Рис. 5. Структурная схема подготовки сигнала

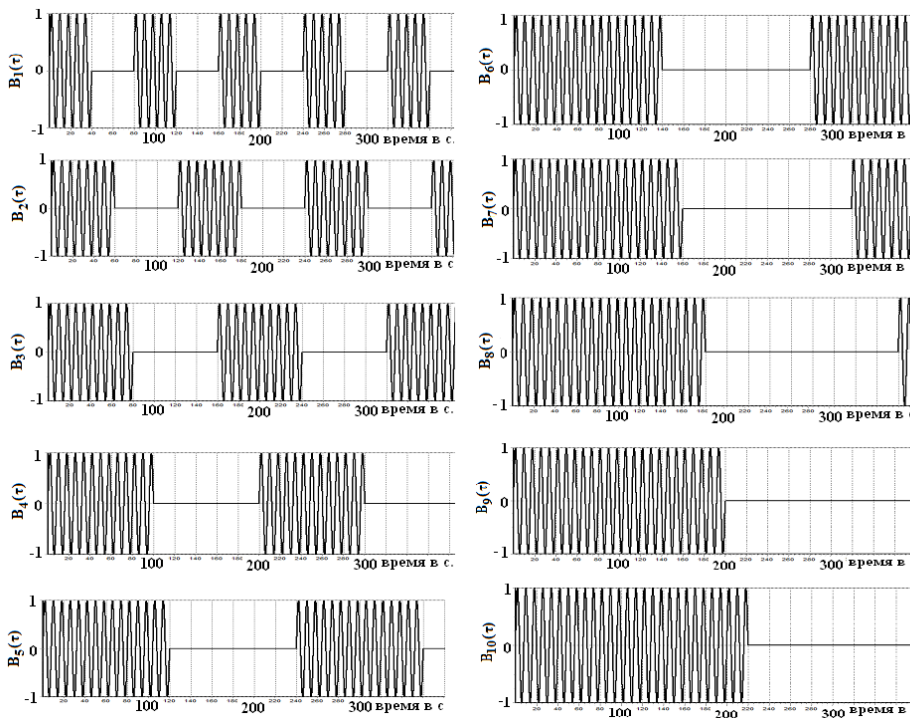


Рис. 6. Графики сигналов  $B_{\eta}(\tau)$

Полезные сигналы, упакованные рассматриваемым способом, не доступны к прямому извлечению (для их извлечения необходимы пространственные фильтры). На рис. 7 показан график сигналов  $U_V(x=4\Delta x, \tau)$  и  $U_V(x=8\Delta x, \tau)$ .

– модулируем поле информации высокочастотным сигналом

$$U_p(x, \tau) = U_V(x, \tau) \cdot \sin(\omega_N \cdot \tau), \quad \omega_N \gg \omega.$$

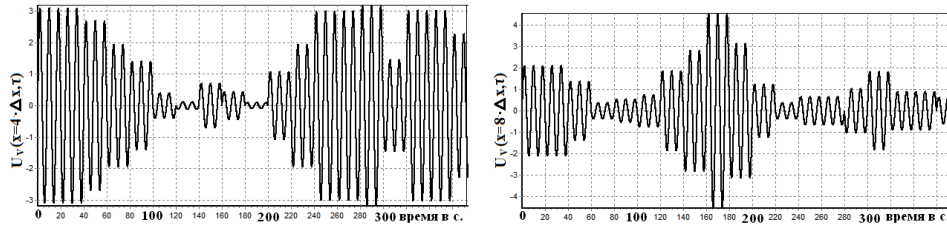


Рис. 7. Каналы передачи информации

Если используется оптический канал передачи информации (оптоволоконный) (рис. 8), то  $\omega_N$  – частота модуляции сигнала при передаче в оптоволокне. При использовании электромагнитных сигналов, частота  $\omega_N$  может достигать ГГц., при этом передающее и принимающее устройство имеет специальную конструкцию.

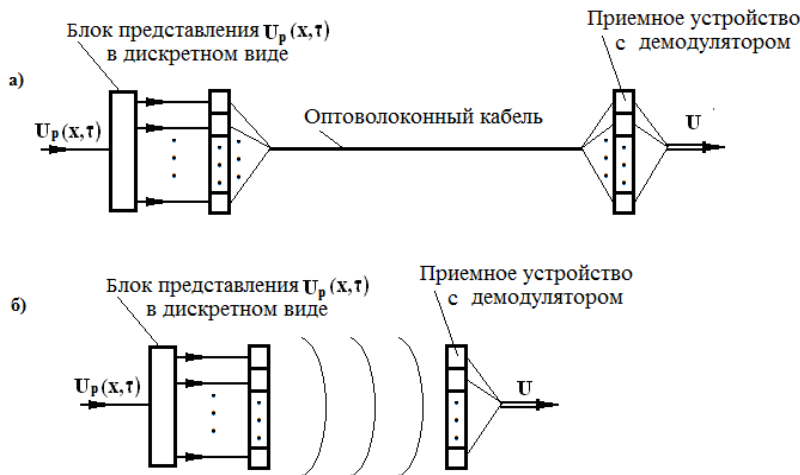


Рис. 8. Структурная схема передачи информации

На выходе приемного устройства с демодулятором получим вектор-функцию  $U$

$$U(\tau) = (U_1 \quad \dots \quad U_{10})^T.$$

Если используется оптоволоконный канал передачи информации, то вектор-функция  $U(\tau)$  представляет собой дискретный аналог функции  $U_V(x, \tau)$ .

В рассматриваемом примере, параметры пространственных фильтров (значения матрицы  $D^{-1}$ ) определялись с использованием пространственных сканеров и параметра  $\Delta z$ . Для поиска значения параметра  $\Delta z$ , при котором определитель  $D$  близок к нулю (см. рис. 4), был реализован метод Гаусса – Зайделя. Если значение  $\Delta z$  было меньше  $10^{-4}$ , или абсолютное значение определителя  $D$  было меньше  $10^{-5}$ , то процедура поиска заканчивалась.



Чем ближе будем подходить к точке значения определителя  $D$  нулю, тем точнее будет работать пространственный фильтр, тем больше будет значение коэффициента передачи по  $\eta$  – пространственной моде, но при равенстве определителя нулю, не существует  $D^{-1}$ .

При моделировании работы блока пространственной фильтрации использовалась схема, включающая последовательное умножение входного воздействия на матрицу  $D^{-1}$  (рис. 9).

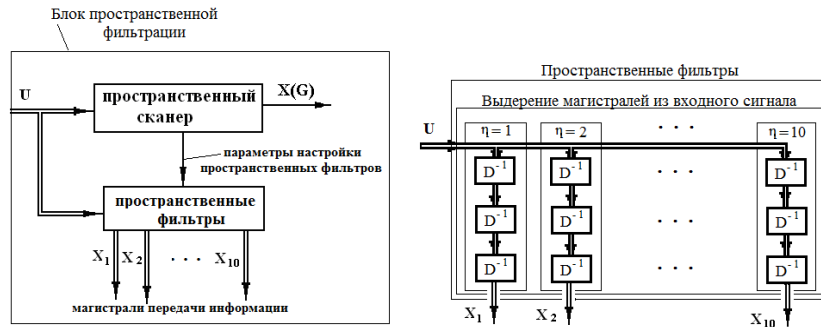


Рис. 9. Схема одномерной системы обработки информации

Дискретный аналог функция выхода записывается в виде  $X_{\eta} = X$ , где  $X$  – вычисляется с помощью (14) для  $A = 1/\Psi_{\eta}^2$ . В векторе  $X_{\eta}$  содержится информация о полезных сигналах  $\eta$ -й магистрали. Для ее извлечения может быть использовано одно из значений вектора  $X_{\eta}$ . По результатам моделирования построены графики, приведенные на рис. 10. При этом  $X_{\eta,v}$  –  $v$ -я ячейка вектора  $X_{\eta}$ . В рассматриваемом примере  $v=2$ . Извлечение полезных сигналов из сигналов  $X_{\eta,v}$  осуществляется известными методами демодуляции.

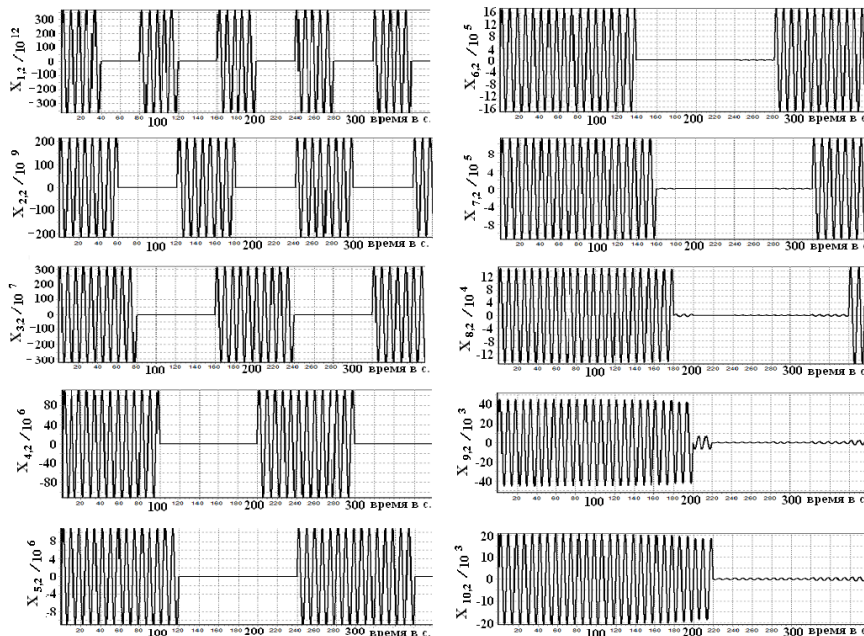


Рис. 10. Результаты моделирования распределенной системы обработки информации

Как показывают результаты моделирования (рис. 10), полезный сигнал может быть идентифицирован с использованием сигнала, полученного на выходе пространственных фильтров.

**Обобщение математической модели модифицированного пространственного сканера и пространственного фильтра на многомерный случай.** Математическая модель распределенного сканера для многомерного входного воздействия записывается в виде

$$A \cdot \left( \sum_{v=1}^n \frac{\partial^2 T(x_1, \dots, x_{n+1}, \tau)}{\partial x_v^2} \right) + T(x_1, \dots, x_{n+1}, \tau) + \frac{\partial^2 T(x_1, \dots, x_{n+1}, \tau)}{\partial x_{n+1}^2} = 0, \quad (15)$$

где  $0 < x_v < L_v$ ;  $i = \overline{1, n+1}$ ,  $A$  – заданное число,  $x_i$  – пространственные координаты,  $T(x_1, \dots, x_{n+1}, \tau)$  – фазовая переменная,  $L_v$  ( $v = \overline{1, n+1}$ ) – заданные значения.

Граничные условия заданы следующими соотношениями

$$T(x_1, \dots, x_n = 0, x_{n+1}, \tau) = T(x_1, \dots, x_v = L_v, \dots, x_{n+1}, \tau) = 0, v = \overline{1, n}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial T(x_1, \dots, x_n, x_{n+1} = L_{n+1}, \tau)}{\partial x_{n+1}} = U(x_1, \dots, x_n, \tau), \quad (17)$$

$$\frac{\partial T(x_1, \dots, x_n, x_{n+1} = 0, \tau)}{\partial x_{n+1}} = 0. \quad (18)$$

Начальные условия полагаются нулевыми.

Положим, что входное воздействие представлено в виде многомерного ряда Фурье по пространственным координатам, которое, с учетом граничного условия (16), записывается в виде

$$U(x_1, \dots, x_n, \tau) = \sum_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n=1}^{\infty} \bar{C}_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n}(\tau) \cdot \prod_{v=1}^n \sin(\Omega_{v, \mu_v} \cdot x_v), \quad (19)$$

где  $\Omega_{v, \mu_v} = \frac{\pi \cdot \mu_v}{L_v}$ ,  $\bar{C}_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n}(\tau)$  – заданные функции (несущие информацию о полезном сигнале),  $\prod_{v=1}^n \sin(\Omega_{v, \mu_v} \cdot x_v)$  – собственные вектор–функции оператора объекта (15)–(18) (пространственные моды).

Функцией выхода распределенного сканера служит  $T(x_1, \dots, x_n, X_{n+1}, \tau)$ , где

$X_{n+1}$  – фиксированная величина. Определим реакцию объекта на каждую пространственную моду входного воздействия (19). Эту реакцию будем искать в виде следующего соотношения:

$$T_{\mu_1, \dots, \mu_n}(x_1, \dots, x_{n+1}, \tau) = H_{\mu_1, \dots, \mu_n}(x_{n+1}, \tau) \cdot \prod_{v=1}^n \sin(\Omega_{v, \mu_v} \cdot x_v), \quad (20)$$

где  $H_{\mu_1, \dots, \mu_n}(x_{n+1}, \tau)$  – определяемые функции ( $\mu_1 \dots \mu_n = \overline{1, \infty}$ ).

Подставляя (20) в (15) и преобразуя, получим

$$\frac{\partial^2 H_{\mu_1, \dots, \mu_n}(x_{n+1}, \tau)}{\partial x_{n+1}^2} + (1 - A \cdot \sum_{v=1}^n \Omega_{v, \mu_v}^2) \cdot H_{\mu_1, \dots, \mu_n}(x_{n+1}, \tau) = 0.$$

Функцию  $H_{\mu_1, \dots, \mu_n}(x_{n+1}, \tau)$  будем искать в виде

$$H_{\mu_1, \dots, \mu_n}(x_{n+1}, \tau) = B_{1, \mu_1, \dots, \mu_n} \cdot e^{\beta_{\mu_1, \dots, \mu_n} \cdot z} + B_{2, \mu_1, \dots, \mu_n} \cdot e^{-\beta_{\mu_1, \dots, \mu_n} \cdot z}, \quad (21)$$

где  $\beta_{\mu_1, \dots, \mu_n} = (A \cdot (\sum_{v=1}^n \Omega_{v, \mu_v}^2) - 1)^{1/2}$ ,  $B_{1, i, j, \mu}$ ,  $B_{2, i, j, \mu}$  – функции, определяемые из граничных условий.

Подставляя (21) в (20) и далее в (18), и преобразуя, приходим к следующему результату

$$B_{1, \mu_1, \dots, \mu_n} = B_{2, \mu_1, \dots, \mu_n}. \quad (22)$$

Подставляя (21) в (20) и далее в (17) с учетом (22), получим

$$B_{1, \mu_1, \dots, \mu_n} \cdot \beta_{\mu_1, \dots, \mu_n} \cdot (e^{\beta_{\mu_1, \dots, \mu_n} \cdot L_{n+1}} - e^{-\beta_{\mu_1, \dots, \mu_n} \cdot L_{n+1}}) = \bar{C}_{\mu_1, \dots, \mu_n}(\tau).$$

Значение  $B_{1, i, j}$  определяется из следующего соотношения

$$B_{1, \mu_1, \dots, \mu_n} = \frac{\bar{C}_{i, j, \mu}(\tau)}{\beta_{\mu_1, \dots, \mu_n} \cdot (e^{\beta_{\mu_1, \dots, \mu_n} \cdot L_{n+1}} - e^{-\beta_{\mu_1, \dots, \mu_n} \cdot L_{n+1}})}. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (21) далее в (20), определим коэффициент передачи по каждой моде

$$K_{\mu_1, \dots, \mu_n} = \frac{(e^{\beta_{\mu_1, \dots, \mu_n} \cdot X_{\mu_n}} + e^{-\beta_{\mu_1, \dots, \mu_n} \cdot X_{\mu_n}})}{\beta_{\mu_1, \dots, \mu_n} \cdot (e^{\beta_{\mu_1, \dots, \mu_n} \cdot L_{n+1}} - e^{-\beta_{\mu_1, \dots, \mu_n} \cdot L_{n+1}})}.$$

Полагая  $A = 1/G$ , где  $G = \sum_{v=1}^n \Omega_{v, \mu_v}^2$  и изменяя значение  $G$ , определим коэффициент передачи рассматриваемого объекта.

График зависимости коэффициента передачи от  $G$  будет аналогичен графику, приведенному на рис. 2. При этом  $\text{abs}(K_{\mu_1, \dots, \mu_n}) \rightarrow \infty$  в точках  $G = \sum_{v=1}^n \Omega_{v, \mu_v}^2$

Записывая уравнение (15) и граничные условия (16)–(18) в дискретном виде, может быть получена дискретная модель *многомерного пространственного сканера*, а также дискретная модель *многомерного пространственного фильтра*. Поскольку свойства дискретных моделей распределенных систем отличаются от свойств исходных моделей в частных производных, то для коррекции в рассматриваемой дискретной модели сканера, используем параметра  $\Delta x_{n+1}$ , который связан с параметрами дискретной мо-

дели следующими соотношениями  $L_{n+1} = \Delta x_{n+1}(N_{n+1} + 1)$ ,  $X = \Delta x_{n+1} \cdot N_{n+1}$ . Следует отметить, что если принимающее устройство может принимать сигнал вида  $U(x_1, \dots, x_n, \tau)$ , то соответствующим образом построенные распределенные фильтры, могут выделить соответствующие магистрали для приема информации.

**Заключение.** Применение теории анализа и синтеза распределенных систем к системам передачи и обработки распределенной информации (введение дополнительного ортогонального базиса, на основе собственных вектор-функций оператора объекта, исследование характеристик модифицированного пространственного сканера и фильтра) позволило разработать схему передачи и обработки распределенной информации, обладающую следующими свойствами:

1. Передаваемый сигнал не доступен к прямому извлечению информации (для извлечения требуется специальная аппаратура, реализующая работу пространственного фильтра);

2. На одной и той же несущей частоте  $\omega$  может быть передано множество полезных сигналов (работать множество источников информации, в рассматриваемом примере их десять). Это достигается путем осуществления пространственной модуляции, используя при этом совокупность ортогональных пространственных мод, формируя совокупность магистралей передачи информации;

3. Каждая магистраль может нести совокупность полезной информации, с использованием множества несущих частот (как это осуществляется сейчас в радиозфире).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бутковский А.Г.* Структурная теория распределённых систем. – М.: Наука, 1977. – 320 с.
2. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределёнными параметрами. – М.: Наука, 1977. – 479 с.
3. *Пустыльников Л.М.* Управление распределёнными системами с подвижным воздействием. – М.: Наука, 1979. – 356 с.
4. *Рапопорт Э.Я.* Альтернативный методов прикладных задачах оптимизации. – М.: Наука, 2000. – 336 с.
5. *Першин И.М.* Синтез систем с распределёнными параметрами. – Пятигорск: Изд-во «РИО КМВ», 2002. – 212 с.
6. *Малков А.В., Першин И.М.* Системы с распределёнными параметрами. Анализ и синтез. – М.: Научный мир, 2012. – 476 с.
7. *Першин И.М.* Синтез систем с распределёнными параметрами: проблемы и перспективы // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2005. – № 6. – С. 2-10.
8. *Першин И.М., Веселов Г.Е., Першин М.И.* Синтез распределённых систем управления гидролитосферными процессами месторождений минеральных вод // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2014. – № 8 (157). – С. 123-137.
9. *Martirosyan A.V., Martirosyan K.V., Pershin I.M.* Analysis of the Caucasus Mineral Waters' Field's Modeling // Modern Applied Science. – 2015. – Vol. 9, No. 1. – P. 204-210. ISSN 1913-1844 E-ISSN 1913-1852. Published by Canadian Center of Science and Education.
10. *Alexander B. Chernyshev, Karina V. Martirosyan.* Analysis of the nonlinear distributed control system's sustainability // Journal of Mathematics and Statistics. – 2014. – № 10 (3). – P. 316-321. ISSN: 1549-3644. © 2014 Science Publications doi:10.3844/jmssp.2014.316.321 Published Online 10 (3) 2014 (<http://www.thescipub.com/jmss.toc>).
11. *Pramod P., Khargonekar R. And Poolla K.* Robust stabilization of distributed systems // Automatica. – 1986. – Vol. 22, No. 1. – P. 77-84.
12. *Sakava Ioshiyuki.* Optimal filtering in linear distributed – parameter systems // Int. J. Control. – 1972. – Vol. 16, No. 1. – P. 115-127.
13. *Sunanara Y., Aihara S. and Kojima F.* A method for parameter estimation of a class of nonlinear distributed systems under noisy observations // Automatica. – 1986. – Vol. 22, No. 6. – P. 727-732.
14. *Tzafestas S.G.* On optimum distributed—parameter Filtering and fixed—interval smocolored noise // IEEE Trans. Aut Control. – 1972. – Vol. 17, No. 4. – P. 443-458.
15. *William By Porter A.* Sensitivity problems in distributive systems // Int. J. Control. – 1976. – Vol. 5. – P. 159-177.
16. *Zhu J. M. And Lu Y.-Z.* Hierarchical optimal control for distributed parameter systems via block pulse operator // Int. J. Control. – 1988. – Vol. 48, No. 2. – P. 685-703.
17. *Першин И.М.* Распределённая система передачи информации // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2005. – № 11.
18. *Першин И.М.* Система обработки распределённых сигналов // Труды VIII Международной научно-технической конференции по динамике технических систем. Т. 1. – Ростов-на-Дону, 2007. – С. 196-202.
19. *Першин И.М.* Распределённые системы обработки информации. – Пятигорск: Из-во РИА КМВ, 2008. – 146 с.

20. Першин И.М. Использование пространственных фильтров для исследования распределенных объектов // Системный синтез и прикладная синергетика ССПС-2009: Сборник докладов. – Пятигорск: Из-во РИА КМВ, 2009. – С. 120-145.
21. Першин И.М. Системы обработки распределенной информации // Сборник научных трудов V Международной научной конференции «Системный синтез и прикладная синергетика». Т. 1. – Пятигорск: Изд-во ФГАОУ ВПО «СКФУ» (филиал), 2013. – С. 123-142.

## REFERENCES

1. Butkovskiy A.G. Strukturnaya teoriya raspredelennykh sistem [Structural theory of distributed systems]. Moscow: Nauka, 1977, 320 p.
2. Sirazetdinov T.K. Optimizatsiya sistem s raspredelennymi parametrami [Optimization of systems with distributed parameters]. Moscow: Nauka, 1977, 479 p.
3. Pustyl'nikov L.M. Upravlenie raspredelennymi sistemami s podvizhnym vozdeystviem [Control of distributed systems with a mobile impact]. Moscow: Nauka, 1979, 356 p.
4. Rapoport E.Ya. Al'ternativnyy metodov prikladnykh zadachakh optimizatsii [Alternative methods of applied optimization problems]. Moscow: Nauka, 2000, 336 p.
5. Pershin I.M. Sintez sistem s raspredelennymi parametrami [The synthesis of systems with distributed parameters]. Pyatigorsk: Izd-vo «RIO KMV», 2002, 212 p.
6. Malkov A.V., Pershin I.M. Sistemy s raspredelennymi parametrami. Analiz i sintez [Systems with distributed parameters. Analysis and synthesis]. Moscow: Nauchnyy mir, 2012, 476 p.
7. Pershin I.M. Sintez sistem s raspredelennymi parametrami: problemy i perspektivy [Synthesis of distributed parameter systems: problems and prospects], *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie* [Mechatronics, Automation, Control], 2005, No. 6, pp. 2-10.
8. Pershin I.M., Veselov G.E., Pershin M.I. Sintez raspredelennykh sistem upravleniya gidrolitosfernymi protsessami mestorozhdeniy mineral'nykh vod [Synthesis of distributed control systems gidrolitosfernymi processes mineral waters], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2014, No. 8 (157), pp. 123-137.
9. Martirosyan A.V., Martirosyan K.V., Pershin I.M. Analysis of the Caucasus Mineral Waters' Field's Modeling, *Modern Applied Science*, 2015, Vol. 9, No. 1, pp. 204-210. ISSN 1913-1844 E-ISSN 1913-1852. Published by Canadian Center of Science and Education.
10. Alexander B. Chernyshev, Karina V. Martirosyan. Analysis of the nonlinear distributed control system's sustainability, *Journal of Mathematics and Statistics*, 2014, No. 10 (3), pp. 316-321. ISSN: 1549-3644. © 2014 Science Publications doi:10.3844/jmssp.2014.316.321 Published Online 10 (3) 2014 (Available at: <http://www.thescipub.com/jmss.toc>).
11. Pramod P., Khargonekar R. And Poolla K. Robust stabilization of distributed systems, *Automatica*, 1986, Vol. 22, No. 1, pp. 77-84.
12. Sakava Ioshiyuki. Optimal filtering in linear distributed – parameter systems, *Int. J. Control*, 1972, Vol. 16, No. 1, pp. 115-127.
13. Sunanara Y., Aihara S. and Kojima F. A method for parameter estimation of a class of non-linear distributed systems under noisy observations, *Automatica*, 1986, Vol. 22, No. 6, pp. 727-732.
14. Tzafistas S.G. On optimum distributed—parameter Filtering and fixed—interval smocolored noise, *IEEE Trans. Aut Control*, 1972, Vol. 17, No. 4, pp. 443-458.
15. William By Porter A. Sensitivity problems in distributive systems, *Int. J. Control*, 1976, Vol. 5, pp. 159-177.
16. Zhu J. M. And Lu Y.–Z. Hierarchical optimal control for distributed parameter systems via block pulse operator, *Int. J. Control*, 1988, Vol. 48, No. 2, pp. 685-703.
17. Pershin I.M. Raspredelennaya sistema peredachi informatsii [A distributed data system], *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie* [Mechatronics, Automation, Control], 2005, No. 11.
18. Pershin I.M. Sistema obrabotki raspredelennykh signalov [The distributed processing system of signals], *Trudy VIII Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii po dinamike tekhnicheskikh sistem* [Proceedings of the VIII International scientific-technical conference on the dynamics of technical systems], Vol. 1. Rostov-on-Don, 2007, pp. 196-202.
19. Pershin I.M. Raspredelennyye sistemy obrabotki informatsii [Distributed systems of information processing]. Pyatigorsk: Iz-vo RIA KMV, 2008, 146 p.
20. Pershin I.M. Ispol'zovanie prostranstvennykh fil'trov dlya issledovaniya raspredelennykh ob'ektov [The use of spatial filters to the study of distributed objects], *Sistemnyy sintez i prikladnaya sinergetika SSSP-2009: Sbornik dokladov* [Systemic synthesis and applied synergetics agnp-2009: a Collection of papers]. Pyatigorsk: Iz-vo RIA KMV, 2009, pp. 120-145.

21. *Pershin I.M.* Sistemy obrabotki raspredelennoy informatsii [Processing system distributed information], *Sbornik nauchnykh trudov V Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii «Sistemnyy sintez i prikladnaya si-nergetika»* [Proceedings of the V International scientific conference "System synthesis and applied synergetics"], Vol. 1. Pyatigorsk: Izd-vo FGAOU VPO «SKFU» (filial), 2013, pp. 123-142.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н. А.В. Малков.

**Першин Иван Митрофанович** – Северо-Кавказский федеральный университет, филиал в г. Пятигорске; e-mail: ivmp@yandex.ru; 357500, г. Пятигорск, просп. 40 лет Октября, 56; тел.: 88793973927; кафедра управления в технический и биомедицинских системах; зав. кафедрой; профессор.

**Веселов Геннадий Евгеньевич** – Южный федеральный университет; e-mail: gev@sfnu.ru; 347900, г. Таганрог, ул. Чехова, 2; тел.: +78634360450; институт компьютерных технологий и информационной безопасности; директор.

**Першин Максим Иванович** – e-mail: maksimpershin@bkmail.ru; тел.: 89280093030; аспирант.

**Pershin Ivan Mitrofanovich** – North-Caucasian Federal University, a branch in the town of Pyatigorsk; e-mail: ivmp@yandex.ru; 357500, Pyatigorsk, ave. 40 years on October 56; phone: +78793973927; the department of management of technical and biomedical systems; head of department; professor.

**Veselov Gennady Evgen'evich** – Southern Federal University; e-mail: gev@sfnu.ru; 2, Chekhov street, Taganrog, 347900, Russia; phone: +78634360450; Institute of Computer Technology and Information Security; director.

**Pershin Maksim Ivanovich** – e-mail: maksimpershin@bkmail.ru; phone: +79280093030; post-graduate student.

УДК 62-529; 004-021; 004.896

**С.И. Колесникова**

### **АЛГОРИТМ СИНТЕЗА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОМЕРНЫМ ПЛОХО ФОРМАЛИЗУЕМЫМ ОБЪЕКТОМ\***

*Целью работы является распространение классического метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) на случай многомерного нелинейного объекта, заданного в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, не все правые части которых имеют полное описание. Такие объекты (по Л.А. Растрвигину) называются сложными или плохо формализуемыми. На базе классических методов управления: управления в скользящем режиме, бэкстепинг, АКАР представлен алгоритм синтеза системы управления таким объектом, который компенсирует неполноту описания за счет известного аналитического описания целевого многообразия и совместного использования указанных выше классических методов. Показано, что обсуждаемый ниже алгоритм является дальнейшим развитием идеологии синтеза гарантирующего регулятора на основе широко известного метода АКАР; установлено частное условие, при котором данный алгоритм синтеза системы управления для решения задачи стабилизации плохо формализуемого объекта превращается в алгоритм синтеза гарантирующего регулятора. Апробация алгоритма осуществлена на многомерных объектах с разным прикладным назначением. Построена система управления по параметру для расширенной модели Ферхюльста (нестабильной и хаотичной при определенных значениях параметров), применяемой в моделировании динамики роста капитала в экономике и моделировании баланса между государственной и частной видами собственности. Проведено численное сравнение*

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-08-01015 А).