

15. *Pirskaya L.V.* O vozmozhnosti ispol'zovaniya del'ta-preobrazovaniy pervogo poryadka dlya postroeniya spetsializirovannogo [About the possibility of using the first order delta-transformations for construction special-purpose computer], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2015, No. 2 (163), pp. 83-92.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Я.Е. Ромм.

Кравченко Павел Павлович – Южный федеральный университет; e-mail: kravchenkopp@sfnu.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371673; кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ, профессор, д.т.н.

Пирская Любовь Владимировна – e-mail: lyubov.pirskaya@gmail.com; кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ; аспирант.

Kravchenko Pavel Pavlovich – SouthernFederalUniversity; e-mail: kravchenkopp@sfnu.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371673; the department of software engineering; professor.

Pirskaya Lyubov Vladimirovna – e-mail: lyubov.pirskaya@gmail.com; the department of software engineering; postgraduate student.

УДК 517.524

В.Ф. Гузик, Г.А. Кириченко, В.И. Шмойлов

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ НИКИПОРЦА-РУТИСХАУЗЕРА*

Приводятся аналитические выражения, представляющие все корни произвольного алгебраического уравнения n -й степени через коэффициенты исходного уравнения. Эти формулы состоят из двух отношений бесконечных определителей Тейлора, диагональными элементами которых являются коэффициенты алгебраического уравнения. Такие конструкции были названы непрерывными дробями Никпорца. Для эффективного вычисления значений непрерывных дробей Никпорца используется рекуррентный алгоритм Рутисхаузера. При нахождении корней полинома применяется алгоритм суммирования расходящихся непрерывных дробей (r/φ -алгоритм). Комплексные корни определяются из рассмотрения значений длинной серии подходящих непрерывных дробей. Предлагаемый алгоритм нахождения нулей полинома имеет две особенности в сравнении с существующими методами решения алгебраических уравнений. Первая и, пожалуй, принципиально важная особенность: предложен простой аналитический способ записи всех корней уравнения n -й степени по коэффициентам исходного уравнения. Вторая особенность предложенного алгоритма нахождения нулей полинома n -й степени, – простота и регулярность информационного графа алгоритма, что делает его привлекательным при аппаратной реализации в решающем поле суперкомпьютеров с реконфигурируемой структурой. В качестве примера рассмотрено решение алгебраического уравнения 39-й степени.

Алгебраические уравнения; бесконечные определители Тейлора; расходящиеся непрерывные дроби; r/φ -алгоритм.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 14-19-01533, финансируемого Российским Научным Фондом

V.F. Guzik, G.A. Kirichenko, V.I. Shmoylov

SOLUTION OF ALGEBRAIC EQUATIONS BY THE METHOD OF NIKIPTS-RUTISHAUSER'S

Presents analytical expressions representing all the roots of a random algebraic equation of the n -th degree through the ratio of the original equation. These formulas consist of two relations infinite Toeplitz determinants, diagonal elements of which are the coefficients of the algebraic equation. Such structures were called continued fractions of Nikipts. For the efficient calculation of the values of continued fractions of Nikipts used recurrent algorithm of Rutishauser. When finding the roots of a polynomial algorithm for the summation of divergent continued fractions (r/φ -algorithm). Complex roots are determined from consideration of the values of a long series of suitable continuous fractions. The proposed algorithm for finding zeros of a polynomial has two features in comparison with the existing methods of solving algebraic equations. The first and, perhaps, a fundamentally important feature: a simple analytical method for recording all roots of an equation of n -th degree in the coefficients of the original equation. The second feature of the proposed algorithm for finding zeros of a polynomial of n -th degree, the simplicity and regularity of the information graph algorithm, which makes it attractive for hardware implementation in the final field of supercomputers with reconfigurable structure. As an example, consider the solution of the algebraic equation 39-th degree.

Algebraic equations; infinite Toeplitz determinants; divergent continuous fraction; r/φ -algorithm.

Введение. При проектировании современных сложных технических устройств необходимо уже на предварительных стадиях разработки анализировать их предполагаемые характеристики. Для моделирования используются как дифференциальные и интегральные уравнения, так и классические алгебраические уравнения – один из старейших объектов исследований в математике.

Известны разнообразные применения алгебраических уравнений при решении научных и технических задач. Алгебраические уравнения возникают, например, при изучении равновесных состояний сложных термодинамических и механических систем. Часто алгебраические уравнения появляются в аэродинамике. Например, скорость набора высоты самолета определяется из алгебраического уравнения восьмой степени. При расчете устойчивости различных конструкций используют так называемые собственные значения матриц, определяемые из решения алгебраического уравнения, степень которого равна количеству учитываемых гармоник. Особенно часто алгебраические уравнения возникают при выполнении разнообразных геометрических расчетов: определении точек пересечения и сопряжения криволинейных контуров, при проектировании поверхностей – крыльев, фюзеляжей, обтекателей и т.п.

Разным аспектам теории и практики алгебраических уравнений посвящены недавно опубликованные работы [1–8]. Тем не менее, актуальной является оценка ситуации в этом разделе математики, которая была дана известным американским специалистом Р. Хеммингом [9]: “Задача нахождения корней многочленов возникает достаточно часто для того, чтобы оправдать тщательное изучение и разработку специальных методов ее решения. Различным методам нахождения действительных линейных и квадратичных множителей можно посвятить целую книгу. Тот факт, что существует так много методов, показывает, что не существует ни одного вполне удовлетворительного”. В самом деле, известно более сотни алгоритмов и их модификаций, которые используются для нахождения нулей полиномов [10]. В основном, это алгоритмы численного решения алгебраических уравнений. Среди аналитических алгоритмов решения алгебраических уравнений наиболее известна так называемая интегральная формула Меллина. Недавно появилась работа [11], в которой подход Меллина получил дальнейшее развитие.

Ниже будут рассмотрены аналитические выражения, представляющие все корни произвольного алгебраического уравнения n -й степени через коэффициенты исходного уравнения. Эти формулы состоят из двух отношений бесконечных определителей Тейлора, диагональными элементами которых являются коэффициенты алгебраического уравнения. Для нахождения комплексных корней дополнительно используется метод суммирования расходящихся непрерывных дробей, именуемый как r/φ -алгоритм [12], нашедший разнообразные применения в вычислительной математике [13–18].

Постановка задачи. Имеется алгебраическое уравнение степени n :

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0. \quad (1)$$

Запишем следующую производящую функцию:

$$\frac{1}{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m + \dots \quad (2)$$

Коэффициенты α_i в (1) и (2) совпадают. Коэффициенты c_m последовательности (2) могут быть найдены из линейного рекуррентного уравнения

$$c_m = -(\alpha_1 c_{m-1} + \alpha_2 c_{m-2} + \dots + \alpha_n c_{m-n}), \quad c_0 = 1, \quad c_1 = -\alpha_1. \quad (3)$$

Для определения корней алгебраического уравнения (1) Эйкен предложил формулы [19]:

$$x_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c_{m+1}}{c_m}, \quad (4)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+2} & c_{m+3} \end{vmatrix} : c_{m+1}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} \end{vmatrix} : c_m} \right) = \frac{x_1 x_2}{x_1} = x_2, \quad (5)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & c_{m+3} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+4} \\ c_{m+3} & c_{m+4} & c_{m+5} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+2} & c_{m+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & c_{m+3} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+4} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} \end{vmatrix}} \right) = \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2} = x_3, \quad (6)$$

Для x_i имеет место выражение:

$$x_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{H_i^{(m+1)} : H_{i-1}^{(m+1)}}{H_i^{(m)} : H_{i-1}^{(m)}} \right),$$

$$H_i^{(m)} = \begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \dots & c_{m+i-1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+i} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{m+i-1} & c_{m+i} & \dots & c_{m+2i-2} \end{vmatrix}, \quad H_0^{(m)} = 1.$$

Таким образом, корень x_i может быть представлен выражением:

$$x_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\begin{array}{cccc|cccc} c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+i} & c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+i-1} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & \dots & c_{m+i+1} & c_{m+2} & c_{m+3} & \dots & c_{m+i} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{m+i} & c_{m+i+1} & \dots & c_{m+2i-1} & c_{m+i-1} & c_{m+i} & \dots & c_{m+2i-3} \\ \hline c_m & c_{m+1} & \dots & c_{m+n-1} & c_m & c_{m+1} & \dots & c_{m+i-2} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+n} & c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+i-1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{m+i-1} & c_{m+i} & \dots & c_{m+2i-2} & c_{m+i-2} & c_{m+i-1} & \dots & c_{m+2i-4} \end{array} \right). \quad (7)$$

Очевидно, что? используя формулы Эйткена можно непосредственно находить только действительные корни алгебраического уравнения (1). Способ нахождения старшего по модулю действительного корня алгебраического уравнения (1), описываемый формулой (4), как известно, принадлежит Д. Бернулли. Применим r/φ -алгоритм к определению комплексных корней алгебраического уравнения (1).

Представление нулей полинома. Запишем формулы Эйткена (4)–(7) в развернутом виде. В результате преобразований получим конструкции из отношений определителей матриц Теплица, диагональными элементами которых являются коэффициенты исходного уравнения (1).

Формулу (4) можно представить отношением определителей:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}. \quad (8)$$

Последующие корни уравнения (1) запишутся следующим образом:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}. \quad (9)$$

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & -\alpha_{i+3} & \dots \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ -\alpha_{i-4} & -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}. \quad (10)$$

Отношения определителей (8)–(10), выражающие корни алгебраического уравнения (1) через его коэффициенты, будем называть *функциями* $N_i^{(n)}$. Для функций $N_i^{(n)}$ введём обозначение:

$$N_i^{(n)} = N_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Здесь следует подчеркнуть, что для алгебраических уравнений степени выше четвертой функции $N_i^{(n)}$ записываются аналогично их записи для алгебраических уравнений степени 2, 3 и 4.

Если все корни уравнения n -й степени действительные, то значения этих корней со все большей точностью можно установить непосредственно, вычисляя последовательно значения определителей, входящих в формулы (8) – (10). Функции $N_i^{(n)}$, определяемые выражениями (8) – (10), будем называть также *непрерывными дробями Никиторца*. Определение математических конструкций (8) – (10) как непрерывных дробей особой структуры позволяет естественно ввести такое фундаментальное понятие, как подходящая дробь, что упрощает описание способа решения алгебраических уравнений с использованием функций $N_i^{(n)}$ и r/φ -алгоритма.

Для нахождения комплексных корней уравнения (1), определяемых также формулами (8)–(10), необходимо дополнительно использовать r/φ -алгоритм. Модуль r_i и модуль аргумента φ_i искомого комплексного числа $x_i = r_i e^{i\varphi_i}$ устанавливаются здесь формулами:

$$r_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\prod_{m=1}^m |\bar{x}_i^{(m)}|}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

$$|\varphi_i| = \pi \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{k_i^{(m)}}{m}, \quad (12)$$

где $\bar{x}_i^{(m)}$ – m -я подходящая дробь выражения (10),

$k_i^{(m)}$ – число отрицательных подходящих дробей для i -го корня из m подходящих дробей.

Например, подходящие дроби для x_2 определяются следующим образом:

$$\bar{x}_2^{(1)} = -\frac{|\alpha_2|}{1} : \frac{|\alpha_1|}{1}, \quad \bar{x}_2^{(2)} = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{|\alpha_2|} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{|\alpha_1|},$$

$$\bar{x}_2^{(3)} = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}} \dots$$

Для определения подходящих непрерывных дробей, записываемых отношениями определителей Тейлора, т.е. определителей не общего, а весьма специального вида, может быть использован известный рекуррентный алгоритм частных и разностей, или QD-алгоритм Рутисхаузера [20]. Известны две схемы алгоритма Рутисхаузера. Первая схема алгоритма Рутисхаузера описывается формулами:

$$e_m^{(i)} = e_{m-1}^{(i+1)} + x_m^{(i+1)} - x_m^{(i)}, \tag{13}$$

$$x_{m+1}^{(i)} = x_m^{(i+1)} \frac{e_m^{(i+1)}}{e_m^{(i)}}. \tag{14}$$

Здесь $e_0^{(i)} = 0$. Элементы первой строки $x_1^{(i)}$ составляют подходящие непрерывной дроби (8). QD-алгоритм, определяемый формулами (13) и (14), представим схемой, показанной на рис. 1.

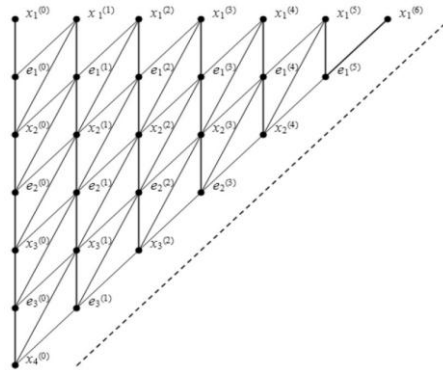


Рис. 1. Граф первой схемы QD-алгоритма Рутисхаузера

Вторая схема QD-алгоритма Рутисхаузера строится по формулам:

$$x_m^{(i+1)} = x_m^{(i)} + e_m^{(i)} - e_{m-1}^{(i)}, \tag{15}$$

$$e_m^{(i+1)} = e_m^{(i)} \frac{x_{m+1}^{(i+1)}}{x_m^{(i+1)}}. \tag{16}$$

В качестве начальных условий во второй схеме принимаются величины:

$$x_1^{(0)} = -\alpha_1, \quad x_m^{(0)} = 0, \tag{17}$$

$$e_m^{(0)} = \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, n-1. \tag{18}$$

$$x_1^{(i+1)} = x_1^{(i)} + e_1^{(i)}, \quad x_n^{(i+1)} = x_n^{(i)} - e_{n-1}^{(i)},$$

На рис. 2 показан граф второй схемы QD-алгоритма Рутисхаузера, описываемой формулами (15)–(18).

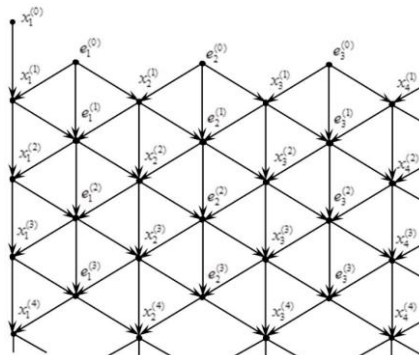


Рис. 2. Граф второй схемы QD-алгоритма Рутисхаузера

Пример решения алгебраического уравнения с использованием алгоритма Никпорца-Рутисхаузера. При помощи алгоритма Рутисхаузера-Никпорца (15) – (18) и r/φ -алгоритма, определяемого формулами (11) и (12), вычислим корни уравнения:

$$x^{39} + \frac{1}{2}x^{38} + \frac{1}{3}x^{37} + \frac{1}{4}x^{36} + \dots + \frac{1}{39}x + \frac{1}{40} = 0. \quad (19)$$

На рис. 3 (а, б, в, г) показаны графики значений подходящих непрерывных дробей, которые представляют комплексно-сопряжённые корни x_1 и x_2 , а также x_{37} и x_{38} , алгебраического уравнения (19). Из графиков видна «периодичность» в расположении подходящих дробей, представляющих комплексные корни.

В табл. 1 и 2 приведены результаты вычисления первой пары комплексно-сопряжённых корней уравнения (19). В первых колонках табл. 1 и 2 указано число подходящих, которые использовались при определении значений модуля и аргумента комплексных корней.

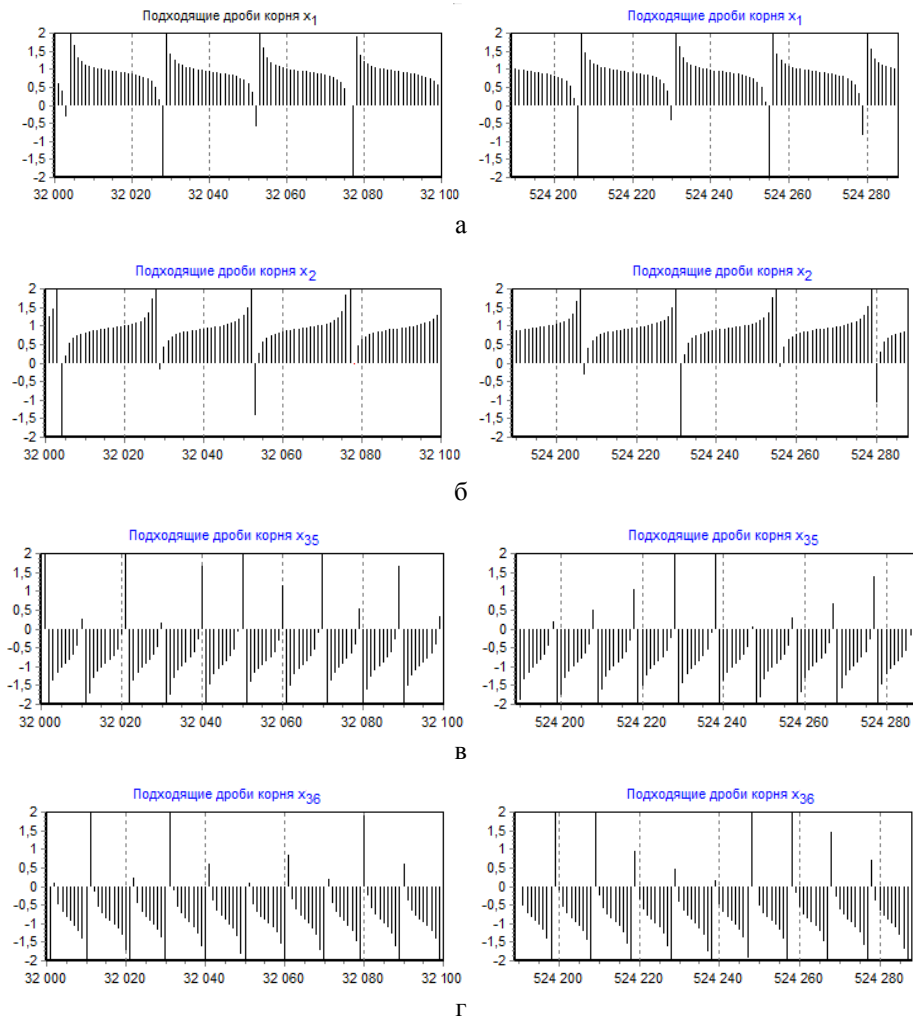


Рис. 3. Распределение подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (19)

Таблица 1

Вычисление корня x_1 полинома (19)

Номер звена дроби	Значения дроби	Модуль комплексного числа, $r_{др}$	$\varepsilon_r = r_{сп} - r_{др} $	Аргумент комплексного числа, $\varphi_{др}$	$\varepsilon_\varphi = \varphi_{сп} - \varphi_{др} $
32768	1,020579820665	0,935692712944	0,001187310102	0,130729473231	0,002111313319
65536	0,730009666426	0,934511754263	0,000006351421	0,128616355469	0,000001804442
131072	0,556884871937	0,934500087233	0,000005315608	0,128615261503	0,000002898408
262144	1,698329639453	0,934504831899	0,000000570942	0,128628593168	0,000010433256
524288	0,989444318585	0,934507457566	0,000002054724	0,128621195950	0,000003036038
1048576	0,274403364303	0,934503775813	0,000001063935	0,128619267618	0,000001107706

Таблица 2

Вычисление корня x_2 полинома (19)

Номер звена дроби	Значения дроби	Модуль комплексного числа, $r_{др}$	$\varepsilon_r = r_{сп} - r_{др} $	Аргумент комплексного числа, $\varphi_{др}$	$\varepsilon_\varphi = \varphi_{сп} - \varphi_{др} $
32768	0,832993151872	0,933945342032	0,000560059847	-0,13072947323	0,002111314718
65536	1,123563306110	0,934504146772	0,000001255107	-0,12861635546	0,000001803043
131072	1,296688100599	0,934509937543	0,000004535664	-0,12861526150	0,000002897009
262144	0,155243333083	0,934510206260	0,000004804381	-0,12862859316	0,000010434655
524288	0,864128653951	0,934504339583	0,000001062296	-0,12862119595	0,000003037437
1048576	1,579169608233	0,934504801173	0,000000600706	-0,12861926761	0,000001109105

Во вторых колонках табл. 1 и 2 показаны значения подходящих непрерывных дробей Никпорца, представляющих комплексно-сопряжённые корни уравнения (19). В третьих и пятых колонках этих таблиц приведены найденные по r/φ -алгоритму, т.е. по формулам (11) и (12), значения модулей r_n и аргументов φ_n комплексно-сопряжённых корней уравнения (19). В четвёртых и шестых колонках таблиц представлены, соответственно, $\varepsilon_r = |r_{сп} - r_{др}|$ и $\varepsilon_\varphi = |\varphi_{сп} - \varphi_{др}|$, устанавливающие разности между значениями модулей и аргументов комплексных корней, полученных с использованием стандартной программы решения алгебраических уравнений и найденных посредством алгоритма Никпорца-Рутисхаузера. В качестве стандартной программы использовалась функция `polyroots`, входящая в пакет MathCAD. Комплексные корни x_1 и x_2 , найденные стандартной программой, имеют значения: $x_1 = 0,934505402842e^{i0,1286181599120}$, $x_2 = 0,9345054018795e^{-i0,1286181585129}$.

В табл. 3 приведены значения комплексно-сопряжённых корней уравнения (19), которые установлены с использованием r/φ -алгоритма.

Таблица 3

Таблица комплексных корней полинома (19)

Номер корня	Модуль комплексного числа, $r_{др}$	$\varepsilon_r = r_{сп} - r_{др} $	Аргумент комплексного числа, $\varphi_{др}$	$\varepsilon_\varphi = \varphi_{сп} - \varphi_{др} $
x_1	0,9345037758137	0,0000010639355	0,1286192676188	0,0000011077067
x_2	0,9345048011731	0,0000006007064	-0,128619267618	0,0000011091059
x_3	0,9239126393924	0,0028738233827	0,2908931576741	0,0000063589330
x_4	0,9239116249563	0,0000007372485	-0,290893157674	0,0000007635924
x_5	0,9185984772253	0,0000067640909	0,4510167889026	0,0000001483621
x_6	0,9185964431250	0,0000047337082	-0,451016788902	0,0000001627383
x_7	0,9152007723877	0,0000080406618	0,6103356089703	0,0000159289116
x_8	0,9152011813692	0,0000084654018	-0,610335608970	0,0000158996644

x_9	0,9127420731946	0,0000343086269	0,7692458798609	0,0000287931563
x_{10}	0,9127421175377	0,0000342235396	-0,769245879860	0,0000288301299
...
x_{29}	0,9043676002348	0,0000248622794	2,351673571009	0,0000241650960
x_{30}	0,9043677708678	0,0000250657253	-2,351673571009	0,0000242504069
x_{31}	0,9040978610927	0,0000072610171	2,509637728016	0,0000598158390
x_{32}	0,9040984870935	0,0000066150295	-2,509637728016	0,0000598059109
x_{33}	0,9039313000900	0,0000062081254	2,667654105594	0,0000290321988
x_{34}	0,9039288120532	0,0000037609924	-2,667654105594	0,0000290144850
x_{35}	0,9037609383340	0,0000380367128	2,825888580853	0,0002300719580
x_{36}	0,9037610523718	0,0000379226750	-2,825605975407	0,0000525334877
x_{37}	0,9036859840995	0,0000382775919	2,983309029557	0,0003181933030
x_{38}	0,9036871177950	0,0000371438964	-2,983622352986	0,0000048698740

Значение вещественного корня уравнения (19), также установленного при помощи r/φ -алгоритма, равно:

$$x_{39} = -0,903660808856.$$

На рис. 4 показано расположение корней уравнения (19) на комплексной плоскости.

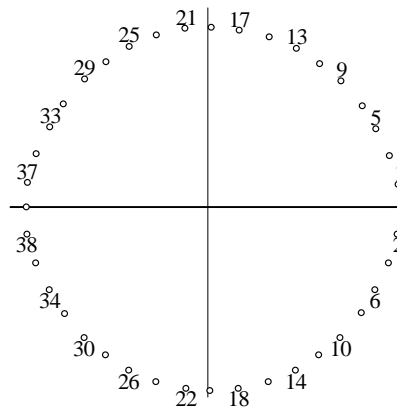


Рис. 4. Расположение корней уравнения (19) на комплексной плоскости.

Заключение. Выше отмечалось, что формулы (10), (11) и (12) представляют корни полинома n -й степени через его коэффициенты. Используя эти формулы, можно устанавливать различные критерии, связанные с корнями полиномов общего вида. То обстоятельство, что в формулу (10) входят определители бесконечного порядка, не должно вызывать дополнительных вопросов, ибо нахождение корня даже квадратного уравнения также связано с бесконечной вычислительной процедурой, эквивалентной нахождению отношения значений трехдиагональных определителей размерностей $(n+1)$ и n при $n \rightarrow \infty$. Произвольное алгебраическое уравнение степени n не разрешимо в радикалах, но оно оказалось разрешимо с использованием r/φ -алгоритма, т.е. формул (11) и (12), в функциях $N_i^{(n)}$, записываемых отношениями определителей Тейлора бесконечного порядка (10).

Применение r/φ -алгоритма к функциям $N_i^{(n)}$, т.е. к конструкции (10), содержащей только действительные коэффициенты алгебраического уравнения n -й степени, позволяет «извлечь» из этих конструкций комплексные корни этого уравне-

ния, если они, конечно, имеются. Это – парадоксальный результат, не вписывающийся в классический подход к представлению комплексных чисел в «явном виде» через выражения, содержащие $\sqrt{-1}$. Использование r/φ -алгоритма позволяет установить комплексность из «поведения» длинной серии подходящих дробей.

Предлагаемый алгоритм нахождения нулей полинома имеет две особенности в сравнении с существующими методами решения алгебраических уравнений. Первая и, пожалуй, принципиально важная особенность: предложен простой аналитический способ записи всех корней уравнения n -й степени по коэффициентам исходного уравнения. Комплексные корни находятся из "расширяющихся" отношений определителей с использованием r/φ -алгоритма. Вторая особенность предложенного алгоритма нахождения нулей полинома n -й степени – простота и регулярность информационного графа алгоритма, что делает его привлекательным при аппаратной реализации в решающем поле суперкомпьютеров с реконфигурируемой структурой. Кроме того, в отличие от метода Мюллера – наиболее распространённого алгоритма решения алгебраических уравнений, предложенный алгоритм позволяет параллельно, т.е. одновременно, определять все корни полинома.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Михалкин Е.Н.* Некоторые формулы для решений триномиальных и тетраномиальных алгебраических уравнений // Журнал СФУ. Серия: Математика и физика. – 2012. – Т. 5, № 2. – С. 230-238.
2. *Кириченко Г.А., Шмойлов В.И.* Алгоритмы суммирования расходящихся непрерывных дробей и некоторые его применения // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55, № 4. – С. 558-573.
3. *Шмойлов В.И., Кириченко Г.А.* Решение алгебраических уравнений непрерывными дробями Никипорца // Известия Саратовского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14. – Вып. 4, ч. 1. – С. 428-439.
4. *Shmoylov V.I., Kirichenko G.A.* The solution of algebraic equations of continued fractions of Nikiports // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2014. – № 7 (4). – P. 533-547.
5. *Шмойлов В.И., Коваленко В.Б.* Решение алгебраических уравнений непрерывными дробями // Искусственный интеллект. – 2011. – № 1. – С. 260-270.
6. *Кутищев Г.П.* Решение алгебраических уравнений произвольной степени: теория, методы, алгоритмы. – М.: Изд-во URSS, 2010. – 232 с.
7. *Корчагин И.Ф.* Алгебраические уравнения. – М.: Физматкнига, 2006. – 160 с.
8. *Шмойлов В.И.* Решение алгебраических уравнений непрерывными дробями // Нац. акад. наук Украины. Ин-т приклад. проблем механики и математики. – Львов:, 2004. – 599 с.
9. *Хемминг Р.В.* Численные методы для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1972. – 400 с.
10. *Шмойлов В.И., Тучапский Р.И.* Алгебраические уравнения. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений // Библиографический указатель. Нац. акад. наук Украины, Ин-т приклад. проблем механики и математики. – Львов, 2003. – 83 с.
11. *Михалкин Е.Н.* О решении общих алгебраических уравнений с помощью интегралов от элементарных функций // Сибирский математический журнал. – 2006. – Т. 47, № 2. – С. 365-371.
12. *Шмойлов В.И.* Непрерывные дроби: в 3 т. Т. 2. Расходящиеся непрерывные дроби // НАН Украины, Ин-т приклад. проблем механики и математики. – Львов: Меркатор, 2004. – 558 с.
13. *Шмойлов В.И., Коваленко В.Б.* Некоторое применения алгоритма суммирования расходящихся непрерывных дробей // Вестник Южного научного центра РАН. – 2012. – № 4 (149). – С. 3-13.
14. *Шмойлов В.И., Савченко Д.И.* Об алгоритме суммирования расходящихся непрерывных дробей // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2013. – № 2. – С. 258-276.
15. *Гузик В.Ф., Шмойлов В.И., Кириченко Г.А.* Непрерывные дроби и их применение в вычислительной математике // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2014. – № 1 (150). – С. 158-174.

16. Шмойлов В.И. Расходящиеся системы линейных алгебраических уравнений. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2010. – 205 с.
17. Шмойлов В.И. Непрерывные дроби и г/ф-алгоритм. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2012. – 608 с.
18. Шмойлов В.И., Редин А.А., Никулин Н.А. Непрерывные дроби в вычислительной математике. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2015. – 228 с.
19. Aitken A.C. On Bernulli's numerical solution of algebraic equations. *Edinburg, Proc. Roy. Soc.*, (1925/26). – P. 289-305.
20. Рунтисхаузер Г. Алгоритм частных и разностей. – М.: ИИЛ, 1960. – 93 с.

REFERENCES

1. Mikhalkin E.N. Nekotorye formuly dlya resheniy trinomial'nykh i tetranomial'nykh algebraicheskikh uravneniy [Some formulas for solutions of the trinomial and metronomically algebraic equations], *Zhurnal SFU. Seriya: Matematika i fizika* [Journal Siberian Federal University. Mathematics & Fhisics], 2012, Vol. 5, No. 2, pp. 230-238.
2. Kirichenko G.A., Shmoylov V.I. Algoritmy summirovaniya raskhodyashchikhsya nepreryvnykh drobey i nekotorye ego primeneniya [Algorithms for summation of divergent continued fractions and its application], *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki], 2015, Vol. 55, No. 4, pp. 558-573.
3. Shmoylov V.I., Kirichenko G.A. Reshenie algebraicheskikh uravneniy nepreryvnymi drobyami Nikiportsa [The solution of the continuous algebraic equations fractions of Nieporte], *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2014, Vol. 14, Issue 4, part 1, pp. 428-439.
4. Shmoylov V.I., Kirichenko G.A. The solution of algebraic equations of continued fractions of Nikiports, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2014, No. 7 (4), pp. 533-547.
5. Shmoylov V.I., Kovalenko V.B. Reshenie algebraicheskikh uravneniy nepreryvnymi drobyami [The solution of the continuous algebraic equations fractions], *Iskusstvennyy intellect* [Artificial Intelligence], 2011, No. 1, pp. 260-270.
6. Kutishchev G.P. Reshenie algebraicheskikh uravneniy proizvol'noy stepeni: teoriya, metody, algoritmy [The solution of algebraic equations of arbitrary degree: theory, methods, algorithms]. Moscow: Izd-vo URRS, 2010, 232 p.
7. Korchagin I.F. Algebraicheskie uravneniya [Algebraic equations]. Moscow: Fizmatkniga, 2006, 160 p.
8. Shmoylov V.I. Reshenie algebraicheskikh uravneniy nepreryvnymi drobyami [The solution of the continuous algebraic equations fractions], *Nats. akad. nauk Ukrainy. In-t priklad. problem mekhaniki i matematiki* [National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of applied problems of mechanics and mathematics]. Lviv, 2004, 599 p.
9. Khemming R.V. Chislennye metody dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov [Numerical methods for scientists and engineers]. Moscow: Nauka, 1972, 400 p.
10. Shmoylov V.I., Tuchapskiy R.I. Algebraicheskie uravneniya. Beskonechnye sistemy lineynykh algebraicheskikh uravneniy [Algebraic equation. Infinite system of linear algebraic equations], *Bibliograficheskii ukazatel'. Nats. akad. nauk Ukrainy, In-t priklad. problem mekhaniki i matematiki* [Bibliographic index. National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of applied problems of mechanics and mathematics]. Lviv, 2003, 83 p.
11. Mikhalkin E.N. O reshenii obshchikh algebraicheskikh uravneniy s pomoshch'yu integralov ot elementarnykh funktsiy [The General solution of algebraic equations with the help of integrals of elementary functions], *Sibirskiy matematicheskii zhurnal* [Sibirskii Matematicheskii Zhurnal], 2006, Vol. 47, No. 2, pp. 365-371.
12. Shmoylov V.I. Nepreryvnye drobi [Continuous fractions]: v 3 vol. Vol. 2. Raskhodyashchiesya nepreryvnye drobi [Divergent continuous fractions], *NAN Ukrainy, In-t prikl. problem mekhaniki i matematiki* [The national Academy of Sciences of Ukraine, Institute of applied problems of mechanics and mathematics]. Lviv: Merkator, 2004, 558 p.

13. *Shmoylov V.I., Kovalenko V.B.* Nekotoroe primeneniya algoritma summirovaniya raskhodyashchiesya nepreryvnykh drobey [Some applications of the algorithm of summation of divergent continued fractions], *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra RAN* [Bulletin of the South scientific center of RAS], 2012, No. 4 (149), pp. 3-13.
14. *Shmoylov V.I., Savchenko D.I.* Ob algoritme summirovaniya raskhodyashchikhsya nepreryvnykh drobey [About the algorithm of summation of divergent continued fractions], *Vestnik VGU. Seriya: Fizika. Matematika* [Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics], 2013, No. 2, pp. 258-276.
15. *Guzik V.F., Shmoylov V.I., Kirichenko G.A.* Nepreryvnye drobi i ikh primeneniye v vychislitel'noy matematike [Continuous fractions and their application in computational mathematics], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2014, No. 1 (150), pp. 158-174.
16. *Shmoylov V.I.* Raskhodyashchiesya sistemy lineynykh algebraicheskikh uravneniy [Divergent systems of linear algebraic equations]. Taganrog: Izd-vo TTI YuFU, 2010, 205 p.
17. *Shmoylov V.I.* Nepreryvnye drobi i r/φ -algoritm [Continuous fractions and r/φ -algorithm]. Taganrog: Izd-vo TTI YuFU, 2012, 608 p.
18. *Shmoylov V.I., Redin A.A., Nikulin N.A.* Nepreryvnye drobi v vychislitel'noy matematike [Continuous fractions in computational mathematics]. Rostov-on-Don: Izd-vo YuFU, 2015, 228 p.
19. *Aitken A.C.* On Bernulli's numerical solution of algebraic equations. Edinburg, Proc. Roy. Soc., (1925/26), pp. 289-305.
20. *Rutiskhauzer G.* Algoritm chastnykh i raznostey [The algorithm and private differences]. Moscow: IIL, 1960, 93 p.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., проф. Н.И. Витиска

Гузик Вячеслав Филиппович – Южный федеральный университет; e-mail: vfguzik@sfedu.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634347928; кафедра вычислительной техники; профессор.

Кириченко Геннадий Анатольевич – e-mail: vt_gak@mail.ru; кафедра вычислительной техники; аспирант.

Шмойлов Владимир Ильич – НИИ Многопроцессорных вычислительных систем; e-mail: Shmoylov40@at.infotectt.ru; 347928, г. Таганрог, ул. Чехова, 2; научный сотрудник.

Guzik Vyacheslav Filippovich – Southern Federal University; e-mail: vfguzik@sfedu.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634347928; the department of computer science; professor.

Kirichenko Gennady Anatolievich – e-mail: vt_gak@mail.ru; phone: +78634371428; the department of computer science; postgraduate student.

Shmoylov Vladimir Ilyich – Research Institute of Multiprocessor computing systems; e-mail: Shmoylov40@at.infotectt.ru; 2, Chekhov street, Taganrog, 347928, Russia; researcher.

УДК 512.644:517.524

В.В. Селянкин, В.И. Шмойлов

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ СУММИРОВАНИЯ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

Предлагается способ решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), который основывается на суммировании рядов соответствующими цепными дробями. Полученные алгоритмом простой итерации приближения $x_i^{(0)}, x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(k)}$ рассматриваются как частичные суммы ряда, который сходится, если сходится итерационный процесс, и расходится – в противном случае. По этим частичным суммам строится ряд, первый элемент которого $p_i^{(0)}$ будет совпадать с $x_i^{(0)}$, а последующие члены ряда $p_i^{(k)}$ –