

16. Abramkin S.E., Dushin S.E., Kuz'min N.N. Matematicheskie modeli upravlyaemykh masso- i teploobmennykh protsessov v komplekse tekhnologicheskikh sistem «Absorbtsiya–Desorbtsiya» [Mathematical models of controlled mass- and heat exchange processes in technologic complex of systems «Absorption–Desorption»], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2011, No. 6 (119), pp. 255-264.
17. Abramkin S.E., Dushin S.E., Kuz'min N.N. Modelirovanie upravlyaemykh masso- i teploobmennykh protsessov v sisteme podgotovki prirodnogo gaza k transportirovke [The simulation of controlled mass- and heat exchange processes in the system of preparation of natural gas for transportation], *Analiticheskaya mekhanika, ustoychivost' i upravlenie: Trudy X Mezhdunarodnoy Chetaevskoy konferentsii. T. 1. Sektsiya 1. Analiticheskaya mekhanika* [Analytical mechanics, stability and control: Proceedings of X International conference Kitaiskoi. Vol. 1. Section 1. Analytical mechanics. Kazan, 12-16 June 2012]. Kazan': Izd-vo Kazan. gos. tekhn. un-ta, 2012, pp. 3-10.
18. Abramkin S.E., Dushin S.E., Polyashova K.A. Matematicheskaya model' upravlyaemogo teploobmennogo protsessa v isparitele [A mathematical model of the controlled heat-exchange process in the evaporator], *Izvestiya SPbGETU «LETI»* [Izvestiya SPbGETU «LETI»], 2011, Issue 9, pp. 32-36.
19. Abramkin S.E., Grudyaeva E.K., Dushin S.E. Sistema regulirovaniya teploobmennogo protsessa v apparate vozdušnogo okhlazhdeniya [The system of regulation of heat exchange process in the device of air cooling], *Izvestiya SPbGETU «LETI»* [Izvestiya SPbGETU «LETI»], 2011, Issue 6, pp. 35-40.
20. Filimonov N.B. Kontseptsiya mnogorezhimnogo regulirovaniya [The concept of multi-mode regulation], *Avtomaticheskoe upravlenie ob"ektami s peremennymi kharakteristikami: Mezhvuz. sb. nauch. tr.* [Automatic control of objects with varying characteristics: interuniversity collection of scientific papers]. Novosibirsk: NETI, 1988, pp. 88-92.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.В. Григорьев.

Абрамкин Сергей Евгеньевич – Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина); e-mail: abrsergey@yandex.ru; 197376, Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, 5; тел.: +79217767124; кафедра автоматизации и процессов управления; к.т.н.; ассистент.

Душин Сергей Евгеньевич – e-mail: dushins@yandex.ru; тел.: +79219704631; кафедра автоматизации и процессов управления; д.т.н.; профессор.

Abramkin Sergey Evgen'evitch – St. Petersburg State Electrotechnical University «LETI», e-mail: abrsergey@yandex.ru; 5, Professor Popov street, St. Petersburg, 197376, Russia; phone: +79217767124; the department of automation and control Processes; cand. of eng. sc.; assistant professor.

Dushin Sergei Evgen'evich – e-mail: dushins@yandex.ru; phone: +79219704631; the department of automation and control processes; dr. of eng. sc.; professor.

УДК 681.51

Г.Е. Веселов, А.С. Сеницын

СИНТЕЗ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ АДАПТИВНОЙ ПОДВЕСКОЙ С УЧЁТОМ ФИЗИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЙ АМОТИЗАТОРА

Современная транспортная промышленность неуклонно стремится к повышению безопасности и комфортабельности производимых автотранспортных средств. Одним из наиболее перспективных тенденций в этом направлении считается внедрение амортизаторов с изменяющимися характеристиками. Систему амортизаторов с управляемыми характеристиками принято называть «адаптивной подвеской». Эксплуатационные требования к адаптивной подвеске транспортных средств включают в себя: а) комфорт

движения, что означает максимально возможную изоляцию кузова от вибрации и ударов, вызванных дорожным покрытием; б) удержание дороги, что подразумевает подавление скачков колес таким образом, что обеспечивается непрерывный контакт шины с дорожным полотном и в) ограничение перемещения амортизатора, обусловленное его механической структурой. Представленные требования зачастую противоречат друг другу, что вынуждает разработчиков искать некоторые компромиссные решения. На текущий момент существует множество подходов к решению такого рода задачи. Одним из этих подходов является метод функций Ляпунова, однако он обладает существенным недостатком – наличие ограничения на начальные условия в системе. В качестве альтернативы в данной работе предлагается система адаптивного управления активной подвеской, основанная на синергетической теории управления. Применение метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) позволило синтезировать многоцелевой закон управления, который максимально учитывает нелинейную специфику объекта управления и обеспечивает выполнение первых двух эксплуатационных требований к адаптивной подвеске. Результаты исследования показывают, что полученный регулятор справляется со своей задачей даже в условиях параметрических неопределенностей. Для демонстрации эффективности предложенного решения было проведено численное моделирование и сравнительный анализ замкнутой системы с различными реализациями закона управления.

Управляемая подвеска; нелинейный регулятор; адаптация; синергетический подход; многоцелевой закон управления.

G.E. Veselov, A.S. Sinitsyn

CONTROL SYNTHESIS WITH TAKING INTO ACCOUNT PHYSICAL LIMITATIONS OF ACTIVE SUSPENSION

Modern transport industry is steadily strive to improve the safety and comfort of produced vehicles. One of the most promising developments in this area is the introduction of shock absorbers with variable characteristics. The system of shock absorbers with controllable properties is called "adaptive suspension system". Performance requirements for vehicle active suspensions include: a) ride comfort, which means to isolate the body as far as possible from road-induced shocks and vibrations to provide comfort for passengers, b) road holding, which requires to suppress the hop of the wheels for the uninterrupted contact between wheels and road; and c) suspension movement limitation, which is restricted by the mechanical structure. Presented requirements often conflict with each other, forcing the developers to look for some compromise. At the moment, there are many approaches to solving this kind of problem. One of these approaches is the method of Lyapunov functions, but it has a significant disadvantage – the restriction on the initial conditions in the system. As an alternative in this paper proposes a adaptive system of active suspension control based on synergetic control theory. Application of a method analytical construction aggregated regulators (ACAR) has allowed synthesizing the multiobjective control law which maximally takes into account nonlinear specifics of control object, and provides performance the first two operational requirements for the adaptive suspension. The research results show that the obtained regulator copes with its task, even in conditions of parametric uncertainties. Numerical modeling and comparative analysis of the closed-loop system with different implementations of the control law was carried out to demonstrate the effectiveness of the proposed solution

Active suspension; nonlinear controller; adaptation; synergetics approach; multiobjective control law.

Введение. С развитием транспортной промышленности, активная автомобильная подвеска, в силу своего потенциала к повышению комфорта движения и улучшению маневренности транспортного средства, привлекает внимание большого числа исследователей [1, 2]. Использование современных датчиков и микропроцессоров для получения информации в реальном времени, предоставляет возможность наделить активную подвеску способностью изменять свое поведение в соответствии с изменяющимися дорожными условиями. В общем, эксплуатационные требования к активной автомобильной подвеске включают:

- ◆ **комфорт движения** – изоляция кузова, насколько это возможно, от ударов и вибраций, вызванных дорожным покрытием с целью обеспечения комфорта пассажиров;
- ◆ **удержание дороги** – подавление скачков колес таким образом, что обеспечивается непрерывный контакт шин с дорожным полотном;
- ◆ **ограничение перемещения амортизатора**, которое обусловлено его механической структурой.

Так как описанные выше требования невозможно одновременно выполнять в полной мере, перед нами встает задача поиска компромиссных подходов к управлению активными амортизаторами.

Для нахождения компромисса между противоречащими требованиями было предложено и исследовано множество многоцелевых подходов и механизмов для управления активной подвеской 3–9. Среди этих работ приемлемым можно назвать подход, в котором комфорт движения определяется как основная цель управления, а другие требования являются ограничениями во временной области. Таким образом, проблема многоцелевого управления трансформируется в скалярное управление с ограничениями во временной области. К примеру, в работе 10 рассмотрена проблема ограниченного H_∞ управления, и синтезирован регулятор по обратной связи, обеспечивающий подавление возмущений в замкнутой системе и, в тоже время, гарантирующий выполнение требуемых ограничений. В 11 для решения проблемы многоцелевого управления активной подвеской по обратной связи предложен подход к созданию регулятора, зависящего от нагрузки. Этот метод синтеза регулятора подразумевает, что матрица усиления базируется на параметризованной функции Ляпунова, отражающей эксплуатационные требования, и зависит от информации о массе кузова, получаемой в режиме реального времени. Du и Zhang 12 исследуют проблему H_∞ управления активной подвеской с задержкой в исполнительном механизме, зависящий от задержки H_∞ регулятор без памяти по обратной связи синтезируется с учетом оптимизации ускорения поддрессоренной массы, деформации амортизатора и деформации шины в условиях временной задержки исполнительного механизма.

Однако, в силу того, что в большинстве описанных выше методов игнорируются нелинейные свойства амортизатора, полученные положительные результаты многоцелевого управления в линейных системах могут не соответствовать результатам управления активным амортизатором с нелинейной динамикой. В действительности, для того чтобы сформировать основу для точного управления необходимо учитывать нелинейную динамику пружин и кусочно-линейную характеристику амортизатора 13. В добавок, изменяющиеся число пассажиров и полезной нагрузки приводит к тому что нагрузка на автомобиль легко меняется, что приводит к изменению массы кузова. Это неизбежно влечет за собой трудности при проектировании систем управления. Таким образом, активная подвеска представляет собой нелинейную систему с неопределёнными параметрами.

С точки зрения подходов к управлению большинство существующих работ может быть традиционно разделено по выбору управляющей функции Ляпунова 14, 15. Для простоты в качестве кандидата на управляющую функцию часто предлагается квадратичная функция Ляпунова. Хотя регуляторы, основанные на квадратичной функции Ляпунова, успешно решают большинство задач управления, некоторые сложные проблемы, такие как задача ограниченного управления, требуют выбора более сложных форм управляющих функций 16. Таким образом, интерес представляет разработка нелинейных законов управления с низким консерватизмом. Кроме того, регулятор должен обладать адаптивными свойствами для повышения комфорта движения и гарантировать выполнение других ограничений во временной области.

В последнее время значительное развитие в области синтеза нелинейных ограниченных систем получил подход, базирующийся на барьерных функциях Ляпунова [17–20]. Ключевым моментом такого подхода является выбор специальной функции-кандидата, которая обладает свойством роста до бесконечности, когда ее аргументы приближаются к граничным значениям, это гарантирует, что ограничения не будут нарушены. Использование барьерных функций Ляпунова позволяет строить законы управления с более слабыми ограничениями на начальные условия в системе [21].

Целью данной работы является синтез нелинейных законов управления, которые обеспечат выполнение технологических требований в системе, и при этом будут обладать способностью перевода системы в требуемое состояние из любых, физически приемлемых, начальных условий. Основным инструментом, применяемым в данной статье, является метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) [22]. Метод АКАР основывается на синергокибернетическом подходе к управлению техническими системами. С его помощью разработчик управляющей системы может «погрузить» в объект управления инвариантные многообразия, форма которых выбирается из соображений выполнения технических требований к замкнутой системе [23, 24]. В рамках синергетической теории управления (СТУ) существует подход к синтезу адаптивных регуляторов, называемый «метод интегральной адаптации» (ИА). Для сохранения свойства инвариантности вводимых многообразий к внешним полиномиальным возмущениям метод ИА подразумевает введение некоторого числа интеграторов в замкнутую систему, при этом количество интеграторов определяется порядком возмущения. Отличительной особенностью данного метода по сравнению с существующей в рамках СТУ теорией нелинейных наблюдателей возмущения (ННВ) является отсутствие необходимости определения «места» вхождения внешнего возмущения в математическую модель объекта управления.

Модель активной амортизационной стойки. Модель одной опоры активной подвески автомобиля представлена на рис. 1. Данная модель активно использовалась в работах [11, 21]. На рис. 1 обозначениям соответствуют: m_s – поддрессоренная (изолируемая) масса, представляет собой массу кузова с полезной нагрузкой; m_u – неподдрессоренная масса, представляет собой массу колеса в сборе с амортизатором; F_d и F_s обозначают силы, производимые амортизатором и пружиной соответственно, F_t , F_b – силы упругости и демпфирования шины.

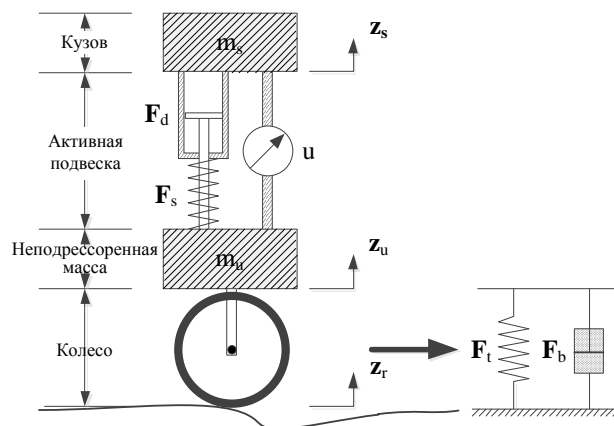


Рис. 1. Модель одной опоры активной подвески автомобиля

Перемещение подрессоренной массы обозначено как z_s , неподдресоренной – z_u , а «перемещение» дорожного покрытия – z_r . Управляющее воздействие обозначено как u .

Динамика перемещения кузова и неподдресоренной массы описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} m_s \ddot{z}_s + F_d(\dot{z}_s, \dot{z}_u, t) + F_s(z_s, z_u, t) &= u(t), \\ m_u \ddot{z}_u - F_d(\dot{z}_s, \dot{z}_u, t) - F_s(z_s, z_u, t) + F_t(z_u, z_r, t) + F_b(\dot{z}_u, \dot{z}_r, t) &= -u(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где силы, производимые нелинейно упругой пружиной, кусочно-линейным амортизатором и шиной заданы в следующем виде:

$$\begin{aligned} F_s(z_s, z_u, t) &= k_s(z_s - z_u) + k_{sn}(z_s - z_u)^3, \\ F_d(\dot{z}_s, \dot{z}_u, t) &= \begin{cases} b_e(\dot{z}_s - \dot{z}_u) \\ b_c(\dot{z}_s - \dot{z}_u) \end{cases}, \\ F_t(z_u, z_r, t) &= k_f(z_u - z_r), \\ F_b(\dot{z}_u, \dot{z}_r, t) &= b_f(\dot{z}_u - \dot{z}_r), \end{aligned} \quad (2)$$

где k_s и k_{sn} – линейный и нелинейный коэффициенты упругости; b_e и b_c – коэффициенты демпфирования амортизатора на ходе расширения и сжатия соответственно, k_f и b_f – коэффициенты упругости и демпфирования шины.

Определим переменные состояния:

$$x_1 = z_s, x_2 = \dot{z}_s, x_3 = z_u, x_4 = \dot{z}_u, \quad (3)$$

таким образом, дифференциальные уравнения (1) могут быть трансформированы в модель, записанную в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m_s + \delta_{m_s}} (-F_d(\dot{z}_s, \dot{z}_u, t) - F_s(z_s, z_u, t) + u), \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{m_u} (F_d(\dot{z}_s, \dot{z}_u, t) + F_s(z_s, z_u, t) - F_t(z_u, z_r, t) - F_b(\dot{z}_u, \dot{z}_r, t) - u), \end{aligned} \quad (4)$$

где δ_{m_s} – неизвестное параметрическое возмущение, вызванное изменением числа пассажиров и полезной нагрузки автомобиля. В современной литературе существует множество работ по исследованию систем с недоопределёнными параметрами, часть из них представлена в 24–29.

Постановка проблемы управления. Для систем активной подвески эксплуатационные требования должны быть заложены в регулятор на этапе создания и включают в себя три аспекта.

В первую очередь, основной задачей управления является повышение комфорта движения, это значит, что создаваемый регулятор должен стабилизировать вертикальные перемещения кузова и изолировать пассажиров от толчков и ударов настолько хорошо, насколько позволяют существующие ограничения и параметрические неопределенности модели.

Во-вторых, в целях обеспечения безопасности, необходимо обеспечивать непрерывный контакт колес с дорогой и не допускать предельных нагрузок на шину. Данные требования можно записать в виде следующего неравенства:

$$|F_t(z_u, z_r, t) + F_b(\dot{z}_u, \dot{z}_r, t)| < (m_{s.min} + m_u)g, \quad (5)$$

где $m_{s.min}$ – минимально возможная изолируемая масса; g – ускорение свободного падения.

И наконец, в силу механической структуры, перемещение амортизатора не должно превышать определенного максимума, что можно записать следующим образом:

$$|z_s - z_u| \leq z_{max}, \quad (6)$$

где z_{max} – максимальное перемещение амортизатора.

Синтез системы управления. Приступая к синтезу системы управления методом АКАР, в первую очередь необходимо определить форму инварианта, погружаемого в систему. Инвариантное многообразие должно отражать требования к закону управления и при этом не должно содержать переменных состояния, которые недоступны прямому измерению, в данном случае такой переменной является z_r – профиль дороги. Измерение данной переменной не представляется возможным, а построение точного наблюдателя осложнено непредсказуемостью данного воздействия. Исходя из этих рассуждений, невозможно ввести в инвариантное многообразие требование (5). Чисто вербально, оставшиеся два требования можно сформировать следующим образом: пока перемещение амортизатора не превышает заданного диапазона, первостепенная задача – стабилизация кузова в заданном положении, при приближении к пределу перемещения амортизатора акцент управления необходимо смещать в сторону выполнения неравенства (6). Такой трактовке задачи, можно поставить в соответствие следующее уравнение инвариантного многообразия:

$$x_2 + k_1 \left(x_1 + k_2 \tan \left(\frac{(x_1 - x_3)\pi}{2z_{max}} \right) \right) = 0, \quad (7)$$

где k_1, k_2 – ненулевые положительные константы.

Докажем, что на многообразии (7) будут выполняться условия $x_1 \approx 0$ и (6). Выразим из (7) выражение $x_1 - x_3$:

$$x_1 - x_3 = - \frac{2 \arctan \left(\frac{x_2 + x_1 k_1}{k_1 k_2} \right) z_{max}}{\pi}. \quad (8)$$

Учитывая, что функция арктангенса является ограниченной, то (8) преобразовывается в неравенство: $|x_1 - x_3| \leq z_{max}$, что в точности соответствует условию (6).

Рассуждая далее, положим, что k_2 – бесконечно малая ненулевая положительная константа, в таком случае, принимая, что $|x_1 - x_3| < z_{max}$ выпишем из уравнения (7) переменную x_2 :

$$x_2 \approx -k_1 x_1. \quad (9)$$

С учетом (9) первое уравнение системы (4) принимает вид: $\dot{x}_1 = -k_1 x_1$, данное дифференциальное уравнение при $k_1 > 0$ имеет единственное решение $x_1 = 0$. Так как полученное уравнение является автономным, можно сказать, что при условии $|x_3| < z_{max}$ кузов автомобиля будет неподвижен в вертикальном направлении независимо от изменения профиля дорожного покрытия.

Определившись с формой инвариантного многообразия, перейдем к синтезу закона управления, гарантирующего его погружение в управляемый объект. Нам известно, что в исходной системе (4) имеется параметрическое возмущение, которое выражается в изменении поддресоренной массы. Так как полагается, что параметры системы не зависят от времени, то для обеспечения адаптации регулятора к параметрическим изменениям достаточно ввести в регулятор одно интегрирующее звено вида:

$$\dot{v} = c_1 \left(x_2 + k_1 \left(x_1 + k_2 \tan \left(\frac{(x_1 - x_3)\pi}{2z_{\max}} \right) \right) \right), \quad (10)$$

где c_1 – положительная константа.

Для синтеза закона управления запишем макропеременную следующего вида:

$$\psi = x_2 + k_1 \left(x_1 + k_2 \tan \left(\frac{(x_1 - x_3)\pi}{2z_{\max}} \right) \right) + c_2 v, \quad (11)$$

где c_2 – положительная константа.

Составим дифференциальное уравнение, описывающее движение изображающей точки системы (4) из исходного пространства состояний к инвариантному многообразию (7) [22–24]:

$$\dot{\psi}(t) + \psi \xi = 0, \quad (12)$$

где ξ – положительная константа. Следуя процедуре метода АКАР, продифференцируем уравнение (11) по времени с учетом системы дифференциальных уравнений (4), полагая, что $\delta_{m_s} = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) = & \frac{-F_d(x_2, x_4, t) - F_s(x_1, x_3, t) + u}{m_s} + c_2 c_1 \left(x_2 + k_1 \left(x_1 + k_2 \tan \left(\frac{(x_1 - x_3)\pi}{2z_{\max}} \right) \right) \right) \\ & + k_1 \left(x_2 + \frac{k_2 \left(1 + \tan \left(\frac{(x_1 - x_3)\pi}{2z_{\max}} \right) \right)^2 (x_2 - x_4)\pi}{2z_{\max}} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Искомый закон управления является решением (12) относительно u :

$$\begin{aligned} u = & \left(-m_s k_1 k_2 \left(\pi(x_2 - x_4) \tan \left(\frac{(x_1 - x_3)\pi}{2z_{\max}} \right) \right)^2 + 2z_{\max} (c_2 c_1 + \xi) \tan \left(\frac{(x_1 - x_3)\pi}{2z_{\max}} \right) \right) + \\ & + 2z_{\max} (F_d(x_2, x_4, t) + F_s(x_1, x_3, t)) - ((2z_{\max} (k_1 + \xi + c_1 c_2) + k_1 k_2 \pi) x_2 + \\ & + 2k_1 (z_{\max} (c_1 c_2 + \xi) x_1 - k_2 \pi x_4) + 2\xi z_{\max} c_2 v) m_s. \end{aligned} \quad (14)$$

Характерной особенностью найденного закона управления (10), (14) является адаптивность к любым параметрическим возмущениям, т.е. не только к изменению массы кузова, но и к другим параметрам, например коэффициентам упругости. Эта особенность гарантирует, что инвариантное отношение (7) будет выполняться даже в условиях неточного определения параметров, страдать при этом будет лишь качество переходного процесса системы из исходного состояния к аттрактору.

Исследование синтезированной системы управления. Проведем исследование эффективности полученных результатов средствами численного моделирования замкнутой системы. Для наглядной демонстрации отличительных особенностей синтезированного регулятора проводится его сравнение с нелинейным адап-

тивным законом, полученным в работе 21. Параметры модели одной амортизационной опоры системы активной подвески автомобиля приведены в табл. 1, а параметры предложенного в работе алгоритма управления приведены в табл. 2.

Таблица 1

Значения параметров предложенного регулятора

Параметр	Значение	Параметр	Значение
ξ	10	c_1	0,01
k_1	50	c_2	1
k_2	0,000001		

Таблица 2

Значения параметров модели активного амортизатора

Параметр	Значение	Параметр	Значение
m_s	600 кг	k_f	200 000 Н/м
m_u	60 кг	b_f	1 000 Н·с/м
k_s	18 000 Н/м	b_e	2 500 Н·с/м
k_{sn}	1 000 Н/м	b_c	2 200 Н·с/м

При моделировании будем полагать, что возмущающее воздействие вызвано кочкой на дороге и может быть описано следующим уравнением:

$$z_r(t) = \begin{cases} \frac{a}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi V_s}{l} t\right)\right), & 0 \leq t \leq \frac{l}{V_s}, \\ 0, & t > \frac{l}{V_s}, \end{cases} \quad (15)$$

где a , l – высота и ширина кочки, а V_s – продольная скорость автомобиля. Определим, что $l = 5$ м, а $V_s = 45$ км/ч.

Моделирование замкнутой системы призвано продемонстрировать, что система адаптивной подвески удовлетворяет следующим требованиям:

- ◆ вертикальное перемещение z_s стремиться к нулю;
- ◆ перемещение амортизатора гарантировано не превышает максимально возможного значения $z_{\max} = 0,15$;
- ◆ обеспечивается безопасность движения, а именно, отношение между статической и динамической нагрузкой меньше единицы, т.е., выполняется неравенство:

$$\frac{|F_t(z_u, z_r, t) + F_b(\dot{z}_u, \dot{z}_r, t)|}{(m_s + m_u)g} < 1. \quad (16)$$

Для демонстрации характерных особенностей предложенного подхода возьмем два набора начальных условий:

Ситуация 1: $x_i(0) = 0$ м, $i = 1, \dots, 4$, $\delta_{m_s} = 50$ кг, $a = 0,1$ м;

Ситуация 2: $x_1(0) = 0,03$ м, $x_i(0) = 0$ м, $i = 2, \dots, 4$, $\delta_{m_s} = 10$ кг, $a = 0,17$ м.

Исследуем вертикальное перемещение кузова автомобиля с пассивной подвеской, нелинейным адаптивным законом, синтезированным на основе барьерных функций Ляпунова 21, и синергетическим регулятором, предложенным в данной

работе. Результат моделирования приведен на рис. 2, где сплошной линией обозначен график перемещения кузова при реализации подвески с синергетическим регулятором, пунктирной линией – амортизатора с законом управления на базе барьерных функций Ляпунова, а штрихпунктирной переходной процесс пассивного амортизатора. Из полученных данных, очевидно, что оба закона управления обеспечивают стабилизацию кузова в нулевом положении.

Рассмотрим график перемещения амортизатора, изображенный на рис. 3, очевидно, что и с этой точки зрения оба закона управления демонстрируют одинаковую эффективность, выполняя условие (6).

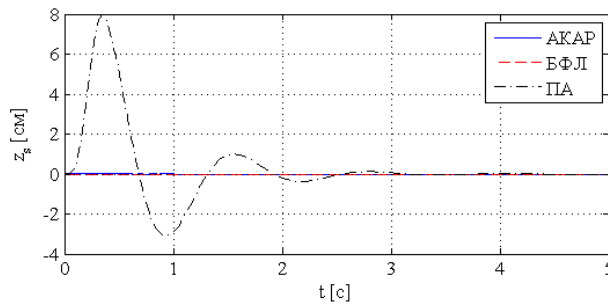


Рис. 2. График вертикального перемещения кузова с различными подходами к управлению амортизатором

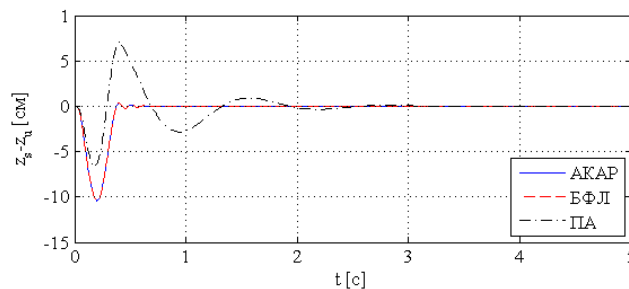


Рис. 3. График перемещения амортизатора с различными реализациями адаптивного закона управления

Для полноты сравнения изучим график управляющего воздействия и отношения между динамической и статической нагрузкой. На рис. 4 продемонстрирован график отношения динамической и статической нагрузки.

Очевидно, что условие (16) выполняется во всех трех реализациях, однако, активная подвеска имеет наименьшее максимальное отношение, что означает лучшее сцепление шины с дорогой. Дополнительно, изучив график управляющего воздействия, изображенный на рис. 5, окончательно убедимся в равной эффективности закона, найденного в работе 21, и синергетического регулятора.

Для демонстрации отличительных особенностей закона управления, предложенного в данной работе, от закона управления, базирующегося на барьерных функциях Ляпунова, необходимо воспроизвести условия, в которых могут нарушиться конструктивные ограничения амортизатора. Следует отметить, что в математическую модель не вносились физические ограничения объекта управления, это означает, что вся «ответственность» за их выполнение лежит на регуляторе.

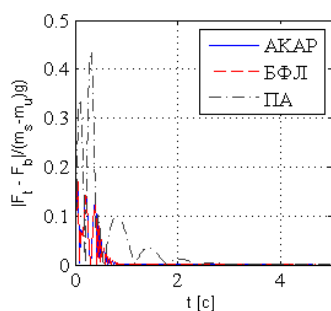


Рис. 4. Отношение между динамической и статической нагрузкой

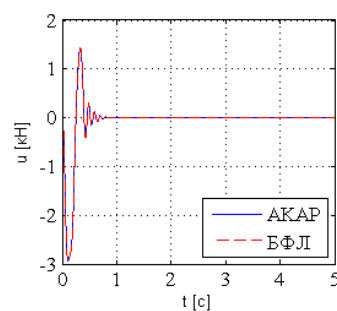


Рис. 5. График управляющего воздействия

На рис. 6 построен график вертикального перемещения кузова при различных реализациях системы управления адаптивной подвеской. Анализируя полученные данные можно сказать, что оба закона стабилизируют положение кузова в пространстве, однако, синергетический регулятор демонстрирует большее быстродействие.

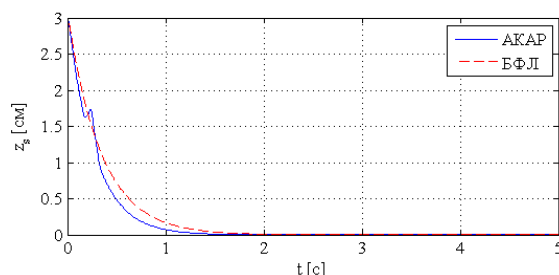


Рис. 6. График вертикального перемещения кузова при движении по неровностям, превышающим физическое перемещение амортизатора

По аналогии с предыдущим разделом, рассмотрим график перемещения амортизатора, изображённый на рис. 7, где сплошной линией обозначен график перемещения амортизатора с синергетическим регулятором, прерывистой – с адаптивным регулятором на основе барьерных функций Ляпунова, а пунктирной обозначено физическое ограничение на перемещение.

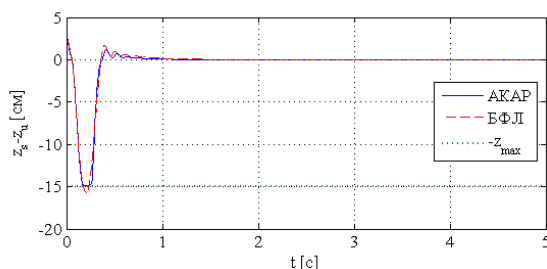


Рис. 7. Перемещение амортизатора при движении по значительным неровностям

Анализируя данные можно сказать, что только синергетический регулятор продолжает удовлетворять условию (6). Для получения полной картины изучим график динамической нагрузки по отношению к статической нагрузке, а также график управляющего воздействия.

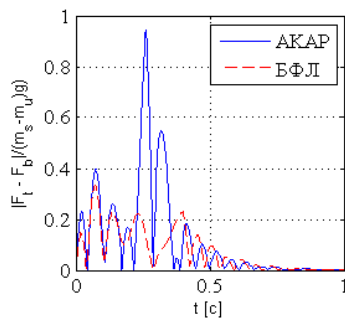


Рис. 8. Отношение между динамической и статической нагрузкой

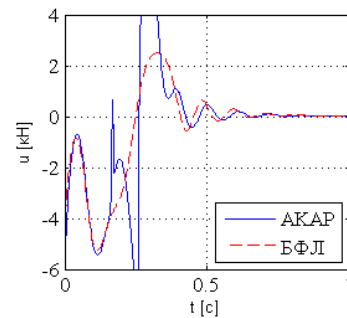


Рис. 9. График управляющего воздействия

Для наглядности график динамической нагрузки по отношению к статической нагрузке (рис. 8) и график управления (рис. 9) построены на отрезке $t \in \{0,1\}$. Анализируя эти данные можно прийти к выводу, что оба исследуемых закона управления удовлетворяют ограничению (16), даже в условиях значительных возмущений. Продолжим исследование особенностей полученного закона управления. Результаты двух, описанных выше, экспериментов показали, что предлагаемый закон демонстрирует особую динамику в ситуациях, когда условия в системе находятся на грани нарушения заданных ограничений, и демонстрирует хорошую эффективность в области, где соблюдается неравенство (6). Для того чтобы продемонстрировать нерушимость условия $|z_s - z_u| \leq z_{\max}$ в замкнутой системе, необходимо определить динамику системы, после попадания на аттрактор. С учетом параметров из табл. Таблица 1 и 2, принимая во внимание выражение (7) запишем систему дифференциальных уравнений, описывающую поведение объекта управления после попадания на инвариантное многообразие:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 10^{-8} x_1 - 5 \cdot 10^{-7} \tan(3,3(3)(x_1 - x_3)\pi) - v, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= -8,3(3) \cdot 10^{-12} \pi \tan(3,3(3)(x_1 - x_3)\pi)^3 - 16,6(6)x_4 - 3333,3(3)x_3 - \\ &\quad - 1,6(6) \cdot 10^5 (10^{-8} x_1 + v + x_4) \tan(3,3(3)(x_1 - x_3)\pi)^2 - 1,6(6) \cdot 10^5 \pi x_4 + \\ &\quad + (-8,3(3) \cdot 10^{-12} \pi - 5 \cdot 10^{-14}) \tan(3,3(3)(x_1 - x_3)\pi) - \\ &\quad - 1,6(6) \cdot 10^5 (\pi + 6000)v + (10^{-16} - 1,6(6) \cdot 10^{-13} \pi) x_1, \\ \dot{v} &= -c_1 c_2 v. \end{aligned} \quad (17)$$

Для поиска устойчивых состояний, приравняем производные в системе (17) нулю. Из второго и четвертого уравнения получим: $x_4 = 0$, $v = 0$. Правые части первого и третьего уравнений системы (17) являются трансцендентными уравнениями и имеют бесконечное количество неперiodических корней, что делает невозможным нахождение точного аналитического решения. Так как найденный закон управления обеспечивает минимизацию функционала $\int \psi^2 + \dot{\psi}(t)^2 dt$, значения переменных ψ , $\dot{\psi}(t)$ не могут устремляться в бесконечность, что совместно с условием (8) дает нам право искать решение только на первом периоде тангенса, т.е. внутри ограничения $|x_1 - x_3| < 0,15$. Используя среду Maple, находим искомое решение: $x_1 = 0$, $x_3 = 0$.

Итак, в системе (18), при условии, что начальные условия удовлетворяют выражению $|x_1 - x_3| < 0,15$, имеется единственная точка равновесия: $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $v = 0$. Для определения типа точки найдем характеристический полином матрицы Якоби для системы (19):

$$\lambda^4 + 33,35082\lambda + 3333,5\lambda^2 + 16,6767242\lambda^3 + 0,0001749. \quad (20)$$

Уравнение (20) имеет следующие корни: $\lambda_1 = -8,3 + 57,13i$, $\lambda_2 = -8,3 - 57,13i$, $\lambda_3 = -0,01$, $\lambda_4 = -0,0000052$.

В силу того, что все корни имеют отрицательную действительную часть, можно с уверенностью сказать, что это *устойчивая* точка равновесия, а наличие мнимой части говорит о том, что точка имеет тип «фокус».

Для подтверждения теоретических результатов на рис. 10 построена фазовая траектория системы (17), а на рис. 11 построены графики переходных процессов переменных состояния. Полученные экспериментальные данные свидетельствуют о достоверности теоретического исследования.

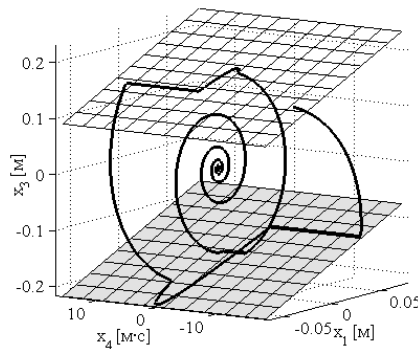


Рис. 10. Фазовая траектория декомпозированной системы. Плоскости ограничивают область выполнения неравенства $|x_1 - x_3| \leq 0,15$

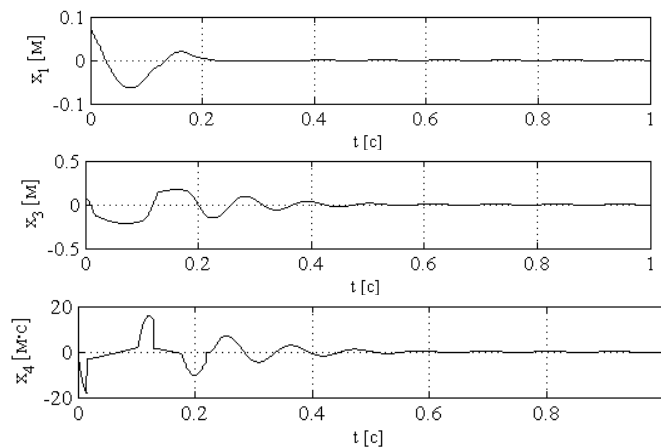


Рис. 11. Графики переходных процессов декомпозированной системы

Заключение. В работе предложен адаптивный регулятор для системы адаптивной подвески, который базируется на современной концепции синергетического управления. Синтезированный закон управления позволяет, не нарушая механических ограничений амортизатора, обеспечить стабилизацию изолируемой мас-

сы в нулевом положении из любых, физически приемлемых начальных условий. Применение принципов интегральной адаптации дает возможность наделять замкнутую систему адаптивными свойствами к любым кусочно-постоянным возмущениям, в том числе и параметрическим, а использование метода АКАР – учесть всю доступную информацию о динамике объекта управления. Сравнение полученного регулятора и системы управления, синтезированной на основе метода функций Ляпунова, показывает, что предложенный закон адаптивного управления обладает несколько большим быстродействием (порядка 17 %) и обеспечивает выполнение механического ограничения амортизатора в условиях больших возмущающих воздействий.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Hrovat D.* Survey of advanced suspension developments and related optimal control applications // *Automatica*. –1997. – No. 33 (10). – P. 1781-1817.
2. *Cao D., Song X., Ahmadian M.* Editors' perspectives: road vehicle suspension design, dynamics, and control // *Vehicle Syst. Dyn.* – 2011. – No. 49 (1-2). – P. 3-28.
3. *Li H., Liu H., Gao H., Shi P.* Reliable fuzzy control for active suspension systems with actuator delay and fault // *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* – 2012. – No. 20 (2). –P. 342-357.
4. *Sandea T., Gysen B., Besselink I., et al.* Robust control of an electromagnetic active suspension system: simulations and measurements // *Mechatronics*. – 2013. – No. 23. – P. 204-212.
5. *Sun W., Gao H., Kaynak O.* Finite frequency H_∞ control for vehicle active suspension systems // *IEEE Trans. Control Syst. Technol.* – 2011. – No. 19 (2). – P. 416-422.
6. *Sun W., Gao H.* Vibration control for active seat suspension systems via dynamic output feedback with limited frequency characteristic // *Mechatronics*. –2011. – No. 21. – P. 250-260.
7. *Hayakawa K., Matsumoto K., Yamashita M., et al.* Robust H_∞ output feedback control of decoupled automobile active suspension systems // *IEEE Trans. Autom. Control*. – 1999. – No. 44 (2). – P. 392-396.
8. *Amirifar R., Sadati N.* Low-order H_∞ controller design for an active suspension system via LMI // *IEEE Trans. Indust. Electron.* – 2006. – No. 53 (2). – P. 554-560.
9. *Zapateiro M., Pozo F., Karimi H., Luo N.* Semiactive control methodologies for suspension control with magnetorheological dampers // *IEEE Trans. Mechatron.* – 2012. – No. 17 (2). – P. 370-380.
10. *Chen H., Guo K.* Constrained H_∞ control of active suspensions: an LMI approach // *IEEE Trans. Control Syst. Technol.* – 2005. – No. 13 (10). – P. 412-421.
11. *Gao H., Lam J., Wang C.* Multi-objective control of vehicle active suspension systems via load-dependent controllers // *J. Sound Vib.* – 2006. – No. 290. – P. 645-675.
12. *Du H., Zhang N.* H_∞ control of active vehicle suspensions with actuator time delay // *J. Sound Vib.* – 2007. – No. 301. – P. 236-252.
13. *Yagiz N., Hacioglu Y.* Backstepping control of a vehicle with active suspensions // *Control Eng. Practice*. – 2008. – No. 16. – P. 1457-1467.
14. *Du H., Zhang N.* Fuzzy control for nonlinear uncertain electrohydraulic active suspensions with input constraint // *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* – 2009. – No. 17 (2). – P. 343-356.
15. *Sun W., Gao H., Kaynak O.* Adaptive backstepping control for active suspension systems with hard constraints // *IEEE Trans. Mechatron.* – 2013. – No. 18 (3). – P. 1072-1079.
16. *Peng T.* Adaptive control of uncertain constrained nonlinear systems // A PHD thesis, National University of Singapore. – 2008. – P. 1-164.
17. *Tee K., Ge S., Tay E.* Barrier Lyapunov functions for the control of output constrained nonlinear systems // *Automatica*. – 2009. – No. 45. – P. 918-927.
18. *Chen M., Ge S., Ren B.* Adaptive tracking control of uncertain MIMO nonlinear systems with input constraints // *Automatica*. – 2011. – No. 47 (3). – P. 452-465.
19. *Ren B., Ge S., Tee K., et al.* Adaptive neural control for output feedback nonlinear systems using a barrier Lyapunov function // *IEEE Trans. Neural Netw.* – 2010. – No. 21 (8). – P. 1339-1345.
20. *Tee K., Ge S., Tay F.* Adaptive control of electrostatic microactuators with bidirectional drive // *IEEE Trans. Control Syst. Technol.* – 2009. – No. 17 (2). – P. 340-352.

21. Sun W., Pan H., Zhang Y., Gao H. Multi-objective control for uncertain nonlinear active suspension systems // *Mechatronics*. – 2014. – No. 24. – P. 318-327.
22. Колесников А.А. Синергетическая теория управления. – М.: Энергоатомиздат, 1994. – 344 с.
23. Колесников А.А., Веселов Г.Е., Попов А.Н. и др. Синергетические методы управления сложными системами: Механические и электромеханические системы / Под общей ред. А.А. Колесникова. – Изд. стереотип. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 304 с.
24. Колесников А.А., Веселов Г.Е. Синергетический принцип иерархизации и аналитический синтез регуляторов взаимосвязанных электромеханических систем // *Известия ТРТУ*. – 2001. – № 5 (23). – С. 80-99.
25. Karimi H. A sliding mode approach to H_∞ synchronization of master–slave time-delays systems with markovian jumping parameters and nonlinear uncertainties // *J. Franklin Inst.* – 2012. – No. 349(4). – P. 1480-1496.
26. Karimi H. Adaptive H_∞ synchronization problem of uncertain master–slaves systems with mixed time-varying delays and nonlinear perturbations: an LMI approach // *Int. J. Autom. Comput.* – 2011. – No. 8 (4). – P. 381-390.
27. Hu J., Wang Z., Gao H., Stergioulas L. Robust sliding mode control for discrete stochastic systems with mixed time delays, randomly occurring uncertainties, and randomly occurring nonlinearities // *IEEE Trans. Indust. Electron.* – 2012. – No. 59 (7). – P. 3008-3015.
28. Zhang L., Lam J. Necessary and sufficient conditions for analysis and synthesis of Markov jump linear systems with incomplete transition descriptions // *IEEE Trans. Autom. Control.* – 2010. – No. 55 (7). – P. 1695-1701.
29. Wu L., Zheng W. Weighted H_∞ model reduction for linear switched systems with time-varying delay // *Automatica*. – 2009. – No. 45 (1). – P. 186-193.

REFERENCES

1. Hrovat D. Survey of advanced suspension developments and related optimal control applications, *Automatica*, 1997, No. 33 (10), pp. 1781-1817.
2. Cao D., Song X., Ahmadian M. Editors' perspectives: road vehicle suspension design, dynamics, and control, *Vehicle Syst. Dyn.*, 2011, No. 49 (1–2), pp. 3-28.
3. Li H, Liu H, Gao H, Shi P. Reliable fuzzy control for active suspension systems with actuator delay and fault, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 2012, No. 20 (2), pp. 342-357.
4. Sandea T., Gysen B., Besselink I., et al. Robust control of an electromagnetic active suspension system: simulations and measurements, *Mechatronics*, 2013, No. 23, pp. 204-212.
5. Sun W., Gao H., Kaynak O. Finite frequency H_∞ control for vehicle active suspension systems, *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 2011., No. 19 (2), pp. 416-422.
6. Sun W., Gao H. Vibration control for active seat suspension systems via dynamic output feedback with limited frequency characteristic, *Mechatronics*, 2011, No. 21, pp. 250-260.
7. Hayakawa K., Matsumoto K., Yamashita M., et al. Robust H_∞ output feedback control of decoupled automobile active suspension systems, *IEEE Trans. Autom. Control.*, 1999, No. 44 (2), pp. 392-396.
8. Amirifar R., Sadati N. Low-order H_∞ controller design for an active suspension system via LMI, *IEEE Trans. Indust. Electron.*, 2006, No. 53 (2), pp. 554-560.
9. Zapateiro M., Pozo F., Karimi H., Luo N. Semiactive control methodologies for suspension control with magnetorheological dampers, *IEEE Trans. Mechatron.*, 2012, No. 17 (2), pp. 370-380.
10. Chen H., Guo K. Constrained H_∞ control of active suspensions: an LMI approach, *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 2005, No. 13 (10), pp. 412-421.
11. Gao H., Lam J., Wang C. Multi-objective control of vehicle active suspension systems via load-dependent controllers, *J. Sound Vib.*, 2006, No. 290, pp. 645-675.
12. Du H., Zhang N. H_∞ control of active vehicle suspensions with actuator time delay, *J. Sound Vib.*, 2007, No. 301, pp. 236-252.
13. Yagiz N., Hacıoglu Y. Backstepping control of a vehicle with active suspensions, *Control Eng. Practice.*, 2008, No. 16, pp. 1457-1467.
14. Du H., Zhang N. Fuzzy control for nonlinear uncertain electrohydraulic active suspensions with input constraint, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 2009, No. 17 (2), pp. 343-356.
15. Sun W., Gao H., Kaynak O. Adaptive backstepping control for active suspension systems with hard constraints, *IEEE Trans. Mechatron.*, 2013, No. 18 (3), pp. 1072-1079.

16. Peng T. Adaptive control of uncertain constrained nonlinear systems, *A PHD thesis, National University of Singapore*, 2008, pp. 1-164.
17. Tee K., Ge S., Tay E. Barrier Lyapunov functions for the control of output constrained nonlinear systems, *Automatica*, 2009, No. 45, pp. 918-927.
18. Chen M., Ge S., Ren B. Adaptive tracking control of uncertain MIMO nonlinear systems with input constraints, *Automatica*, 2011, No. 47 (3), pp. 452-465.
19. Ren B., Ge S., Tee K., et al. Adaptive neural control for output feedback nonlinear systems using a barrier Lyapunov function, *IEEE Trans. Neural Netw.*, 2010, No. 21 (8), pp. 1339-1345.
20. Tee K., Ge S., Tay F. Adaptive control of electrostatic microactuators with bidirectional drive, *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 2009, No. 17 (2), pp. 340-352.
21. Sun W., Pan H., Zhang Y., Gao H. Multi-objective control for uncertain nonlinear active suspension systems, *Mechatronics*, 2014, No. 24, pp. 318-327.
22. Kolesnikov A.A. Sinergeticheskaya teoriya upravleniya [Synergetic control theory]. Moscow: Energoatomizdat, 1994, 344 p.
23. Kolesnikov A.A., Veselov G.E., Popov A.N. i dr. Sinergeticheskie metody upravleniya slozhnymi sistemami: Mekhanicheskie i elektromekhanicheskie sistemy [Synergetic control methods of complex systems: Mechanical and Electromechanical systems], By ed. A.A. Kolesnikova. Izd. stereotip. Moscow: Knizhnyy dom «LIBROKOM», 2013, 304 p.
24. Kolesnikov A.A., Veselov G.E. Sinergeticheskiy printsip ierarhizatsii i analiticheskiy sintez regulyatorov vzaimosvyazannykh elektromekhanicheskikh sistem [Synergy principle ranking and analytical synthesis of regulators of the interconnected Electromechanical systems], *Izvestiya TRTU [Izvestiya TSUR]*, 2001, No. 5 (23), pp. 80-99.
25. Karimi H. A sliding mode approach to H_∞ synchronization of master-slave time-delays systems with markovian jumping parameters and nonlinear uncertainties, *J. Franklin Inst.*, 2012, No. 349(4), pp. 1480-1496.
26. Karimi H. Adaptive H_∞ synchronization problem of uncertain master-slaves systems with mixed time-varying delays and nonlinear perturbations: an LMI approach, *Int. J. Autom. Comput.*, 2011, No. 8 (4), pp. 381-390.
27. Hu J., Wang Z., Gao H., Stergioulas L. Robust sliding mode control for discrete stochastic systems with mixed time delays, randomly occurring uncertainties, and randomly occurring nonlinearities, *IEEE Trans. Indust. Electron.*, 2012, No. 59 (7), pp. 3008-3015.
28. Zhang L., Lam J. Necessary and sufficient conditions for analysis and synthesis of Markov jump linear systems with incomplete transition descriptions, *IEEE Trans. Autom. Control.*, 2010, No. 55 (7), pp. 1695-1701.
29. Wu L., Zheng W. Weighted H_∞ model reduction for linear switched systems with time-varying delay, *Automatica*, 2009, No. 45 (1), pp. 186-193.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Я.Е. Ромм.

Веселов Геннадий Евгеньевич – Южный федеральный университет; e-mail: gev@sfned.ru; 347922, г. Таганрог, ул. Чехова, 2; тел.: +78634360450; Институт компьютерных технологий и информационной безопасности; директор.

Синицын Александр Сергеевич – e-mail: axcom18@gmail.com; Институт компьютерных технологий и информационной безопасности; аспирант.

Veselov Gennady Evgenievitch – Southern Federal University; e-mail: gev@sfned.ru; 2, Chekhov street, Taganrog, 347900, Russia; phone: +78634360450; Institute of Computer Technology and Information Security; director.

Sinitsyn Alexander Sergeevich – e-mail: axcom18@gmail.com; Institute of Computer Technology and Information Security; postgraduate student.