Раздел II. Моделирование сложных систем

УДК 621.376.57

П.П. Кравченко, Л.В. Пирская

МЕТОД ОРГАНИЗАЦИИ ИТЕРАЦИОННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДЕЛЬТА-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА*

Рассматривается итерационный метод решения систем линейных алгебраических уравнений с постоянными и переменными свободными членами, базирующийся на использовании дельта-преобразований второго порядка с переменным квантом. Использование данной методологии позволяет существенно сократить количество итераций по сравнению с использованием неизменного кванта и обеспечить возможность реализации вычислительного процесса в специализированном вычислителе без устройств умножения многоразрядных кодов. Впервые освещаются основные теоретические положения, обосновывающие приближенное решение вопроса минимизации количества итераций при использовании переменного кванта. В теоретическом обосновании формируются оценки, характеризующие оптимизированную длительность идеализированных итерационных циклов с постоянным квантом определенного значения. Для реализации реальных процессов разработаны целочисленные оценки параметров, определяющие способ задания последовательности значений переменных квантов в циклах и базирующиеся на использовании четырех или восьми идеализированных итераций в каждом цикле. Предложены условия эффективного завершения итерационных процессов в циклах. В работе приводятся результаты компьютерного моделирования итерационного решения различных систем линейных алгебраических уравнений, отличающихся скоростью сходимости. Представлены результаты компьютерного моделирования решения СЛАУ при гармонических свободных членах, показавшие преимущество по величине реализуемого шага решения в установившемся процессе в ~80 раз при использовании дельта-преобразований второго порядка по отношению к использованию дельта-преобразований первого порядка.

Итерационные методы; решение систем линейных алгебраических уравнений; дельта-преобразования второго порядка; дельта-преобразования первого порядка; специализированные вычислители; ПЛИС.

P.P. Kravchenko, L.V. Pirskaya

METHOD OF ITERATION SOLVING OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS SYSTEMS USING THE SECOND ORDER DELTA-TRANSFORMATIONS

In this paper it is considered the iterative method for solving systems of linear algebraic equations with constant and variable free terms, based on using the second order delta-transformations with variable quantum. Using this methodology allows to significantly reduce the number of iterations than using constant quantum and to implement the computing process in a special-purpose computing without the multidigit multiplication operation. For the first time it is represented the basic theoretical principles, substantiating the approximate the problem solution of minimizing the number of iterations using the variable quantum. In the theoretical substantiation it is formulated assessments, describing an optimized duration of idealized iterative cycles

* Работа выполнена в рамках выполнения базовой части государственного задания (проект № 3442).

with constant quantum of a certain value. To implement real processes it is developed integer parameters estimates that determine how the sequence variables quanta in cycles is set and based on using four or eight idealized iterations in each cycle. There are the conditions for the efficient completion of the iterative processes in cycles. The paper presents the computer simulation results of the iterative solutions of different linear algebraic equations systems with different speeds of convergence. It is presented the results of computer simulation for solving the linear algebraic equations systems with harmonic free terms, showed the benefits of largest solutions implemented step in the steady process in ~ 80 times by using the second order delta-transformations in comparison with using the first order delta-transformations.

Iterative methods; solving of linear algebraic equations systems; delta-transformations of the second order; delta-transformations of the first order; special-purpose computer; FPGA.

Введение. На всех этапах развития вычислительной техники уделялось и уделяется в настоящее время большое внимание вопросам проектирования функционирующих в реальном масштабе времени специализированных вычислительных средств, позволяющих обеспечивать необходимые показатели по быстродействию в сочетании с минимизированными затратами аппаратных ресурсов и потребляемой энергии. Отдельной компонентой в решении данных вопросов могут выступать задачи вычислительной математики, в которых используются системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Однако известные, в частности, итерационные методы решения СЛАУ при реализации на основе специализированных вычислителей характеризуются значительными затратами аппаратных ресурсов, что связано, в первую очередь, с необходимостью реализации устройств умножения многоразрядных кодов переменных и коэффициентов.

Известны итерационные методы решения СЛАУ, исключающие операцию умножения, базирующиеся на основе дельта-преобразований первого и второго порядков [1–8]. Использование дельта-преобразований первого порядка с переменным квантом позволяет существенно сократить количество итераций по сравнению с использованием неизменного кванта и приблизиться по количеству итераций к методу простой итерации [5–6].

Известны методы оптимизированных дельта-преобразований второго порядка и использования постоянного кванта, характеризующиеся по сравнению с дельта-преобразованиями первого порядка более высокими динамическими (сокращение количества шагов переходного процесса) и точностными характеристиками [7–8]. Однако в известных публикациях отсутствует рассмотрение вопроса использования переменного кванта для оптимизированных дельта-преобразований второго порядка, а также решения СЛАУ с переменной правой частью и переменным квантом.

В связи с отмеченным, целесообразно рассмотрение в качестве перспективного направления в исследовании решения СЛАУ метод с использованием дельта-преобразований второго порядка и переменного кванта.

В настоящей работе рассматриваются вопросы организации итерационного процесса решения СЛАУ с постоянной и переменной правой частью на основе дельта-преобразований второго порядка. Впервые анализируются возможности введения для данного вида преобразований переменного кванта; предлагаемые решения базируются на минимизации длительности итерационных процессов.

1. Постановка задачи. Пусть исходная СЛАУ содержит матрицу постоянных коэффициентов, в общем случае переменные свободные члены, удовлетворяет условиям сходимости при реализации метода простой итерации и имеет вид

$$\mathrm{B}\mathrm{Y}^{*}(t) = G(t). \tag{1}$$

Преобразуем систему и переходим к форме записи с введением невязки $z(t)$ и использованием итерационного метода:

$$z(t) = Y(t) - AY(t) - D(t) . \qquad (2)$$

В приведенных системах $B = [b_{rj}]$, $A = [b_{rj} / b_{rr}]$ – матрицы коэффициентов размерности $n \times n$; $G(t)$, $D(t)$ – вектор-столбцы свободных членов системы (в частном случае для системы с постоянными свободными членами $G(t) = G = [g_r]$, $D(t) = D = [g_r / b_{rr}]$); $Y^*(t)$ – вектор-столбец неизвестных системы; $z(t)$, $Y(t)$ – вектор-столбцы невязок и приближенных значений неизвестных; t – независимая переменная; $\det A \neq 0$.

Алгоритм итерационного решения системы (1) с использованием дельта-преобразования второго порядка и переменного кванта представим в следующей разностной форме для i-го шага при начальных условиях $Y_{r01} = 0$, $\nabla Y_{r01} = 0$, $z_{r01} = -D_{r01}$, $\nabla z_{r01} = -\nabla D_{r01}$, $r = \overline{1,n}$ и использовании представленных в работах [7–8] материалов:

– демодуляция:

$$\nabla^2 Y_{ril} = c_l^* \Delta_{ril} ; \qquad (3.1)$$

$$\nabla Y_{ril} = \nabla Y_{r(i-1)l} + \nabla^2 Y_{ril} ; \qquad (3.2)$$

$$Y_{ril} = Y_{r(i-1)l} + \nabla Y_{ril} ; \qquad (3.3)$$

$$r = \overline{1,n} ,\ i = 1,2,\ldots,R_l ,\ l = 1,2,\ldots,P ;$$

– формирование второй разности преобразуемой переменной:

$$\nabla^2 y_{ril} = \sum_{j=1}^{n} a_{rj} c_l^* \Delta_{jil} + \nabla^2 D_{ril} ; \qquad (3.4)$$

– формирование значений невязок:

$$\nabla^2 z_{ril} = \nabla^2 Y_{ril} - \nabla^2 y_{ril} ; \qquad (3.5)$$

$$\nabla z_{ril} = \nabla z_{r(i-1)l} + \nabla^2 z_{ril} ; \qquad (3.6)$$

$$z_{ril} = z_{r(i-1)l} + \nabla z_{ril} ; \qquad (3.7)$$

– формирование значений переключающих функций и знаков квантов вторых разностей:

$$F_{ril} = z_{ril} + 1.5 \nabla z_{ril} + (0.5 \nabla z_{ril}^2 / c_l - 0.125 c_l) sign(\nabla z_{ril}) ; \qquad (3.8)$$

$$\Delta_{r(i+1)l} = -sign F_{ril} ; \Delta_{ril} \in \{+1,-1\} ,\ c_l = 0{,}75 c_l^* . \qquad (3.9)$$

В алгоритме (3) c_l^* – вес модуля кванта преобразования на l-м итерационном цикле ($c_l^* > 0$); P – количество циклов, выполняемых при постоянных по модулю значениях квантов; R_l – количество итераций в цикле. Кроме того, для стыков участков соседних циклов при решении СЛАУ с переменными свободными членами используются соотношения: $Y_{r0l} = Y_{rR(l-1)}$; $z_{r0l} = z_{rR(l-1)}$. При решении СЛАУ с постоянными свободными членами при переходе от цикла к циклу $Y_{r0l} = Y_{rR(l-1)}$, $z_{r0l} = z_{rR(l-1)}$; $\nabla Y_{r0l} = 0$; $\nabla z_{r0l} = 0$.

2. Исследование вопросов минимизации по количеству итераций решения СЛАУ с постоянными свободными членами на основе дельта-преобразований второго порядка. Рассмотрим условия построения оптимизированного по количеству циклов и значений квантов в циклах, ориентированных на минимизацию количества итераций.

2.1. Исходные положения в решении задачи оптимизации. Решение задачи базируется на идеализации итерационного процесса, сущность которой состоит в предположении о значении $\nabla^2 y_{ril} = 0$. Допустимость введения данного предположения обуславливается тем, что решение вопроса реализуется приближенно, а реальное для СЛАУ значение $\nabla^2 y_{ril} \neq 0$ может приводить как к увеличению, так и к уменьшению количества итераций.

В работе [8] показано, что в условиях отсутствия внешних возмущений (применительно к рассматриваемому случаю $\nabla^2 y_{ril} = 0$) и наихудшем характере поведения демодулированных значений ошибки (в рамках данного исследования под ошибкой и невязкой подразумеваются одни и те же значения переменной), при выполнении дельта-преобразований второго порядка максимальные из всех возможных минимальных значений ошибки вблизи оси ординат в установившемся процессе не превосходят $0,75c_l^*$. Для упрощения формируемых далее выражений принимаем $|z_{rRl}|_{\max} = c_l^*$, и данное значение в решении задачи оптимизации принимается как конечное в цикле.

С учетом указанных выше условий количество шагов (итераций) R_l для l-го цикла, $l = 1,2,\ldots,P$ представляем в виде (предполагается $\nabla z_{r0l} \approx 0$, R_l – пока не целое число) [8]:

$$R_l \approx 2\sqrt{|z_{r0l}|_{\max} / c_l^*}\ . \qquad (4)$$

Обобщая изложенное выше, для проведения теоретического обоснования условий организации итерационного вычислительного процесса с изменяющимся квантом дельта-преобразования второго порядка принимаем:

– соотношение (4) в качестве основного расчетного для оценки количества итераций в идеализированном цикле;

– в l-м цикле в качестве кванта преобразования – c_l^*, в качестве начального значения ошибки в цикле – значение c_{l-1}^*, $l = 1,2,\ldots,P$.

2.2. Разработка оценок минимальной длительности идеализированных итерационных процессов с переменным квантом при $\nabla^2 y_{ril} = 0$. Количество итераций (длительность переходного процесса) М идеализированного процесса решения СЛАУ представим в виде:

$$M = \sum_{l=1}^{P} R_l\ ,\ l = 1,2,...,P, \qquad (5)$$

или с учетом (4)

$$M = 2\cdot\sum_{l=1}^{P}\sqrt{|z_{0l}|_{\max} / c_l^*}\ . \qquad (6)$$

Для перехода от цикла к циклу принимаем

$$|z_{0l}|_{\max} = c_{l-1}^*,\ l = 1,2,\ldots,P\ ,$$

и преобразуем выражение (6):

$$M = 2\cdot(\sqrt{|z_{01}|_{\max}/c_1^*} + \sqrt{c_1^*/c_2^*} + \sqrt{c_2^*/c_3^*} + \ldots + \sqrt{c_{P-1}^*/c_P^*}). \quad (7)$$

Для всех циклов принимаем в виде одинаковой величины

$$R_l = R,\ l = 1,2,\ldots,P. \quad (8)$$

Начальные значения невязки $|z_{01}|_{\max}$ и веса минимального кванта c_P^*, связанного с необходимой точностью вычислений, задаются в качестве начальных условий. Учитывая условие (7) и (8) можно получить

$$R = 2\cdot\left(\sqrt[2P]{|z_{01}|_{\max}/c_P^*}\right). \quad (9)$$

С учетом последнего выражения (9) оценка длительности переходного процесса (5) принимает вид

$$M = 2P\cdot\left(\sqrt[2P]{|z_{01}|_{\max}/c_P^*}\right). \quad (10)$$

Рассмотрим условия обеспечения минимального значения *M*. Для этого дифференцируем выражение (10), результат приравниваем к нулю и получаем

$$P = 0.5\cdot\ln(|z_{01}|_{\max}/c_P^*). \quad (11)$$

В итоге оценка (10) количества итераций (длительности идеализированного переходного процесса) *M* с учетом (11) принимает вид:

$$M = \ln(|z_{01}|_{\max}/c_P^*)\cdot(|z_{01}|_{\max}/c_P^*)^{1/\ln(|z_{01}|_{\max}/c_P^*)}. \quad (12)$$

Используя определение натурального логарифма, для выражения (11), запишем:

$$e^{2P} = |z_{01}|_{\max}/c_P^*. \quad (13)$$

В то же время выражение (9) можно записать в виде

$$(0.5\cdot R)^{2P} = |z_{01}|_{\max}/c_P^*. \quad (14)$$

Из равенства правых частей (13), (14) следует равенство левых частей: $e^{2p} = (0,5\cdot R)^{2p}$, откуда для оптимального значения *R* получаем

$$R = 2e = 5{,}44.$$

Таким образом, при $\nabla^2 y_{ril} = 0$ минимальное количество итераций идеализированного процесса в цикле, в котором остается неизменным значение кванта преобразования, по существу не зависит от начального значения невязки $|z_{01}|_{\max}$ и веса минимального кванта c_P^*, а является константой, равной удвоенному числу Эйлера.

Полученное соотношение (12), характеризующее длительность *M* идеализированного переходного процесса для дельта-преобразования второго порядка при постоянных свободных членах СЛАУ и переменных квантах, оказывается идентичным соотношению для оценки количества итераций при использовании дельта-преобразования первого порядка [5–6].

2.3. Формирование условий и параметров для реализации итерационного процесса с учетом $\nabla^2 y_{ril} \neq 0$. В реальном вычислительном процессе при выполнении условий сходимости по значению нормы и использовании дельта-преобразований второго порядка процесс уменьшения невязки сохраняется, так как в ходе выполнения переходного процесса постоянно действуют ограниченные по модулю допустимые возмущающие воздействия $(|\nabla^2 y_{ril}|/c_l^*) \le (\xi/c_l^*)$, где

ξ / c_l^* для дельта-преобразований второго порядка характеризует максимальный уровень действующих допустимых возмущающих воздействий [8]. При этом для соответствующей ограниченной нормы СЛАУ можно записать [8]:

$$\xi / c_l^* = \left|\nabla^2 y_{ril}\right|_{\max} / c_l^* = \sum_{j=1}^{n} \left|a_{rj}\right| + \left|\nabla^2 D_{ril}\right|_{\max} / c_l^* ; \tag{15}$$

$$r = \overline{1,n}\,,\; i = 1,2,\ldots,R_l\,;\; l = 1,2,\ldots,P\,.$$

В зависимости от знака величины $\nabla^2 y_{ril}$ реальная скорость уменьшения невязки увеличивается или уменьшается. Количество итераций при этом может увеличиться или уменьшиться относительно приближенной оценки (4).

В рамках решения данной задачи, связанной с организацией решения СЛАУ при $\nabla^2 y_{ril} \neq 0$, необходимо определить целочисленное количество циклов и связанные с этим количеством параметры, устанавливающие связь значений квантов преобразования между соседними циклами. Кроме того, необходимо сформулировать условия завершения итераций в циклах.

2.3.1. Разработка целочисленных параметров итерационных процессов с переменным квантом при $\nabla^2 y_{ril} \neq 0$. Сущность реализации итерационного процесса решения СЛАУ без использования операции умножения многоразрядных кодов состоит в том, что значения постоянных величин (квантов) c_l^*, $l = 1,2,\ldots,P$ должны представляться в виде 2^{-s}, $s \in N$, а P и R – в виде целочисленных значений P_{int} и R_{int} соответственно. При этом в алгоритме (3) на каждой итерации операция многоразрядного умножения коэффициента матрицы на квант преобразования может быть представлена операцией однотактного сдвига этого коэффициента на S двоичных разрядов с присвоением соответствующего знака.

Соотношения между квантами соседних циклов можно записать в виде:

$$c_{l-1}^* = c_l^* \cdot R\,,\; l = \overline{P,1}\,.$$

Для того чтобы все c_l^*, $l = 1,2,\ldots,P$ могли быть представлены в виде 2^{-s}, $s \in N$, достаточно, чтобы $c_P^* = 2^{-s}$, $s \in N$ и

$$R_{\text{int}} = 2^k,\; k \in N\,. \tag{16}$$

В качестве целых значений R_{int} целесообразно принять числа, наиболее близкие к оптимальной оценке $R = 2e$, т.е. $R_{\text{int},1} = 4$ и $R_{\text{int},2} = 8$.

Далее определяем $P_{\text{int},(1,2)}$. Логарифмируем выражение (14):

$$\ln(0,5 \cdot R)^{2P} = \ln(\left|z_{01}\right|_{\max} / c_P^*)\,.$$

Используя свойства логарифма, получаем выражение для целочисленных значений $P_{\text{int},(1,2)}$:

$$P_{\text{int},(1,2)} = \left|\ln(\left|z_{01}\right|_{\max} / c_P^*) / (2 \cdot \ln(0.5 \cdot R_{\text{int},(1,2)}))\right|. \tag{17}$$

Выражение (17) представляет целую часть от числа, округленную в большую сторону. Теперь оценка общего количества итераций принимает вид

$$M_{\text{int},(1,2)} = P_{\text{int},(1,2)} R_{\text{int},(1,2)}\,. \tag{18}$$

С целью упрощения и универсализации алгоритма (3) представляется целесообразным создание универсальных шаблонов, задающих количество циклов и итераций в циклах. При необходимости в процессе реализации последнего цикла возможно варьирование в небольших пределах значением c_P^*, что также в целом может не оказывать существенное влияние на общее количество итераций.

На основании (16), (17) можно записать следующие соотношения для квантов соседних циклов (s – степень минимального кванта, $s \in N$):

– для $R_{\text{int},1} = 4$ $c^*_{P_{\text{int},1}-l} = 2^{2(l-1)-s}$, $l = \overline{P_{\text{int},1},1}$

и

– для $R_{\text{int},2} = 8$ $c^*_{P_{\text{int},2}-l} = 2^{3(l-1)-s}$, $l = \overline{P_{\text{int},2},1}$.

Оптимизированные параметры $R_{\text{int},(1,2)}$ и $P_{\text{int},(1,2)}$ получены для условия $\nabla^2 y_{ril} = 0$. В реальном вычислительном процессе, как это демонстрируется, в частности, ниже при освещении результатов экспериментов, количество итераций в циклах может быть большим или меньшим относительно значения $R_{\text{int},(1,2)}$ ($P_{\text{int},(1,2)}$ – постоянный параметр).

2.3.2. Формирование условий завершения итерационных процессов в циклах. В работе [8] для дельта-преобразований второго порядка показано, что при ограниченных возмущениях и наихудшем характере поведения ошибки максимальные из всех возможных минимальных значений отсчетов ошибок $|z_{ril}|^* / c_l^*$, находящихся в непосредственной близости от оси ординат в установившемся процессе, не превосходят определенного значения. Применительно к рассматриваемой задаче уровень наихудших возмущений определяется значением $|\nabla^2 y_{ril}|_{\max} / c_l^*$, т.е. нормой r-го уравнения СЛАУ.

В качестве признака завершения итерационного процесса в цикле по r-й переменной СЛАУ принимается $(|z_{ril}| / c_l^*) < (|z_{ril}|^* / c_l^*)$ при $(|\nabla^2 y_{ril}| / c_l^*) < (|\nabla^2 y_{ril}|_{\max} / c_l^*)$, где $|z_{ril}|^* / c_l^*$ – максимальная ошибка установившегося процесса, $|\nabla^2 y_{ril}|_{\max} / c_l^*$ - принятое ограничение по норме. Для практической параллельной реализации выполнение данного условия проще выполнять в виде

$$sign(|z_{ril}| / c_l^*) = -sign(|z_{ril}| / c_l^* - sign(|z_{ril}| / c_l^*) \cdot (|z_{ril}|^* / c_l^*)) , \tag{19}$$

$$r = \overline{1,n} ,\ i = 1,2,\ldots,R_l ;\ l = 1,2,\ldots,P .$$

Данное условие характеризует теоретически обоснованное прогнозируемое пересечение оси ординат и момент формирования признака окончания итерационного процесса в l-м цикле для r-й переменной.

Признаком окончания итерационного процесса в текущем цикле и перехода на следующий цикл по всей СЛАУ является выполнение (не обязательно одновременное) условия (19) по всем уравнениям. Вычислительные процессы в цикле должны продолжаться до тех пор, пока не сформируется указанный выше признак по всем уравнениям.

Учитывая приведенные в [8] рекомендации по оптимизации процессов на основе дельта-преобразований второго порядка, целесообразно использовать:

$$c_l = 0,75 c_l^* \text{ и } (|\nabla^2 y_{ril}|_{\max} / c_l^*) \le 0,25 . \tag{20}$$

Следует отметить, что разработанные методология и алгоритмы успешно функционировали и при решении СЛАУ, имеющих норму большую, чем принято выше, но при обязательном выполнении условий сходимости. [9–11]. С целью расширения указанных возможностей введены и экспериментально подтверждены дополнительные условия завершения итерационного процесса в цикле

$$sign(z_{r(i+1)l} / c_l^*) = -sign(z_{ril} / c_l^*) . \tag{21}$$

Сущность данного эвристического условия (30) состоит в выявлении момента пересечения невязкой оси ординат и предлагается для одновременной реализации с условием (19). При этом представляются возможности выявления пересечения оси ординат и в случае, когда пересечение имеет место, но при повышенной норме не соответствует условию (19).

3. Результаты компьютерных экспериментов решения СЛАУ с постоянными свободными членами. Работоспособность полученных рекомендаций для организации итерационного процесса была проверена на решении различных СЛАУ с постоянными свободными членами. Ниже приводятся результаты отдельных экспериментов, базирующихся на использовании приводимых ниже СЛАУ (норма коэффициентов матрицы примеров (22) и (23) – меньше единицы, (24) и (25) – больше единицы):

$$\begin{cases} y_1 + 0{,}09y_2 + 0{,}13y_3 = -0{,}97; \\ 0{,}12y_1 + y_2 + 0{,}11y_3 = -1{,}13; \\ 0{,}16y_1 + 0{,}07y_2 + y_3 = 1{,}04. \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} y_1 + 0{,}6y_2 + 0{,}08y_3 = -0{,}356; \\ 0{,}12y_1 + y_2 + 0{,}7y_3 = -0{,}604; \\ 0{,}11y_1 + 0{,}4y_2 + y_3 = 0{,}353. \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 0{,}2y_3 = 1{,}37; \\ -0{,}8y_1 + y_2 + 0{,}2y_3 = 0{,}98; \\ -0{,}4y_1 + 0{,}7y_2 + y_3 = 1{,}13. \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} y_1 + 0{,}9y_2 + 0{,}4y_3 = 0.85; \\ -0{,}3y_1 + y_2 - 0{,}6y_3 = 0{,}69; \\ -0{,}9y_1 - 0{,}5y_2 + y_3 = 1{,}25. \end{cases} \tag{25}$$

В ходе исследования выполнялся сравнительный анализ между методами решения СЛАУ при условии обеспечения одинаковой точности ($\sim 2^{-14}$) на основе дельта-преобразований первого и второго порядка с постоянным квантом $c_P^* = 2^{-14}$, на основе дельта-преобразований первого порядка с переменным квантом при $R_{\text{int},1} = 2$, $R_{\text{int},2} = 4$ оптимизированного процесса и $c_P = 2^{-14}$ [5–6], методом простой итерации, а также рассматриваемым в данной работе методом на основе дельта-преобразований второго порядка с переменными квантами при $R_{\text{int},1} = 4$ и $R_{\text{int},2} = 8$, $c_P^* = 2^{-14}$. Полученные результаты представлены в таблице 1.

Анализ полученных результатов показал, что итерационные процессы решения СЛАУ с использованием дельта-преобразований второго порядка и переменных квантов отличаются сокращением количества итераций в сотни раз по отношению к методу решения СЛАУ на основе дельта-преобразований первого порядка с постоянным квантом, в десятки раз – по отношению к методу решения СЛАУ на основе дельта-преобразований второго порядка и постоянного кванта, а также определенной близостью по количеству итераций к методу простой итерации.

Также из представленных в таблице данных видно, что общая длительность итерационного процесса близка по значениям при использовании переменного кванта для дельта-преобразования первого и второго порядка. Представленные данные являются экспериментальным подтверждением полученного в разд. 2.2 утверждения об идентичности оценок, характеризующих минимизированное количество итераций идеализированного процесса для дельта-преобразований первого и второго порядков.

Таблица 1

Результаты экспериментов решения СЛАУ с постоянными свободными членами

Метод организации итерационного процесса решения СЛАУ		Количество итераций (22)	(23)	(24)	(25)
На основе дельта-преобразований первого порядка с постоянным квантом		21064	19660	17613	24609
На основе дельта-преобразований второго порядка с постоянным квантом		395	309	788	8850
На основе дельта-преобразований первого порядка с переменным квантом	$R_{\text{int},1}=2$	15	19	22	50
	$R_{\text{int},2}=4$	18	28	31	47
На основе дельта-преобразований второго порядка с переменным квантом	$R_{\text{int},1}=4$	32	33	43	43
	$R_{\text{int},2}=8$	31	25	39	82
простой итерации		4	8	36	29

Были также проведены экспериментальные исследования при определенных выше условиях для СЛАУ более высокого порядка. Результаты подтверждали теоретические оценки, рекомендуемые параметры и показали схожесть с представленными выше результатами для СЛАУ третьего порядка.

4. Исследование решения СЛАУ с переменными свободными членами на основе дельта-преобразований второго порядка и переменного кванта. Интерес эффективного решения СЛАУ с переменными свободными членами возникает при рассмотрении задач, которые должны реализовываться в реальном времени, например, в бортовых системах управления и навигации летательными аппаратами при непрерывном характере изменения переменных свободных членов [12–13]. При этом под эффективностью понимается возможность построения специализированного вычислителя при минимизированных аппаратных затратах, например, на основе ПЛИС в сочетании с обеспечением минимизированного времени реализации итерации при решении СЛАУ. С организационной точки зрения подготовка СЛАУ для решения (оценка сходимости, приведение к виду с выделением диагональных элементов, оценка количества циклов, тестовая апробация) может выполняться при наземной подготовке задачи.

Решение СЛАУ можно рассматривать в виде итерационного процесса, в котором выделяется два этапа: собственно итерационный (переходный) процесс и после его завершения – установившийся процесс, в котором решение с необходимой точностью обеспечивается за одну итерацию. Если учесть, что переменные – непрерывно изменяющиеся свободные члены являются функцией от времени, то естественно предположить, что большему временному интервалу (шагу решения) может соответствовать и большая интенсивность изменения сводных членов, а соответственно, и большее возмущающее, влияющее на ошибку итерационного процесса на каждом шаге воздействия (влияние на значение нормы в виде составляющей $\left|\nabla^2 D_{ril}\right|_{\max} / c_l^*$, $r=\overline{1,n}$, $i=1,2,\ldots,R_l$; $l=1,2,\ldots,P$).

С точки зрения эффективного использования ресурсов (бортовых) вычислительных средств, представляет интерес такая организация вычислительного процесса, когда обработка информации на уровне одной итерации выполняется с достаточной точностью, высоким быстродействием и с предельно большим временным шагом. В таких условиях представляются возможности предъявлять наиболее мягкие (низкие) требования по частоте формирования данных, характеризующих изменяющуюся правую часть СЛАУ (например, частоте формирования расстояний от летательного аппарата до маяков локальной системы навигации [12–13]), а также к производительности вычислительных средств с учетом возможности одновременной реализации других алгоритмов и программ. Актуальность эффективного решения СЛАУ даже невысоких порядков в рассматриваемых условиях резко возрастает, когда необходимо одновременно решать большое количество СЛАУ.

Рассматриваемый ниже материал ориентирован на обоснование возможности эффективного решения СЛАУ с переменными свободными членами на основе использования дельта-преобразований второго порядка в установившемся итерационном процессе.

Пусть СЛАУ (1) имеет переменные свободные члены, т.е. в алгоритме (3) $\nabla^2 D_{ril} \neq 0$.

Сущность процесса решения СЛАУ (1) с переменными свободными членами на основе алгоритма, базирующегося на дельта-преобразованиях второго порядка и переменного кванта, состоит в том, что задаются начальные условия и организуется итерационный (переходный) процесс решения до вхождения в установившийся процесс, когда $|z_{riP}| \leq z_{steady}$, $z_{steady} > 0$, $r = \overline{1,n}$, где z_{steady} – достаточно малые, соответствующие обеспечению заданной точности решения системы величины. На основе алгоритма (3) вхождение в установившейся процесс формируется после завершения выполнения итераций в последнем цикле $l = P$. Далее осуществляется формирование переменных при постоянном по модулю весе минимального кванта преобразования $c_P^* = 2^{-s}$, $s \in N$. Формируемые в дискретные моменты времени значения D_{ri}, $r = \overline{1,n}$, $i = 1,2,\ldots$ в алгоритме (3) предполагаются численно определенными на каждом шаге. Для каждого нового вектора дискретных значений D_{ri}, $r = \overline{1,n}$, $i = 1,2,\ldots$ в установившемся процессе результаты решения СЛАУ должны формироваться за одну итерацию.

С точки зрения получения обобщенного заключения будем рассматривать свободные члены в виде гармонических колебаний [14]:

$$D(t) = A \cdot \sin(\varphi_0 + \omega \cdot t), \ \omega = 2\pi f, \tag{26}$$

где A – амплитуда колебания; ω – циклическая частота колебания; φ_0 – начальная фаза колебания при $t = 0$.

Первая и вторая производные для переменной (26):

$$D' = \omega \cdot A \cdot |\cos(\varphi_0 + \omega \cdot t)|; \tag{27}$$

$$D'' = \omega^2 \cdot A \cdot |\cos(\varphi_0 + \omega \cdot t)|. \tag{28}$$

Максимальные значения выражений (27) и (28) с учетом разностных представлений:

$$D'_{\max} = \omega \cdot A \approx |\nabla D|_{\max} / \nabla t_1; \tag{29}$$

$$D''_{\max} = \omega^2 \cdot A \approx |\nabla^2 D|_{\max} / \nabla t_2^2. \tag{30}$$

Таким образом, максимальные значения первой и второй разности переменной $D(t)$ с учетом выражений (29), (30):

$$|\nabla D|_{\max} = D'_{\max} \cdot \nabla t_1 = \omega \cdot A \cdot \nabla t_1; \tag{31}$$

$$|\nabla^2 D|_{\max} = D''_{\max} \cdot \nabla t_2^2 = \omega^2 \cdot A \cdot \nabla t_2^2. \tag{32}$$

Пусть удовлетворяются введенные ранее условия ограничения нормы СЛАУ (20). При $\xi \neq 0$ приближенное условие обеспечения оптимизированного (квазиоптимального) процесса дельта-преобразования второго порядка представляется согласно [8] в виде (20). Фактически соотношение (20) при определенном c_l^* позволяет оценить ограничиваемую интенсивность возмущений.

Следует отметить, что в реальных прикладных процессах дельта-преобразований проявление наихудших внутренних и внешних воздействий маловероятно. В связи с этим возможно успешное функционирование при обеспечении сходимости по значению нормы, по крайней мере, в пределах до значения $(\left|\nabla^2 y_{ril}\right|_{\max} / c_l^*) < 0,618$ [8].

Предполагаем для общности сравнительного анализа использования дельта-преобразований первого и второго порядков для переменного гармонического свободного члена одинаковые значения вносимых компонент возмущений в преобразование:

$$|\nabla D|_{\max} \approx |\nabla^2 D|_{\max} = bc^*,$$

где $0 < b \ll 1$ — задает уровни возмущающих воздействий $|\nabla D|_{\max}$, $|\nabla^2 D|_{\max}$ относительно значения c^*.

Тогда соотношения для определения шага дискретизации можно оценивать по формулам:

– при использовании дельта-преобразования первого порядка

$$\nabla t_1 = (bc^*)/(\omega \cdot A); \tag{33}$$

– для дельта-преобразования второго порядка

$$\nabla t_2 = (1/\omega) \cdot \sqrt{(bc^*)/A}. \tag{34}$$

Рассматривая (33) и (34), получаем коэффициент, характеризующий соотношение по реализуемым шагам решения (в конечном счете, по реализуемым максимальным частотам изменения свободных членов) при использовании дельта-преобразований второго и первого порядков в установившемся итерационном процессе:

$$\nabla t_2 / \nabla t_1 = \sqrt{A/(bc^*)}.$$

Например, при A=1, b=0.4, $c_P^* = 2^{-14}$ и использовании дельта-преобразования второго порядка можно ожидать в установившемся итерационном процессе (решение СЛАУ за одну итерацию) получение преимущества в $\nabla t_2 / \nabla t_1 \approx 2^7$ раз.

5. Результаты компьютерных экспериментов для СЛАУ с переменными свободными членами. Исследование работоспособности алгоритма (3) для решения СЛАУ с переменными свободными членами проводилось на СЛАУ, характеризующихся сходимостью при выполнении простой итерации и имеющих различные нормы коэффициентов матрицы (норма для примера (35) – 0,15, для (36) – 0,25, для (37) – 1,2):

$$\begin{cases} y_1 + 0{,}07y_2 + 0{,}08y_3 = D_1; \\ 0{,}01y_1 + y_2 + 0{,}14y_3 = D_2; \\ 0{,}1y_1 - 0{,}05y_2 + y_3 = D_3. \end{cases} \tag{35}$$

$$\begin{cases} y_1 + 0{,}09y_2 + 0{,}13y_3 = D_1; \\ 0{,}12y_1 + y_2 + 0{,}11y_3 = D_2; \\ 0{,}16y_1 + 0{,}07y_2 + y_3 = D_3. \end{cases} \tag{36}$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 0{,}2y_3 = D_1; \\ -0{,}8y_1 + y_2 + 0{,}2y_3 = D_2; \\ -0{,}4y_1 + 0{,}7y_2 + y_3 = D_3. \end{cases} \tag{37}$$

где $D_{1i} = \sin(\frac{\pi}{6} + \omega \cdot t_i)$; $D_{2i} = \sin(\frac{\pi}{3} + \omega \cdot t_i)$; $D_{3i} = \sin(\frac{2\pi}{3} + \omega \cdot t_i)$; $t_i = t_{i-1} + \nabla t$.

В ходе исследования выполнялся сравнительный анализ между методами решения данных СЛАУ при условии обеспечения одинаковой точности на уровне ~ 2^{-14} для использования дельта-преобразований второго порядка с переменным квантом при $R_{\text{int},1} = 4$, $R_{\text{int},2} = 8$, $c_p^* = 2^{-15}$ и дельта-преобразований первого порядка с переменным квантом при $R_{\text{int},1} = 2$, $R_{\text{int},2} = 4$, $c_P = 2^{-14}$.

В ходе исследования было принято $t_0 = 0$; $\omega = 2^{-7}$. В табл. 2 представлены результаты, характеризующие шаги ∇t_1 и ∇t_2, обеспечивающие заданную максимальную одинаковую для первого и второго порядков точность решения в установившемся процессе за одну итерацию.

Таблица 2

Результаты экспериментов для СЛАУ с переменными свободными членами

СЛАУ	Норма СЛАУ ($\left\|\nabla^2 y_{ril}\right\|_{\max} / c_l^*$)	Метод решения дельта-преобразования	$\nabla t_{1,2}$	$\nabla t_2 / \nabla t_1$
(35)	0,15	Первого порядка	0,0079	84
		Второго порядка	0,66	
(36)	0,25	Первого порядка	0,0076	88
		Второго порядка	0,66	
(37)	1,2	Первого порядка	0,000044	80
		Второго порядка	0,0035	

Анализ приведенных в таблице данных показывает, что использование дельта-преобразований второго порядка по отношению к использованию дельта-преобразований первого порядка при гармонических свободных членах и обеспечении одинаковой точности имеет преимущество по величине реализуемого шага решения в установившемся процессе в ~80 раз.

Проведено также исследование зависимости шага дискретизации от частоты колебаний ω для СЛАУ (35) с нормой 0,15 в установившемся процессе; результаты представлены в табл. 3. Преимущества по реализуемым частотам остаются приблизительно такими же, как и в табл. 2.

В экспериментах использование дельта-преобразований второго порядка по длительности переходных процессов уступало преобразованию первого порядка. Однако если учесть, что конечный результат формируется в установившемся процессе, проявляемые преимущества дельта-преобразований второго порядка можно считать наиболее существенными.

Таблица 3

Зависимости шага дискретизации от частоты колебаний

Частота	Метод решения, дельта-преобразования	$\nabla t_{1,2}$	$\nabla t_2 / \nabla t_1$
$\omega = 2^{-7}$	Первого порядка	0,0079	84
	Второго порядка	0,66	
$\omega = 2^{-5}$	Первого порядка	0,0014	78
	Второго порядка	0,11	
$\omega = 2^{-3}$	Первого порядка	0,00049	84
	Второго порядка	0,041	
$\omega = 2^{-1}$	Первого порядка	0,00012	83
	Второго порядка	0,01	

Использование метода простой итерации в установившемся процессе также обеспечивает, по крайней мере, оцениваемую в сравнениях точность при рассматриваемых шагах и частотах. Однако в данных условиях реализация простой итерации с использованием специализированного вычислителя связана с необходимостью реализации многоразрядных устройств умножения и, как нетрудно показать, существенно большей (измеряемой в количестве тактов) по сравнению с реализацией использования дельта-преобразований второго порядка длительностью выполнения итерации [15]. При необходимости построения эффективного специализированного вычислителя для непрерывного итерационного решения СЛАУ с шагом, превышающим допустимый для дельта-преобразований второго порядка, целесообразно рассматривать возможность использования других методов и технических средств решения СЛАУ.

Заключение. В работе проведено исследование решения СЛАУ с использованием дельта-преобразований второго порядка с постоянным и переменным квантом. Предлагается теоретическое обоснование выбора количества циклов и значений переменных квантов, нацеленных на минимизацию количества итераций решения СЛАУ. В работе проведено исследование эффективности использования дельта-преобразований второго порядка для решения СЛАУ с переменными свободными членами, подтверждающее возможность получения результата за одну итерацию в установившемся процессе, а также корректность теоретических обоснований. При этом использование дельта-преобразований второго порядка позволяет выполнять обработку информации с достаточной точностью и в десятки раз большим временным шагом по сравнению с использованием дельта-преобразований первого порядка, а также представляет возможности организации вычислительного процесса в специализированном вычислителе без использования устройств умножения многоразрядных кодов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Малиновский Б.Н., Боюн В.П., Козлов Л.Г.* Алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений, ориентированные на структурную реализацию // Управляющие системы и машины. – 1977. – № 5. – С. 79-84.
2. *Байков В.Д., Сергеев М.Б.* Структурно-ориентированный алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений // Управляющие системы и машины. – 1986. – № 2. – С. 81-84.
3. *Гомозов О.В., Ладыженский Ю.В.* Инкрементные алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений и архитектура мультипроцессоров на программируемой логике // Научные труды ДонНТУ. Серия «Информатика, кибернетика и вычислительная техника». – 2010. – № 12 (165). – С. 34-40.
4. *Кравченко П.П.* Инкрементные методы решения систем линейных алгебраических уравнений // Многопроцессорные вычислительные структуры. – 1983. – № 5 (XIV). – С. 30-32.
5. *Кравченко П.П., Пирская Л.В.* Итерационный метод решения систем линейных алгебраических уравнений, исключающий операцию многоразрядного умножения // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2014. – № 7 (156). – С. 214-224.
6. *Kravchenko P.P., Pirskaya L.V.* The method of organizing the iterative process of the system of the linear algebraic equations solution excluding the multidigit multiplication operation // Biosciences Biotechnology Research Asia. – 2014. – Vol. 11, № 3. – P.1831-1839.
7. *Kravchenko P.P.* Solving systems of algebraic and differential equations by second-order difference modulation // Cybernetics. – 1989. – Vol. 25 (2). – P. 218-229.
8. *Кравченко П.П.* Оптимизированные дельта-преобразования второго порядка. Теория и применение. Монография. – М.: Радиотехника, 2010. – 288 с.
9. *Фаддеев Д.К. Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. – 4-е изд., стереотип. – СПб.: Лань, 2009. – 734 с.
10. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

11. *Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В.* Вычислительные методы для инженеров. – М.: Изд-во МЭИ, 2003. – 595 с.
12. *Барабанов О.О., Барабанова Л.П.* Математические задачи дальномерной навигации. – М.: Физматлит, 2007. – 272 с.
13. *Скрыпник О.Н.* Радионавигационные системы воздушных судов: Учебник. – М.: ИНФРА-М, 2014. – 348 с.
14. *Фриш С.Э., Тиморева А.В.* Курс общей физики. Т. 1. Физические основы механики, молекулярная физика, колебания и волны. – М.: Физматгиз, 1962. – 467 с.
15. *Пирская Л.В.* О возможности использования дельта-преобразований первого порядка для построения специализированного // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2015. – № 2 (163). – С. 83-92.

REFERENCES

1. *Malinovskiy B.N., Boyun V.P., Kozlov L.G.* Algoritmy resheniya sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy, orientirovannye na strukturnuyu realizatsiyu [Algorithms for solving systems of linear algebraic equations-oriented structural implementation], *Upravlyayushchie sistemy i mashiny* [Control Systems and Machines], 1977, No. 5, pp. 79-84.
2. *Baykov V.D., Sergeev M.B.* Strukturno-orientirovannyy algoritm resheniya sistem li-neynykh algebraicheskikh uravneniy [Structurally-oriented algorithm for solving systems of linear algebraic equations], *Upravlyayushchie sistemy i mashiny* [Control Systems and Machines], 1986, No. 2, pp. 81-84.
3. *Gomozov O.V. Ladyzhenskiy Yu.V.* Inkrementnye algoritmy resheniya sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy i arkhitektura mul'tiprotsessorov na programmiruemoy logike [Incremental algorithms for solving systems of linear algebraic equations and the architecture of multiprocessors on programmable logic], *Nauchnye trudy DonNTU. Seriya «Informatika, kibernetika i vychislitel'naya tekhnika»* [Scientific works of Donetsk national technical University. Series "Informatics, Cybernetics and computer engineering"], 2010, No. 12 (165), pp. 34-40.
4. *Kravchenko P.P.* Inkrementnye metody resheniya sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy [Incremental methods for solving systems of linear algebraic equations], *Mnogoprotsessornye vychislitel'nye struktury* [Multiprocessor Computing Patterns], 1983, No. 5 (XIV), pp. 30-32.
5. *Kravchenko P.P., Pirskaya L.V.* Iteratsionnyy metod resheniya sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy, isklyuchayushchiy operatsiyu mnogorazryadnogo umnozheniya [The iterative method for solving systems of linear algebraic equations, exclusive the multi-bit multiplication operation], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2014, No. 7 (156), pp. 214-224.
6. *Kravchenko P.P., Pirskaya L.V.* The method of organizing the iterative process of the system of the linear algebraic equations solution excluding the multidigit multiplication operation, *Biosciences Biotechnology Research Asia,* 2014, Vol. 11, No. 3, pp.1831-1839.
7. *Kravchenko P.P.* Solving systems of algebraic and differential equations by second-order difference modulation, *Cybernetics*, 1989, Vol. 25 (2), pp. 218-229.
8. *Kravchenko P.P.* Optimizirovannye del'ta-preobrazovaniya vtorogo poryadka. Teoriya i primenenie: Monografiya [Optimized Delta-transformation of the second order. Theory and application. Monograph]. Moscow: Radiotekhnika, 2010, 288 p.
9. *Faddeev D.K. Faddeeva V.N.* Vychislitel'nye metody lineynoy algebry [Computational methods of linear algebra]. 4th ed., stereotip. St. Petersburg: Lan', 2009, 734 p.
10. *Samarskiy A.A., Gulin A.V.* Chislennye metody [Numerical methods]. Moscow: Nauka, 1989, 432 p.
11. *Amosov A.A., Dubinskiy Yu.A., Kopchenova N.V.* Vychislitel'nye metody dlya inzhenerov [Computational methods for engineers]. Moscow: Izd-vo MEI, 2003, 595 p.
12. *Barabanov O.O., Barabanova L.P.* Matematicheskie zadachi dal'nomernoy navigatsii [Math problems ranging navigation]. Moscow: Fizmatlit, 2007, 272 p.
13. *Skrypnik O.N.* Radionavigatsionnye sistemy vozdushnykh sudov: Uchebnik [Radio navigation systems of the aircraft: a Textbook]. Moscow: INFRA-M, 2014, 348 p.
14. *Frish S.E., Timoreva A.V.* Kurs obshchey fiziki. T. 1. Fizicheskie osnovy mekhaniki, molekulyarnaya fizika, kolebaniya i volny [Course of General physics. Vol. 1. Physical fundamentals of mechanics, molecular physics, oscillations and waves]. Moscow: Fizmatgiz, 1962, 467 p.

15. *Pirskaya L.V.* O vozmozhnosti ispol'zovaniya del'ta-preobrazovaniy pervogo poryadka dlya postroeniya spetsializirovannogo [About the possibility of using the first order delta-transformations for construction special-purpose computer], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2015, No. 2 (163), pp. 83-92.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Я.Е. Ромм.

Кравченко Павел Павлович – Южный федеральный университет; e-mail: kravchenkopp@sfedu.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371673; кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ, профессор, д.т.н.

Пирская Любовь Владимировна – e-mail: lyubov.pirskaya@gmail.com; кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ; аспирант.

Kravchenko Pavel Pavlovich – SouthernFederalUniversity; e-mail: kravchenkopp@sfedu.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371673; the department of software engineering; professor.

Pirskaya Lyubov Vladimirovna – e-mail: lyubov.pirskaya@gmail.com; the department of software engineering; postgraduate student.

УДК 517.524

В.Ф. Гузик, Г.А. Кириченко, В.И. Шмойлов

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ НИКИПОРЦА-РУТИСХАУЗЕРА[*]

Приводятся аналитические выражения, представляющие все корни произвольного алгебраического уравнения n-й степени через коэффициенты исходного уравнения. Эти формулы состоят из двух отношений бесконечных определителей Теплица, диагональными элементами которых являются коэффициенты алгебраического уравнения. Такие конструкции были названы непрерывными дробями Никипорца. Для эффективного вычисления значений непрерывных дробей Никипорца используется рекуррентный алгоритм Рутисхаузера. При нахождении корней полинома применяется алгоритм суммирования расходящихся непрерывных дробей (r/φ-алгоритм). Комплексные корни определяются из рассмотрения значений длинной серии подходящих непрерывных дробей. Предлагаемый алгоритм нахождения нулей полинома имеет две особенности в сравнении с существующими методами решения алгебраических уравнений. Первая и, пожалуй, принципиально важная особенность: предложен простой аналитический способ записи всех корней уравнения n-й степени по коэффициентам исходного уравнения. Вторая особенность предложенного алгоритма нахождения нулей полинома n-й степени, – простота и регулярность информационного графа алгоритма, что делает его привлекательным при аппаратной реализации в решающем поле суперкомпьютеров с реконфигурируемой структурой. В качестве примера рассмотрено решение алгебраического уравнения 39-й степени.

Алгебраические уравнения; бесконечные определители Теплица; расходящиеся непрерывные дроби; r/φ-алгоритм.

[*] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 14-19-01533, финансируемого Российским Научным Фондом