Раздел IV. Искусственный интеллект и нечеткие системы

УДК 681.327

А.В. Боженюк, Е.М. Герасименко, И.Н. Розенберг

РАЗРАБОТКА МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКА МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТИ В ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ С НЕЧЕТКИМИ ПРОПУСКНЫМИ СПОСОБНОСТЯМИ И СТОИМОСТЯМИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ПОТЕНЦИАЛОВ*

Рассматривается метод нахождения потока минимальной стоимости в транспортной сети с нечеткими пропускными способностями дуг сети и стоимостями перевозок единицы потока по дуге. Данная задача не была широко освещена в литературе по потокам, поскольку подобные задачи обычно рассматриваются в четких условиях, а также используют алгоритм Дейкстры для поиска пути минимальной стоимости. Но так как использование алгоритма Дейкстры ограничено в силу появления отрицательных значений стоимостей перевозок единицы потока по дуге сети, предложенный в статье метод предполагает ввод потенциалов вершин для возможности оперирования отрицательными значениями стоимостей перевозок, возникающих при передаче потока по дугам сети. Аналогично вводится ряд определений и теорем, отражающих оптимальность потока минимальной стоимости, который получен в ходе выполнения алгоритма, в частности, определение потенциала вершины, приведенных или уменьшенных стоимостей, состояние вершины (вершина в состоянии излишка, дефицита, баланса). Отличительной чертой алгоритма является нечеткий характер параметров сети, таких как пропускные способности и стоимости перевозок, что позволяет учитывать изменения в окружающей среде, в частности, ремонтные работы, пробки на дорогах, изменения в ценах на бензин. Представлен численный пример, отражающий работу разработанного метода; показаны принципы построения нечеткой остаточной сети, сети с потенциалами и пр. Предложенный метод и его результаты могут использоваться при решении практических задач составления оптимальных маршрутов перевозок, планирования грузоперевозок на сетях железных и автомобильных дорог.

Нечеткая транспортная сеть; поток минимальной стоимости; нечеткая приведенная стоимость.

A.V. Bozhenyuk, E.M. Gerasimenko, I.N. Rozenberg

DEVELOPMENT OF THE MINIMUM COST FLOW METHOD WITH FUZZY ARC CAPACITIES AND COSTS BY THE POTENTIAL METHOD

This article describes a method for minimum cost flow finding in a network with fuzzy arc capacities and values of transmission costs of one flow unit along the arc. This problem wasn't wide described in the literature, as such tasks usually observed in crisp conditions and use Dijkstra's algorithm for the minimum cost path finding. But since the use of the algorithm is limited due to the negative arc costs of the one flow unit along the arc of the network, proposed method assumes introduction of the node potentials for operating with the negative transmission costs arising during the flow passing along the arcs of the network. Similarly, we introduce a number of

* Работа поддержана РФФИ, проект № 15-07-00185а.

definitions and theorems, reflecting the optimality of the minimum cost flow obtained during the execution of the algorithm, in particular, the definition of the node potential, reduced costs, imbalance of the node (the node has excess, deficit or it is balanced A distinctive feature of the algorithm is a fuzzy character of the network parameters such as arc capacities and transmission costs which allows to take into account the environmental changes, in particular, repairs, traffic jams, changes in the gasoline prices. The paper presents a numerical example reflecting the proposed method, principles of the fuzzy residual network construction, network with potentials. The proposed method and its results can be used for solving the practical tasks of the shipping routes finding, cargo planning on the railways and roads.

Fuzzy network; the minimum cost flow; fuzzy reduced cost.

Введение. Рассматриваемая в данной статье задача определения потока минимальной стоимости в транспортной сети является ключевой в теории потоков [1–3]. Актуальность задачи в том, что ее решение позволяет оптимизировать перевозки, выбирая наименьшие по стоимости пути передачи груза. При этом необходимо учесть неопределенность, присущую транспортной сети, источниками которой являются изменения в окружающей среде, человеческая деятельность, погрешности в измерениях и пр. [4]. Факторы, ведущие к неопределенности, вытекают из специфики вычисления пропускных способностей сети дорог [5] и подробно описаны в [4]. Задача нахождения потока минимальной стоимости была слабо освещена в литературе в нечетких условиях и преимущественно решалась как задача линейного программирования (ЛП) [6–8]. В работе [9] рассматривается решение задач нечеткого ЛП с помощью сравнения нечетких чисел на основе функций ранжирования [10, 11].

Целью данной статьи является разработка метода решения задачи нахождения потока минимальной стоимости в нечеткой транспортной сети с помощью графового метода, учитывающего критерий выбора кратчайшего пути (пути минимальной стоимости). Иными словами, будет рассмотрена задача нахождения потока минимальной стоимости транспортной сети с нечеткими пропускными способностями и стоимостями перевозок [12, 13]. Формально постановку данной задачи можно представить в виде:

$$\sum_{(x_i,x_j)\in A} c_{ij}\xi_{ij}, \tag{1}$$

$$\sum_{x_j\in\Gamma(x_i)} \xi_{ij} = \sum_{x_k\in\Gamma^{-1}(x_i)} \xi_{ki} = \begin{cases} \rho, x_i = s, \\ -\rho, x_i = t, \\ 0, x_i \neq s,t, \end{cases} \tag{2}$$

$$\xi_{ij} \le u_{ij}, \forall (x_i,x_j)\in A, \tag{3}$$

где c_{ij} – стоимость прохождения единицы потока по дуге (x_i,x_j); ξ_{ij} – величина потока, протекающего по дуге (x_i,x_j); ρ – заданное количество единиц потока, не превышающее максимально допустимый поток в транспортной сети; s – начальная вершина транспортной сети (источник); t – конечная вершина транспортной сети (сток); u_{ij} – пропускная способность дуги (x_i,x_j) транспортной сети. Выражение (1) есть целевая функция, отражающая нахождение потока минимальной стоимости. Уравнение (2) является условием сохранения потока. Ограничение на пропускные способности дуг указаны в уравнении (3).

Нахождение потока минимальной стоимости сопряжено с поиском кратчайших путей (путей минимальной стоимости). Существует большое количество алгоритмов поиска кратчайшего пути [14–18]. При решении данной задачи мы сталкиваемся с появлением дуг в остаточной сети, имеющих отрицательную стоимость, поэтому эффективный алгоритм Дейкстры [19] не может быть использован. Таким образом, будем применять алгоритм Эдмондса-Карпа [20] и Томизавы [21], который использует потенциалы вершин для преобразования отрицательных стоимостей в неотрицательные.

Метод. Рассмотрим метод нахождения потока минимальной стоимости в нечеткой транспортной сети. Данный метод опирается на понятие «нечетких приведенных (уменьшенных) стоимостей» **(*определение 1*)** [22, 23].

Определение 1

Пусть $\tilde{\pi}(x_i)$, $x_i \in X, i = 1,...,n$ – некоторые заданные веса вершин (потенциалы вершин). Зададим так называемые «нечеткие приведенные, или уменьшенные стоимости» $\tilde{c}_{ij}^{\pi}$, связанные с дугами остаточной сети, как:

$$\tilde{c}_{ij}^{\pi} = \tilde{c}_{ij}^{\mu} - \tilde{\pi}(x_i) + \tilde{\pi}(x_j). \tag{4}$$

В (4) $\tilde{c}_{ij}^{\mu}$ представляют собой стоимости дуг (x_i, x_j) в остаточной сети $\tilde{G}^{\mu}$, т.е.

$$\tilde{c}_{ij}^{\mu} = \begin{cases} \tilde{c}_{ij}, если\,(x_i, x_j) \in \tilde{A}^{\mu}, (x_i, x_j) \in \tilde{A}, \\ -\tilde{c}_{ji},\ если\,(x_i, x_j) \in \tilde{A}^{\mu},\ (x_i, x_j) \notin \tilde{A}. \end{cases}$$

Для некоторого цикла $\tilde{H}^{\mu}$ в остаточной сети справедливо:

$$\sum_{(x_i^{\mu}, x_i^{\mu}) \in \tilde{H}^{\mu}} \tilde{c}_{ij}^{\pi} = \sum_{(x_i^{\mu}, x_i^{\mu}) \in \tilde{H}^{\mu}} \tilde{c}_{ij}^{\mu}.$$

Зададим ***определение 2*** [22, 23]**.**

Определение 2

Для пути из s в t справедливо следующее равенство:

$$\sum_{(x_i^{\mu}, x_i^{\mu}) \in \tilde{P}^{\mu}} \tilde{c}_{ij}^{\pi} = \tilde{\pi}(t) - \tilde{\pi}(s) + \sum_{(x_i^{\mu}, x_i^{\mu}) \in \tilde{P}^{\mu}} \tilde{c}_{ij}^{\mu}. \tag{5}$$

Согласно выражению (5) потенциалы вершин не меняют пути минимальной стоимости между любой парой вершин.

Для доказательства оптимальности потока, полученного после введения потенциалов, приведем ***теорему 1*** [22, 23].

Теорема 1

Поток $\tilde{\xi}^*$ оптимален тогда и только тогда, когда существует векторов потенциалов, такой что $\tilde{c}_{ij}^{\pi} \geq \tilde{0}$ для всех $(x_i^{\mu}, x_j^{\mu}) \in \tilde{A}^{\mu}$.

Доказательство:

Предположим, существуют такие значения $\tilde{\pi}$, что $\tilde{c}_{ij}^{\pi} \geq \tilde{0}$ для $\forall (x_i^{\mu}, x_j^{\mu}) \in \tilde{A}^{\mu}$. Пусть $\tilde{H}^{\mu}$ – цикл в $\tilde{G}^{\mu}$, тогда:

$$\tilde{c}(\tilde{H}^{\mu}) = \sum_{(x_i^{\mu}, x_i^{\mu}) \in \tilde{H}^{\mu}} \tilde{c}_{ij}^{\mu} = \sum_{(x_i^{\mu}, x_i^{\mu}) \in \tilde{H}^{\mu}} \tilde{c}_{ij}^{\pi} \geq \tilde{0}.$$

Следовательно, цикла отрицательной стоимости в $\tilde{G}^{\mu}$ не существует и, как следствие, поток оптимален. Теорема доказана.

Покажем, что если в остаточной сети $\tilde{G}^{\mu}$ не существует цикла отрицательной стоимости, тогда существует вектор потоков с неотрицательными приведенными стоимостями.

Предположим, все вершины в остаточной сети $\tilde{G}^{\mu}$ могут быть достижимы из s. Пусть $\tilde{\gamma}^{\mu}(s, x_j)$ определяет длину кратчайшего пути из s в x_j^{μ} в $\tilde{G}^{\mu}$, полагая $\tilde{c}_{ij}^{\mu}$ длинами путей. Если $\tilde{G}^{\mu}$ не содержит цикла отрицательной стоимости, то $\tilde{\gamma}^{\mu}(s, x_j) \leq \tilde{\gamma}^{\mu}(s, x_i) + \tilde{c}_{ij}^{\mu}$. Следовательно, задавая $\tilde{\pi}(x_j) = -\tilde{\gamma}^{\mu}(s, x_j)$, получаем

$$\tilde{c}_{ij}^{\pi} = \tilde{c}_{ij}^{\mu} - \tilde{\pi}(x_i) + \tilde{\pi}(x_j) = \tilde{c}_{ij}^{\mu} + \tilde{\gamma}^{\mu}(s, x_i) - \tilde{\gamma}^{\mu}(s, x_j) \geq \tilde{0}.$$

Для потока $\tilde{\xi}$ и вершины $x_j \in X$ состояние вершины x_j задается как

$$\tilde{e}(x_j) = \tilde{\rho}_j + \sum_{(x_i, x_j) \in \tilde{A}} \tilde{\xi}_{ij} - \sum_{(x_j, x_i) \in \tilde{A}} \tilde{\xi}_{ji}. \quad (6)$$

Согласно (6):

Если $\tilde{e}(x_j) > \tilde{0}$, то состояние в вершине называют излишком.

Если $\tilde{e}(x_j) < \tilde{0}$, то состояние в вершине называют дефицитом.

Если $\tilde{e}(x_j) = \tilde{0}$, то состояние в вершине называют балансом.

$\tilde{\rho}_j$ – заданное значение потока для вершины x_j, называемое балансом вершины.

Если $\tilde{\rho}_j > \tilde{0}$, вершина x_j называется источником, $\tilde{\rho}_j$ – предложение вершины x_i.

Если $\tilde{\rho}_j = \tilde{0}$, вершина x_j называется промежуточной вершиной.

Если $\tilde{\rho}_j < \tilde{0}$, вершина x_j называется стоком, $\tilde{\rho}_j$ – спрос вершины x_i.

Представим алгоритм, реализующий нахождение потока минимальной стоимости в транспортной сети с нечеткими пропускными способностями и стоимостями. В его основе лежит правило построения нечеткой остаточной сети.

Правило 1 построения нечеткой остаточной сети для нахождения потока минимальной стоимости в нечеткой транспортной сети

Нечеткая остаточная сеть $\tilde{G}^{\mu} = (X^{\mu}, A^{\mu})$, где $X^{\mu} = X$ – множество вершин нечеткой остаточной сети, совпадающее с множеством вершин X сети $\tilde{G}$, а $\tilde{A}^{\mu} = \{< \tilde{u}_{ij}^{\mu} / (x_i^{\mu}, x_j^{\mu}) >\}$ – нечеткое множество ребер сети $\tilde{G}^{\mu}$, строится по следующим правилам: для всех дуг, если $\tilde{\xi}_{ij} < \tilde{u}_{ij}$, то включаем соответствующую дугу в $\tilde{G}^{\mu}$ с пропускной способностью $\tilde{u}_{ij}^{\mu} = \tilde{u}_{ij} - \tilde{\xi}_{ij}$, приведенной стоимостью $\tilde{c}_{ij}^{\pi} = \tilde{c}_{ij}^{\mu} - \tilde{\pi}_i + \tilde{\pi}_j$, где $\tilde{c}_{ij}^{\mu} = \tilde{c}_{ij}$. Для всех дуг, если $\tilde{\xi}_{ij} > \tilde{0}$, то включаем соответствующую дугу в $\tilde{G}^{\mu}$ с пропускной способностью $\tilde{u}_{ji}^{\mu} = \tilde{\xi}_{ij}$ и приведенной стоимостью $\tilde{c}_{ji}^{\pi} = \tilde{c}_{ji}^{\mu} + \tilde{\pi}_i - \tilde{\pi}_j$, где $\tilde{c}_{ji}^{\mu} = -\tilde{c}_{ij}$.

Представим формальный алгоритм, реализующий решение поставленной задачи.

Алгоритм решения задачи нахождения потока минимальной стоимости в транспортной сети с нечеткими пропускными способностями и стоимостями перевозок

Этап 1. Задаем начальные значения: $\tilde{\xi}_{ij} = \tilde{0},\ \tilde{\pi}(x_i) = \tilde{0},\ \tilde{e}(x_i) = \tilde{\rho}_i$ для $\forall\ x_i \in X$.

Этап 2. Проверка на существование излишка в вершине s.

2.1. Если существует излишек в вершине s, т.е. $\tilde{e}(s) > \tilde{0}$, переходим к **этапу 3.**

2.2. Если излишка в вершине s не существует, следовательно, заданный поток найден. Для нахождения его минимальной стоимости переходим от приведенных стоимостей к исходным, **конец.**

Этап 3. Строим нечеткую остаточную сеть $\tilde{G}^{\mu}$ согласно *правилу 1.* На первом шаге нечеткая остаточная сеть совпадает с исходной в силу равенства значений потоков $\tilde{\xi}_{ij} = \tilde{0}$, а приведенные стоимости совпадают с исходными, так как значения потенциалов $\tilde{\pi} = \tilde{0}$.

Этап 4. Определяем путь минимальной стоимости $\tilde{P}^{\mu}$ от s к t с помощью алгоритма Э. Дейкстры в остаточной сети, основываясь на приведенных стоимостях $\tilde{c}_{ij}^{\pi}$.

4.1. Если путь существует, т.е. вершине t приписывается постоянная пометка, останавливаемся и переходим к **этапу 5.**

4.2. Если пути не существует, т.е. вершина t не достижима, то задача не имеет решения, **конец.**

Этап 5. Пускаем по найденному пути $\tilde{P}^{\mu}$ значение потока $\tilde{\delta}^{\mu} = \min\{\tilde{u}(\tilde{P}^{\mu}), \tilde{e}(s), -\tilde{e}(t)\}$, где $\tilde{u}(\tilde{P}^{\mu})$ – пропускная способность пути $\tilde{P}^{\mu}$, определяемая минимальной из пропускных способностей ребер этого пути, т.е. $\tilde{u}(\tilde{P}^{\mu}) = \min[\tilde{u}_{ij}^{\mu}]$, $(x_i^{\mu}, x_j^{\mu}) \in \tilde{P}^{\mu}$.

Этап 6. Определяем новые значения потенциалов вершин как

$$\tilde{\pi}(x_i) = \begin{cases} \tilde{\pi}(x_i) - \tilde{\gamma}^{\mu}(s, x_i), \textit{если вершина } x_i^{\mu} \textit{ имеет постоянную пометку}, \\ \tilde{\pi}(x_i) - \tilde{\gamma}^{\mu}(s, t), \textit{в ином случае.} \end{cases} \quad (7)$$

Этап 7. Обновляем значения потоков в графе $\tilde{G}$: для дуг $(x_i^{\mu}, x_j^{\mu}) \notin \tilde{A}$, $(x_i^{\mu}, x_j^{\mu}) \in \tilde{A}^{\mu}$ в $\tilde{G}^{\mu}$ изменяем поток $\tilde{\xi}_{ji}$ по соответствующим дугам (x_j, x_i) из $\tilde{G}$ с $\tilde{\xi}_{ji}$ на $\tilde{\xi}_{ji} - \tilde{\delta}^{\mu}$. Для дуг $(x_i^{\mu}, x_j^{\mu}) \in \tilde{A}$, $(x_i^{\mu}, x_j^{\mu}) \in \tilde{A}^{\mu}$ в $\tilde{G}^{\mu}$ изменяем поток $\tilde{\xi}_{ij}$ по соответствующим дугам (x_i, x_j) из $\tilde{G}$ с $\tilde{\xi}_{ij}$ на $\tilde{\xi}_{ij} + \tilde{\delta}^{\mu}$, заменяем значение потока в графе $\tilde{G}$: $\tilde{\xi}_{ij} \to \tilde{\xi}_{ij} + \tilde{\delta}^{\mu} \tilde{P}^{\mu}$ и переходим к **этапу 2.**

Поскольку при использовании алгоритма Э. Дейкстры нас интересует путь минимальной стоимости от источника к стоку, нет необходимости находить путь минимальной стоимости от источника ко всем вершинам (как это делается традиционно при применении алгоритма Э. Дейкстры). Следовательно, критерием завершения алгоритма поиска пути минимальной стоимости Э. Дейкстры будет не приписывание постоянных пометок всем вершинам, а приписывание постоянной пометки вершине-стоку. Тогда обновление потенциалов вершин согласно **этапу 6,** алгоритма поиска потока минимальной стоимости, будет осуществляться согласно (7).

Численный пример. Рассмотрим численный пример, реализующий работу алгоритма нахождения потока минимальной стоимости в нечеткой транспортной сети. На рис. 1 дана транспортная сеть в виде нечеткого ориентированного графа, дугам которого приписаны нечеткие параметры пропускных способностей и стоимостей перевозок единицы потока по дугам графа. Пусть необходимо определить минимальную стоимость транспортировки «около 18» единиц потока и представить результат в виде нечеткого треугольного числа [24], если известны базовые значения пропускных способностей и стоимостей перевозок, представленные на рис. 2–5.

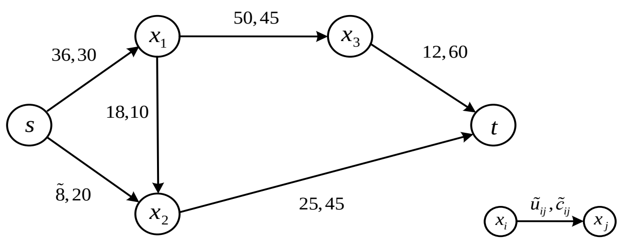

Рис. 1. Исходная транспортная сеть $\tilde{G}$

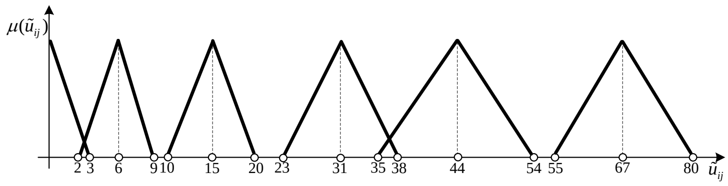

Рис. 2. Базовые значения пропускных способностей

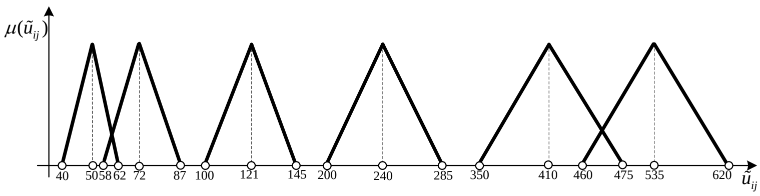

Рис. 3. Базовые значения стоимостей

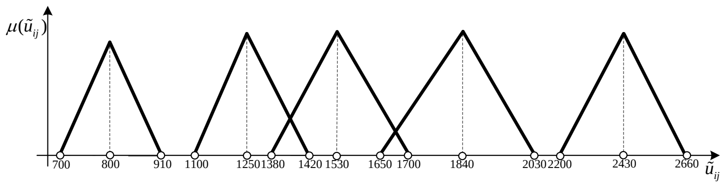

Рис. 4. Базовые значения стоимостей

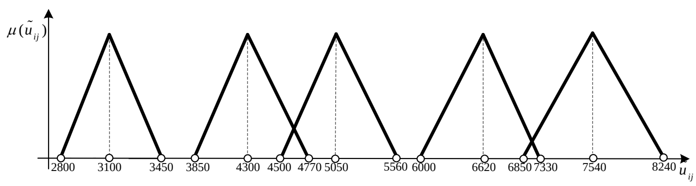

Рис. 5. Базовые значения стоимостей

Этап 1. Задаем начальные значения потоков и потенциалов вершин, равными $\tilde{0}$, т.е. $\tilde{\xi}_{ij} = \tilde{0}$, $\tilde{\pi}(x_i) = \tilde{0}$. Припишем каждой вершине соответствующее значение излишка $\tilde{e}(x_j) = \tilde{\rho}_j + \sum\limits_{(x_i, x_j)\in\tilde{A}} \tilde{\xi}_{ij} - \sum\limits_{(x_j, x_i)\in\tilde{A}} \tilde{\xi}_{ji}$, как показано на рис. 6.

Этап 2.1. Определим состояние вершины s: $\tilde{e}(s) = 18 + \tilde{0} - \tilde{0} > \tilde{0}$, т.е. вершина имеет излишек, следовательно, переходим к **этапу 3.**

Этап 3. На третьем этапе нечеткая остаточная сеть $\tilde{G}^{\mu} = (X^{\mu}, \tilde{A}^{\mu})$ совпадает с исходной, представленной на рис. 6, в силу равенства дуговых потоков $\tilde{0}$.

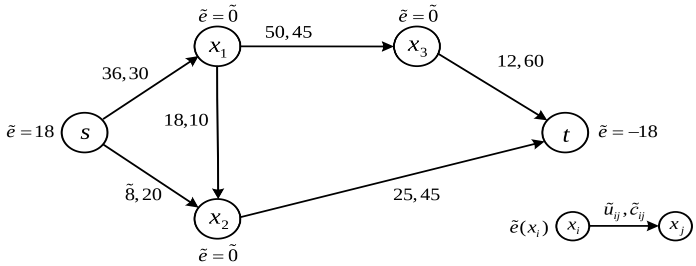

Рис. 6. Граф $\tilde{G}$ с заданными балансами вершин

Этап 4. Определяем путь минимальной стоимости от s к t с помощью алгоритма Э. Дейкстры в остаточной сети, представленной на рис. 6. Получаем путь $s \to x_2 \to t$ стоимости 65 единиц.

Этап 5. Пускаем по найденному пути $\tilde{\delta}^{\mu} = \min\{\tilde{u}(\tilde{P}^{\mu}), \tilde{e}(s), -\tilde{e}(t)\}$, т.е. $\tilde{\delta}^{\mu} = \min\{\tilde{8}, 25, 18, 18\} = \tilde{8}$ единиц потока.

Этап 6. Определяем новые значения потенциалов вершин:

$\tilde{\pi}(s) = \tilde{0} - \tilde{0} = \tilde{0}$ **,**

$\tilde{\pi}(x_1) = \tilde{0} - 30 = -30$,

$\tilde{\pi}(x_2) = \tilde{0} - 20 = -20$,

$\tilde{\pi}(x_3) = \tilde{0} - 65 = -65$,

$\tilde{\pi}(t) = \tilde{0} - 65 = -65$.

Этап 7. Обновляем значения потоков в $\tilde{G}$.

Поток $\tilde{\xi}_{ij} = \tilde{0}$ переходит в $\tilde{8}$. Строим граф с новым значением потока, как показано на рис. 7, и переходим к **этапу 2**.

Этап 2. Поверяем, существует ли излишек в вершине s. Так как $\tilde{e}(s) = 18 + \tilde{0} - \tilde{8} > \tilde{0}$, т.е. вершина имеет излишек, следовательно, переходим к **этапу 3.**

Этап 3. Вычисляем новые значения приведенных стоимостей согласно длинам путей от s к t:

$\tilde{c}^{\pi}_{sx_1} = \tilde{c}^{\mu}_{sx_1} - \tilde{\pi}_s + \tilde{\pi}_{x_1} = 30 - \tilde{0} - 30 = \tilde{0}$,

$\tilde{c}^{\pi}_{x_2 s} = \tilde{c}^{\mu}_{x_2 s} - \tilde{\pi}_{x_2} + \tilde{\pi}_s = -20 + 20 + \tilde{0} = \tilde{0}$,

$\tilde{c}^{\pi}_{x_1 x_2} = \tilde{c}^{\mu}_{x_1 x_2} - \tilde{\pi}_{x_1} + \tilde{\pi}_{x_2} = 10 + 30 - 20 = 20$,

$$\tilde{c}^{\pi}_{x_1x_3} = \tilde{c}^{\mu}_{x_1x_3} - \tilde{\pi}_{x_1} + \tilde{\pi}_{x_3} = 45 + 30 - 65 = 10,$$

$$\tilde{c}^{\pi}_{x_2t} = \tilde{c}^{\mu}_{x_2t} - \tilde{\pi}_{x_2} + \tilde{\pi}_{t} = 45 + 20 - 65 = \tilde{0},$$

$$\tilde{c}^{\pi}_{tx_2} = \tilde{c}^{\mu}_{tx_2} - \tilde{\pi}_{t} + \tilde{\pi}_{x_2} = -45 + 65 - 20 = \tilde{0},$$

$$\tilde{c}^{\pi}_{x_3t} = \tilde{c}^{\mu}_{x_3t} - \tilde{\pi}_{x_3} + \tilde{\pi}_{t} = 60 + 65 - 65 = 60.$$

Построим нечеткую остаточную сеть $\tilde{G}^{\mu}$ согласно значениям потоков, текущим по дугам графа на рис. 7, и вычисленным приведенным стоимостям, что показано на рис. 8.

Этап 4. Определяем путь минимальной стоимости от s к t с помощью алгоритма Э. Дейкстры в остаточной сети, представленной на рис. 8: $s \to x_1 \to x_2 \to t$.

Этап 5. Пускаем по найденному пути $\tilde{\delta}^{\mu} = \min\{\tilde{u}(\tilde{P}^{\mu}), \tilde{e}(s), -\tilde{e}(t)\}$, т.е. $\tilde{\delta}^{\mu} = \min\{36, 18, 17, (18 + \tilde{0} - \tilde{8}), -(-18 + \tilde{8} - \tilde{0})\} = 10$ единиц потока.

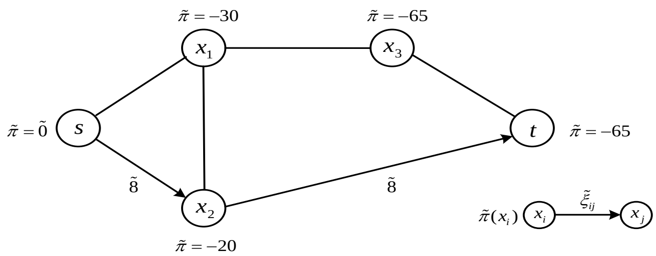

Рис. 7. Граф $\tilde{G}$ с потоком $\tilde{8}$ единиц и потенциалами вершин

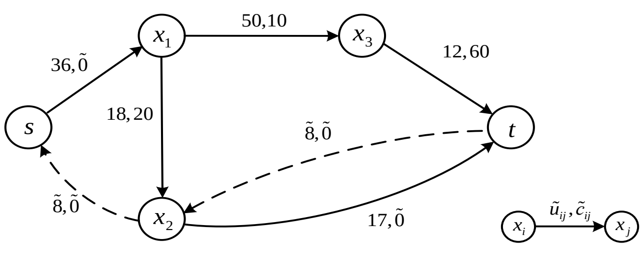

Рис. 8. Нечеткая остаточная сеть $\tilde{G}^{\mu}$ для графа на рис. 7

Этап 6. Определяем новые значения потенциалов вершин:

$$\tilde{\pi}(s) = \tilde{0} - \tilde{0} = \tilde{0},$$

$$\tilde{\pi}(x_1) = -30 - \tilde{0} = -30,$$

$$\tilde{\pi}(x_2) = -20 - 20 = -40,$$

$$\tilde{\pi}(x_3) = -65 - 10 = -75,$$

$$\tilde{\pi}(t) = -65 - 20 = -85.$$

Этап 7. Обновляем значения потоков в $\tilde{G}$.

Поток $\tilde{\xi}_{ij} = \tilde{8}$ переходит в 18. Строим граф с новым значением потока, как показано на рис. 9, и переходим к **этапу 2**.

Этап 2. Поверяем, существует ли излишек в вершине s. Так как $\tilde{e}(s) = 18 + \tilde{0} - 18 = \tilde{0}$, то вершина s находится в состоянии равновесия. Следовательно, найден заданный поток, имеющий минимальную стоимость.

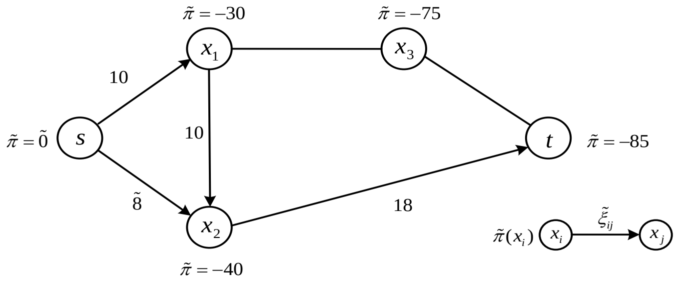

Рис. 9. Граф $\tilde{G}$ с потоком 18 единиц и потенциалами вершин

Определяем стоимость потока, равного 18 единиц, как: $10 \cdot 30 + \tilde{8} \cdot 20 + 10 \cdot 10 + 18 \cdot 45 = 1370$ условных единиц.

Согласно базовым значениям, заданным экспертом, а также методике вычисления границ отклонений, описанной в [12, 25], получаем нечеткую стоимость транспортировки (1370,150,170) условных единиц.

Заключение. Предложенный в статье метод определения потока минимальной стоимости в транспортной сети позволяет находить оптимальные пути передачи груза и перевозить по ним заданное количество потока с учетом нечетких пропускных способностей и стоимостей перевозок. Для нахождения потока минимальной стоимости вводятся потенциалы вершин, и осуществляется переход к приведенным стоимостям, что позволяет оперировать отрицательными значениями стоимостей перевозок, возникающих при решении задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Busacker R.G., Gowen P.* A procedure for determining a family of minimum-cost network flow patterns // Technical Report 15, Operations Research Office, John Hopkins University, 1961.
2. *Klein M.* A primal method for minimal cost flows with applications to the assignment and transportation problems // Management. Science. – 1967. – Vol. 14. – P. 205-220.
3. *Майника Э.* Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. – М.: Мир, 1981. – 326 с.
4. *Bozhenyuk A., Gerasimenko E.* Flows Finding in Networks in Fuzzy Conditions // Supply Chain Management Under Fuzzines, Studies in Fuzziness and Soft Computing; Cengiz Kahraman and Basar Öztaysi (Eds). – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014. – Vol. 313, Part III. – P. 269-291. DOI: 10.1007/978-3-642-53939-8_12.
5. Руководство по оценке пропускной способности автомобильных дорог. Минавтодор РСФСР. – М.: Транспорт, 1982. – 88 с.
6. *Ganesan K., Veeramani P.* Fuzzy Linear Programs with Trapezoidal Fuzzy Numbers // Ann Oper Res., 2006. – P. 305-315.
7. *Kumar A., Kaur J., Singh P.* Fuzzy Optimal Solution of Fully Fuzzy Linear Programming Problems with Inequality Constraints // International Journal of Mathematical and Computer Sciences. – 2010. – No. 6:1, pp. 37-41.
8. *Maleki H.R, Tata M., Mashinchi M.* Linear programming with fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. – 2000. – Vol. 109. – P .21-33.

9. *Maleki H.R., Mashinchi M.* Fuzzy Number Linear Programming: a Probabilistic Approach // J. Appl. Math. and Computing. – 2004. – Vol. 15. – P. 333-341.
10. *Yoon K.P.* A Probabilistic Approach to Rank Complex Fuzzy Numbers // Fuzzy Sets and Systems. – 1996. – Vol. 80. – P. 167-176.
11. *Allahviranloo T., Lotfi F.H., Kiasary M.K., Kiani N.A., Alizadeh L.* Solving Fully Fuzzy Linear Programming Problem by the Ranking // Applied Mathematical Sciences. – 2008. – Vol. 2, № 1. – P. 19-32.
12. *Bozhenyuk A., Gerasimenko E., Rozenberg I.* The Methods of Maximum Flow and Minimum Cost Flow Finding in Fuzzy Network. In: Ignatov, D., Kuznetsov, S., Poelmans, J. (Eds.) Concept Discovery in Unstructured Data Workshop (CDUD 2012) co-located with the 10th International Conference on Formal Concept Analysis (ICFCA 2012) May 2012, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium 2012. – P. 1-12.
13. *Bozhenyuk A., Gerasimenko E., Rozenberg I.* The task of minimum cost flow finding in transportation networks in fuzzy conditions // Proceedings of the 10th International FLINS Conference on Uncertainty Modeling in Knowledge Engineering and Decision Making Word Scientific, Istanbul, Turkey, 26-29 August 2012. – P. 354-359.
14. *Floyd R.W.* Algorithm 97: Shortest Path // Communications of the ACM. – 1962. – Vol. 5 (6). – P. 345.
15. *Ford L.R. Jr.* Network Flow Theory // Paper P-923, Santa Monica, California, RAND Corporation. – 1956. – 24 p.
16. *Bellman R.* On a Routing Problem // Quarterly of Applied Mathematics. – 1958. – Vol. 16, № 1. – P. 87-90.
17. *Johnson D.B.* Efficient algorithms for shortest paths in sparse networks // Journal of the ACM. – 1977. – Vol. 24 (1). – P. 1-13.
18. *Левит Б.Ю.* Алгоритмы поиска кратчайших путей на графе // Труды института гидродинамики СО АН СССР: Сб. "Моделирование процессов управления. – Новосибирск, 1971. – Вып. 4. – С. 1117-1148.
19. *Dijkstra E.W.* A note on two problems in connextion with graphs // Numerische Mathematik. – 1959. – Vol. 1. – P. 269-271.
20. *Edmonds J., Karp R.M.* Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems // Journal of the Association for Computing Machinery. – 1972. – Vol. 19, issue 2. – P. 248-264.
21. *Tomizawa N.* On some techniques useful for solution of transportation network problems // Networks. – 1971. – Vol. 1. – P. 173-194.
22. *Pouly A.* Minimum cost flows, 23 November, 2010. http://perso.ens-lyon.fr/eric.thierry/Graphes2010/amaury-pouly.pdf.
23. *Герасименко Е.М.* Метод потенциалов для определения заданного потока минимальной стоимости в нечетком динамическом графе // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2014. – № 4 (153). – С. 83-89.
24. *Dubois D., Prade H.* Operations on Fuzzy Number // J. Systems Sci. – 1978. – № 9 (6). – P. 613-626.
25. *Малышев Н.Г., Берштейн Л.С., Боженюк А.В.* Нечеткие модели для экспертных систем в САПР: Монография. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 136 с.

REFERENCES

1. *Busacker R.G., Gowen P.* A procedure for determining a family of minimum-cost network flow patterns, *Technical Report 15, Operations Research Office, John Hopkins University,* 1961.
2. *Klein M.* A primal method for minimal cost flows with applications to the assignment and transportation problems, *Management. Science*, 1967, Vol. 14, pp. 205-220.
3. *Maynika E.* Algoritmy optimizatsii na setyakh i grafakh [Optimization algorithms for networks and graphs]. Moscow: Mir, 1981, 326 p.
4. *Bozhenyuk A., Gerasimenko E.* Flows Finding in Networks in Fuzzy Conditions, *Supply Chain Management Under Fuzzines, Studies in Fuzziness and Soft Computing; Cengiz Kahraman and Basar Öztaysi (Eds).* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014, Vol. 313, Part III, pp. 269-291. DOI: 10.1007/978-3-642-53939-8_12.
5. Rukovodstvo po otsenke propusknoy sposobnosti avtomobil'nykh dorog. Minavtodor RSFSR [Guidance for estimating road capacity. Minavtodor the RSFSR]. Moscow: Transport, 1982, 88 p.

6. *Ganesan K., Veeramani P.* Fuzzy Linear Programs with Trapezoidal Fuzzy Numbers, *Ann Oper Res.*, 2006, pp. 305-315.
7. *Kumar A., Kaur J., Singh P.* Fuzzy Optimal Solution of Fully Fuzzy Linear Programming Problems with Inequality Constraints, *International Journal of Mathematical and Computer Sciencesб* 2010, No. 6:1, pp. 37-41.
8. *Maleki H.R, Tata M., Mashinchi M.* Linear programming with fuzzy variables, *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, Vol. 109, pp .21-33.
9. *Maleki H.R., Mashinchi M.* Fuzzy Number Linear Programming: a Probabilistic Approach, *J. Appl. Math. and Computing*, 2004, Vol. 15, pp. 333-341.
10. *Yoon K.P.* A Probabilistic Approach to Rank Complex Fuzzy Numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, Vol. 80, pp. 167-176.
11. *Allahviranloo T., Lotfi F.H., Kiasary M.K., Kiani N.A., Alizadeh L.* Solving Fully Fuzzy Linear Programming Problem by the Ranking, Applied Mathematical Sciences, 2008, Vol. 2, No. 1, pp. 19-32.
12. *Bozhenyuk A., Gerasimenko E., Rozenberg I.* The Methods of Maximum Flow and Minimum Cost Flow Finding in Fuzzy Network. In: Ignatov, D., Kuznetsov, S., Poelmans, J. (Eds.) Concept Discovery in Unstructured Data Workshop (CDUD 2012) co-located with the 10th International Conference on Formal Concept Analysis (ICFCA 2012) May 2012, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium 2012, pp. 1-12.
13. *Bozhenyuk A., Gerasimenko E., Rozenberg I.* The task of minimum cost flow finding in transportation networks in fuzzy conditions, *Proceedings of the 10th International FLINS Conference on Uncertainty Modeling in Knowledge Engineering and Decision Making Word Scientific, Istanbul, Turkey, 26-29 August 2012*, pp. 354-359.
14. *Floyd R.W.* Algorithm 97: Shortest Path, *Communications of the ACM*, 1962, Vol. 5 (6), pp. 345.
15. *Ford L.R. Jr.* Network Flow Theory, *Paper P-923, Santa Monica, California, RAND Corporation*, 1956, 24 p..
16. *Bellman R.* On a Routing Problem, *Quarterly of Applied Mathematics*, 1958, Vol. 16, No. 1, pp. 87-90.
17. *Johnson D.B.* Efficient algorithms for shortest paths in sparse networks, *Journal of the ACM,* 1977, Vol. 24 (1), pp. 1-13.
18. *Levit B.Yu.* Algoritmy poiska kratchayshikh putey na grafe [Algorithms for finding shortest paths on a graph], *Trudy instituta gidro-dinamiki SO AN SSSR: Sb. "Modelirovanie protsessov upravleniya* [Proceedings of Institute of hydrodynamics of SB as USSR: the Collection "Modelling of control processes]. Novosibirsk, 1971, Issue 4, pp. 1117-1148.
19. *Dijkstra E.W.* A note on two problems in connextion with graphs, *Numerische Mathematik*, 1959, Vol. 1, pp. 269-271.
20. *Edmonds J., Karp R.M.* Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 1972, Vol. 19, issue 2, pp. 248-264.
21. *Tomizawa N.* On some techniques useful for solution of transportation network problems, *Networks*, 1971, Vol. 1, pp. 173-194.
22. *Pouly A.* Minimum cost flows, 23 November, 2010. Available at: http://perso.ens-lyon.fr/eric.thierry/Graphes2010/amaury-pouly.pdf.
23. *Gerasimenko E.M.* Metod potentsialov dlya opredeleniya zadannogo potoka minimal'noy stoimosti v nechetkom dinamicheskom grafe [Potentials method for minimum cost flow defining in fuzzy dynamic graph], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2014, No. 4 (153), pp. 83-89.
24. *Dubois D., Prade H.* Operations on Fuzzy Number, *J. Systems Sci*., 1978, No. 9 (6), pp. 613-626.
25. *Malyshev N.G., Bershteyn L.S., Bozhenyuk A.V.* Nechetkie modeli dlya ekspertnykh sistem v SAPR: Monografiya [Fuzzy models for expert systems in CAD systems: Monograph]. Moscow: Energoatomizdat, 1991, 136 p.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.П. Карелин.

Боженюк Александр Витальевич – Южный федеральный университет; e-mail: avb002@yandex.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371695; кафедра информационно-аналитических систем безопасности; д.т.н.; профессор.

Герасименко Евгения Михайловна – Научно-технический центр «Информационные технологии» Южного федерального университета (НТЦ «Интех» ЮФУ); e-mail: e.rogushina@gmail.com; 347922, г. Таганрог, Октябрьская площадь, 4; тел.: +79885315343; к.т.н.; м.н.с.

Розенберг Игорь Наумович – ОАО «Научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт инженеров железнодорожного транспорта» (НИИАС); e-mail: I.kudreyko@gismps.ru; 109029, Москва, ул. Нижегородская, 27, стр. 1; тел.: 84959677701; д.т.н.; зам. генерального директора.

Bozhenyuk Alexandr Vitalievich – Southern Federal University; e-mail: avb002@yandex.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371695; the department of information-analytical systems of safety; dr. of eng. sc.; professor.

Gerasimenko Evgeniya Michailovna – Scientific and Technical Center «Intech» of Southern Federal University; e-mail: e.rogushina@gmail.com; 4, Oktyabrskaya Square, Taganrog, 347922, Russia; phone: + 79885315343; cand. of eng. sc.; junior scientist.

Rozenberg Igor Naymovich – Public corporation "Research and development institute of railway engineers"; e-mail: I.kudreyko@gismps.ru; 27/1, Nizhegorodskaya, Moscow, 109029, Russia; phone: +74959677701ж dr. of eng. sc.; deputy director.

УДК 681.3

Ю.О. Чернышев, Н.Н. Венцов, П.А. Панасенко

РАЗРАБОТКА СПОСОБА ФОРМИРОВАНИЯ НЕЧЕТКИХ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ОСНОВЕ ОПЕРАЦИИ ИМПЛИКАЦИИ*

Принципиальным отличием сформулированной проблемы является разработка элементов математического аппарата, обеспечивающего вариативные расплывчатые оценки анализируемого решения. Вариативность оценок заключается в возможности построения различных обобщенных функций принадлежности текущего решения к множеству допустимых решений на основе сопоставления двух расплывчатых ограничений. Разработан способ формирования обобщенных нечетких ограничений на основе импликации запрещающего и разрешающего правил. Импликации вычисляются в соответствии с логиками Райхенбаха, Лукасевича, Рейчера-Геинеса, правила заданы в виде функций. Приведено сопоставление полученных импликаций, показано влияние операции CON на результаты, полученные при помощи логик Райхенбаха и Лукасевича. Обобщенная функция принадлежности, полученная импликацией запрещающего правила в разрешающее по Райхенбаху, стремится к единице (равна единице), когда функция, описывающая разрешающее правило, стремится к единице (равна единице) или функция, описывающая запрещающее правило к нулю (равна нулю). Поэтому импликацию по Райхенбаху целесообразно использовать при проектировании узлов, к которым предъявляются повышенные требования в области надежности, точности и т.д. Импликация запрещающего правила в разрешающее по Лукасевичу равна единице в точках, для которых значение функции, описывающей разрешающее правило, больше, чем значение функции, описывающей запрещающее правило. Если значение функции, описывающей разрешающее правило, незначительно, меньше значения функции, описывающей запрещающее правило, то импликация по Лукасевичу стремится к единице. Импликация запрещающего правила в разрешающее по Рейчеру-Геинесу равна единице, когда значение функции, описывающей разрешающее правило, не меньше, чем значение функции описывающей запрещающее. В противном случае импликация по Рейчер-Геинесу равна нулю. Полученные результаты позволяют говорить о том, что, в случае, если необ-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты: № 13-01-00343, № 15-01-05129).