

## Раздел V. Применение суперкомпьютерных технологий в науке, технике и промышленности

УДК 519.6

DOI 10.18522/2311-3103-2016-12-141149

**А.В. Никитина**

### **ПРИМЕНЕНИЕ СХЕМ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БИОЛОГИЧЕСКОЙ РЕАБИЛИТАЦИИ МЕЛКОВОДНОГО ВОДОЕМА НА МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ\***

*Рассматриваются проблемы решения задач водной экологии на многопроцессорной вычислительной системе (МВС). Целью работы является повышение точности прогнозного моделирования процессов биологической кинетики, на основе разработки, исследования и численной реализации новых математических моделей гидробиологических процессов, протекающих в мелководных водоемах. В работе предложена новая модель биологической реабилитации мелководного водоема, учитывающая факторы, оказывающие существенное влияние на качество вод мелководных водоемов. Проведена ее дискретизация с использованием метода баланса и неявной схемы с центральными разностями. Предлагаемый численный метод решения поставленной модельной задачи имеет большую общность и пригоден для исследования гидробиологических процессов, протекающих в мелководных водоемах, поскольку позволяет наиболее корректно конструировать вычислительные алгоритмы на границах области интегрирования и раздела сред. Одной из задач работы является сокращение времени вычислений и сохранение точности результатов решения задачи биологической реабилитации мелководного водоема за счет применения многопроцессорной вычислительной системы. При реализации параллельного алгоритма решения задачи на МВС для распределения данных между процессорами были разработаны два алгоритма, в том числе алгоритм на основе метода  $k$ -means, основанный на минимизации функционала суммарной выборочной дисперсии разброса элементов относительно центра тяжести подобластей, позволяющий повысить эффективность параллельного алгоритма решения поставленной задачи гидробиологии мелководного водоема. Для численной реализации предложенной математической модели биологической реабилитации мелководного водоема использовались схемы повышенного порядка точности, был разработан параллельный алгоритм модифицированного попеременно-треугольного метода, для распределения данных между процессорами МВС использовался  $k$ -means алгоритм, повышающий эффективность алгоритма решения поставленной задачи на 15 % по сравнению с алгоритмом, основанном на стандартном разбиении расчетной области. Использование МВС позволяет значительно сократить время вычислений при сохранении точности результатов решения задачи. Последнее обеспечивает более быструю и качественную интерпретацию гидробиологических данных.*

*Многопроцессорная вычислительная система; моделирование биологической реабилитации; система линейных алгебраических уравнений; мелководный водоем.*

---

\* Работа выполнена при частичной поддержке Задания № 2014/174 в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России и программы фундаментальных исследований Президиума РАН №43 «Фундаментальные проблемы математического моделирования», а также при частичной финансовой поддержке РФФИ по проектам № 15-01-08619, № 15-07-08626, № 15-07-08408, № 16-37-00129.

A.V. Nikitina

**APPLICATION SCHEME OF HIGH RESOLUTION FOR SOLVING  
THE PROBLEM OF BIOLOGICAL REHABILITATION IN SHALLOW  
WATERS ON MULTIPROCESSOR COMPUTER SYSTEMS**

*The paper covers problems of solving tasks of water ecology on multiprocessor computer system (MCS). The aim is to improve the accuracy predictive modeling of biological processes kinetics, based on studies and research and numerical implementation of new mathematical models of hydro-biological processes occurring in the shallow waters. We proposed a new model of biological rehabilitation of shallow waters taking into account the factors which have a significant influence on the water quality. The model's discretization was performed using the balance method and the implicit scheme with central differences. The proposed numerical method for the model problem solution is the most common and suitable to the study of hydrobiological processes occurring in shallow waters since it permits to correctly design the computational algorithms on the boundary between the integration domain and the environment division. One of the objectives of the work is reducing the calculation time and saving the accuracy of the results of solving problem of biological rehabilitation of shallow waters by using a multiprocessor computer system. Two algorithms have been developed in the implementation of the parallel algorithm for solving problem on the MCS for the distribution of data between the processors. There is the algorithm on the basis of the k-means method, based on the minimization of the functional of the total sample variance of scatter elements about the center of gravity of the subdomains, which allows increasing the efficiency of the parallel algorithm of the hydrobiology problem of shallow water. For the numerical implementation of the proposed mathematical model of biological rehabilitation of shallow pond used are the high-order accuracy schemes, developed was the parallel algorithm of modified alternating triangular method, k-means algorithm was used for data distribution among the processors MCS, increasing the efficiency of the algorithm to solve the problem 15 % compared to an algorithm based on a standard partitioning of the computational domain. Using the MCS can significantly reduce the calculation time while saving the accuracy of the solution. The latter fact provides the fast and qualitative interpretation of hydrobiological data.*

*Multiprocessor computer system; modeling of biological rehabilitation; system of linear algebraic equations; shallow water.*

**Введение.** Теоретической основой биологической реабилитации мелководных водоемов Юга России является комплексное решение проблем загрязнения их вод. Схема биологической реабилитации водоемов должна включать действия, направленные на минимизацию концентрации загрязняющих веществ, улучшение санитарного состояния, предотвращение «цветения» воды синезелеными токсичными водорослями, такими как *Microcystis aeruginosa*, *Aphanizomenon flosaquae*, *Anabaena flosaquae* и др., биологическую мелиорацию высшей водной растительности и, наконец, вылов рыбы и прочих биологических объектов. К основным мерам по предотвращению вредоносного цветения водорослей можно отнести: использование видов-антагонистов, видов конкурентов, консументов, паразитов; применение глины, перекиси водорода; лимитирование железа и основных биогенов; осуществление контроля над балластными водами судов; установление датчиков ДНК и др.

Микроорганизмы, растения и животные, заселяющие загрязненные водоемы, участвуют в процессе естественного самоочищения водоемов, но эффективность такого процесса достаточно низкая. В качестве механизма, использующегося учеными биологами для биологической реабилитации сточных вод и загрязненных водоемов, служит штамм *Chlorella vulgaris* BIN в виду его универсального действия на различные виды водных загрязнений. При альголизации сточных вод и загрязненных водоемов этой водорослью происходит структурная перестройка их фитопланктонного сообщества, преобладание в развитии получают зеленые водоросли, наиболее благоприятные для экологического, санитарного и рыбохозяйственного состояния водоема.

К предупредительным мерам отнесем: контроль сбросов неочищенных сточных вод; комплексный экологический мониторинг. Моделирование процесса альголизации водоема штаммом зеленой водоросли *Chlorella vulgaris* BIN проводится с целью вытеснения токсичных синезеленых водорослей, а значит и улучшения качества вод мелководных водоемов, таких как Азовское море и Таганрогский залив, а вследствие этого уменьшения площади заморной зоны, обнаруженной в ходе научно-исследовательской экспедиций.

Одной из главных проблем математического моделирования, с которой при этом сталкиваются исследователи, является точность и скорость интерпретации гидробиологических данных. При моделировании гидробиологических процессов, протекающих в мелководных водоемах, охватывается существенно более широкий спектр факторов, оказывающий существенное влияние на характер их протекания. Поэтому качество построения моделей гидробиологических процессов и точность получаемых расчетов зачастую не удовлетворяют требованиям, предъявляемым интерпретаторами, поскольку перед ними стоит задача истолкования наблюдаемой картины на качественном и количественном уровнях.

Для преодоления данной проблемы необходимо совершенствовать методы и средства решения модельных задач гидробиологии, поскольку они возникают как на стадиях создания и уточнения модели биологической кинетики, так и на этапах верификации результатов натурных наблюдений.

Однако, помимо требований виду математической модели, необходимо обеспечивать заданную точность вычислений, существенно влияющую на качество интерпретации полученных в результате моделирования результатов. Разработка сценариев биологической реабилитации мелководного водоема на примере Азовского моря требует быстрого и качественного анализа получаемых натурных данных, что затрудняется необходимостью охвата широкого спектра гидробиологических особенностей и учета их параметров в создаваемой математической модели. В качестве одного из вариантов преодоления проблемы моделирования гидробиологических процессов рассматривается применение МВС. Данные вычислительные системы позволяют получать существенно большую производительность вычислений. Это особенно характерно для нелинейных, пространственно-неоднородных моделей, к числу которых относятся многие задачи биологической кинетики.

**Постановка задачи.** Рассмотрим модель биологической реабилитации мелководного водоема:

$$\begin{aligned}
 (F_i)'_t + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \left\{ U_{\alpha} (F_i)_{x_{\alpha}}' + (U_{\alpha} F_i)_{x_{\alpha}}' \right\} &= \mu_i \Delta F_i + \left( v_i \frac{\partial F_i}{\partial z} \right)'_{x_3} + \psi_i, \\
 Z'_t + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \left\{ U_{\alpha} Z_{x_{\alpha}}' + (U_{\alpha} Z)_{x_{\alpha}}' \right\} &= \mu_z \Delta Z + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( v_z \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + \psi_z (F_1, F_2, M_2, Z), \\
 S'_t + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \left\{ U_{\alpha} S_{x_{\alpha}}' + (U_{\alpha} S)_{x_{\alpha}}' \right\} &= \mu_s \Delta S + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( v_s \frac{\partial S}{\partial z} \right) + \psi_s (F_1, F_2, Z, M_2, S), \\
 (M_1)'_t + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \left\{ U_{\alpha} (M_1)_{x_{\alpha}}' + (U_{\alpha} M_1)_{x_{\alpha}}' \right\} &= \mu_3 \Delta M_1 + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( v_3 \frac{\partial M_1}{\partial z} \right) + k_1 F_1 - \varepsilon_3 M_1, \\
 (M_2)'_t + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \left\{ U_{\alpha} (M_2)_{x_{\alpha}}' + (U_{\alpha} M_2)_{x_{\alpha}}' \right\} &= \mu_4 \Delta M_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( v_4 \frac{\partial M_2}{\partial z} \right) + k_2 F_2 - \varepsilon_4 M_2, \\
 \psi_1 = \psi_1 (S, F_1, F_2, Z) &= \{ \alpha_1 S - \delta_1 Z - \theta_1 F_2 - \varepsilon_1 \} F_1, \\
 \psi_2 = \psi_2 (S, F_1, F_2, Z) &= \{ \alpha_2 S - \delta_2 Z - \theta_2 F_1 - \varepsilon_2 \} F_2,
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\psi_Z(F_1, F_2, M_2, Z) = \{p_1 F_1 - p_2 F_2 - \varepsilon_Z M_2\} Z,$$

$$\psi_S(F_1, F_2, Z, M_2, S) = \varepsilon_1 F_1 + \varepsilon_2 F_2 + \varepsilon_Z M_2 Z - \beta_1 F_1 S - \beta_2 F_2 S + B(S_p - S) + f,$$

где  $F_i$  – значения концентраций зеленых (*Chlorella Vulgaris BIN*) и синезеленых водорослей (*Aphanizomenon flos-aquae*) соответственно,  $i \in \{1, 2\}$ ;  $Z$  – концентрация зоопланктона (*Bosmina Longirostris*);  $S$  – концентрация биогенного вещества;  $M_i$  – концентрация метаболита  $i$ -го вида;  $\psi_i, \psi_Z, \psi_S$  – функции трофических взаимодействий;  $\mu_r, \mu_Z, \mu_S, \nu_r, \nu_Z, \nu_S$  – диффузионные коэффициенты в горизонтальном и вертикальном направлениях субстанций  $F_i, Z, S, M_i, r \in \{1, 2, 3, 4\}$ ;  $\alpha_i = (\alpha_{0i} + \gamma_i M_i)$  – функция роста  $i$ -го вида за счет  $M_i$ ;  $\alpha_{0i}, \gamma_i$  – скорость роста в отсутствие метаболита и параметр воздействия  $i$ -го вида;  $\alpha_Z$  – скорость роста зоопланктона;  $B$  – скорость поступления  $S$ ;  $S_p$  – предельно возможная концентрация  $S$ ;  $\varepsilon_i$  – коэффициент, учитывающий смертность  $i$ -го вида и выедание его рыбами;  $\varepsilon_m$  – коэффициенты разложения метаболита,  $m = \overline{3, 4}$ ;  $k_i$  – коэффициенты экскреции  $i$ -го вида;  $f = f(x_1, x_2, x_3, t)$  – функция источника  $S$  (загрязнения);  $\theta_i$  – коэффициент межвидовой конкуренции  $i$ -го вида;  $\mathbf{u}$  – поле скоростей водного потока;  $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}_{0k}$ ,  $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$  – скорость конвективного переноса вещества;  $\mathbf{u}_{0k}$  – скорость осаждения  $k$ -й субстанции;  $k \in \{F_1, F_2, S, Z, M_1, M_2\}$ ;  $\beta_i = (\beta_{0i} + \gamma_i M_i)$  – коэффициенты поглощения биогенного вещества фитопланктоном  $i$ -го вида;  $\delta_i$  – коэффициенты убыли водорослей  $i$ -го вида за счет выедания зоопланктоном;  $p_i$  – коэффициенты переработанной биомассы водорослей  $i$ -го вида в биомассу зоопланктона.

К системе (1) добавим соответствующие начальные и граничные условия.

**Метод решения модельной задачи.** Проведем дискретизацию модели (1), получим с использованием [1]:

$$\begin{aligned} F_{(1)t}^{p+1} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \left\{ U_{\alpha} \hat{F}_{(1)_{x_{\alpha}}}^{p+1} + \left( U_{\alpha} \hat{F}_{(1)_{x_{\alpha}}}^{p+1} \right)_{x_{\alpha}} \right\} &= \mu_1 \left( \hat{F}_{(1)\bar{x}\bar{x}}^{p+1} + \hat{F}_{(1)\bar{y}\bar{y}}^{p+1} \right) + \\ &+ \left( \nu_1 \hat{F}_{(1)\bar{z}}^{p+1} \right)_{\bar{z}} + \alpha_1 \hat{S}^p \hat{F}_{(1)}^{p+1} - \delta_1 \hat{Z}^p \hat{F}_{(1)}^{p+1} - \theta_1 \hat{F}_{(2)}^p \hat{F}_{(1)}^{p+1} - \varepsilon_1 \hat{F}_{(1)}^{p+1}, \\ F_{(2)t}^{p+1} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \left\{ U_{\alpha} \hat{F}_{(2)_{x_{\alpha}}}^{p+1} + \left( U_{\alpha} \hat{F}_{(2)_{x_{\alpha}}}^{p+1} \right)_{x_{\alpha}} \right\} &= \mu_2 \left( \hat{F}_{(2)\bar{x}\bar{x}}^{p+1} + \hat{F}_{(2)\bar{y}\bar{y}}^{p+1} \right) + \\ &+ \left( \nu_2 \hat{F}_{(2)\bar{z}}^{p+1} \right)_{\bar{z}} + \alpha_2 \hat{S}^p \hat{F}_{(2)}^{p+1} - \delta_2 \hat{Z}^p \hat{F}_{(2)}^{p+1} - \theta_2 \hat{F}_{(1)}^p \hat{F}_{(2)}^{p+1} - \varepsilon_2 \hat{F}_{(2)}^{p+1}, \\ Z_t^{p+1} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \left\{ U_{\alpha} \hat{Z}_{x_{\alpha}}^{p+1} + \left( U_{\alpha} \hat{Z}_{x_{\alpha}}^{p+1} \right)_{x_{\alpha}} \right\} &= \mu_Z \left( \hat{Z}_{\bar{x}\bar{x}}^{p+1} + \hat{Z}_{\bar{y}\bar{y}}^{p+1} \right) + \\ &+ \left( \nu_Z \hat{Z}_{\bar{z}}^{p+1} \right)_{\bar{z}} + p_1 \hat{F}_{(1)}^p \hat{Z}^{p+1} - p_2 \hat{F}_{(2)}^p \hat{Z}^{p+1} - \varepsilon_Z \hat{M}_{(2)}^p \hat{Z}^{p+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_t^{p+1} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \left\{ U_{\alpha} \hat{S}_{x_{\alpha}}^{p+1} + \left( U_{\alpha} \hat{S}^{p+1} \right)_{x_{\alpha}} \right\} &= \mu_S \left( \hat{S}_{\bar{x}\bar{x}}^{p+1} + \hat{S}_{\bar{y}\bar{y}}^{p+1} \right) + \\
 + \left( \nu_S \hat{S}_{\bar{z}}^{p+1} \right)_z + \varepsilon_1 \hat{F}_{(1)}^{p+1} + \varepsilon_2 \hat{F}_{(2)}^{p+1} - \beta_1 \hat{F}_{(1)}^p \hat{S}^{p+1} - \beta_2 \hat{F}_{(2)}^p \hat{S}^{p+1} + & \quad (2) \\
 + \varepsilon_Z \hat{M}_{(1)}^p \hat{Z}^{p+1} + B \left( S_p - \hat{S}^{p+1} \right) + f, \\
 M_{(m)t}^{p+1} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \left\{ U_{\alpha} \hat{M}_{(m)x_{\alpha}}^{p+1} + \left( U_{\alpha} \hat{M}_{(m)}^{p+1} \right)_{x_{\alpha}} \right\} &= \\
 = \mu_r \left( \hat{M}_{(m)\bar{x}\bar{x}}^{p+1} + \hat{M}_{(m)\bar{y}\bar{y}}^{p+1} \right) + \left( \nu_r \hat{M}_{(m)\bar{z}}^{p+1} \right)_z + k_m \hat{F}_{(m)}^{p+1} - \varepsilon_r \hat{M}_{(m)}^{p+1}; \\
 m = \overline{1, 2}; r = \overline{3, 4},
 \end{aligned}$$

где  $\hat{F}_{(m)}$ ,  $\hat{Z}$ ,  $\hat{S}$ ,  $\hat{M}_{(m)}$ ,  $m = \overline{1, 2}$  – значения соответствующих функций в узлах сетки на  $(n+1)$ -м временном слое;  $p$  – номер итерации в итерационном процессе.

Решение дискретной задачи (2) с применением схем повышенного порядка точности сводится к решению СЛАУ большой размерности. Для ее решения использовался метод, обеспечивающий «гладкость» [2, 3] решения поставленной задачи – адаптивный модифицированный попеременно-треугольный метод (МПТМ), его алгоритм для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором имеет вид:

$$\begin{aligned}
 r^m &= Ax^m - f, B(\omega_m)w^m = r^m, \\
 \tilde{\omega}_m &= \sqrt{(Dw^m, w^m) / (D^{-1}R_2w^m, R_2w^m)}, \\
 s_m^2 &= 1 - (A_0w^m, w^m)^2 / \left\{ (B^{-1}A_0w^m, A_0w^m)(Bw^m, w^m) \right\}, \\
 k_m &= (B^{-1}A_1w^m, A_1w^m) / (B^{-1}A_0w^m, A_0w^m), \\
 \theta_m &= \left\{ 1 - \sqrt{s_m^2 k_m / (1 + k_m)} \right\} / \left\{ 1 + k_m (1 - s_m^2) \right\}, \\
 \tau_{m+1} &= \theta_m (A_0w^m, w^m) / (B^{-1}A_0w^m, A_0w^m), x^{m+1} = x^m - \tau_{m+1}w^m, \omega_{m+1} = \tilde{\omega}_m,
 \end{aligned} \quad (3)$$

где  $r^m$  – вектор невязки,  $w^m$  – вектор поправки, в качестве оператора  $D$  используется диагональная часть оператора  $A$ .

Важной особенностью МПТМ является способность дать решение СЛАУ за наименьшее число итераций в случае плохо обусловленных задач, к которым относится и решаемая задача.

**Параллельная реализация МПТМ.** Опишем параллельный алгоритм, используемый для решения задачи (1), использующий для декомпозиции расчетной области с целью равномерной загрузки вычислителей (процессоров) МВС метод k-means, основанный на минимизации функционала суммарной выборочной дисперсии разброса элементов (узлов расчетной сетки) относительно центра тяжести подобластей. Результат работы метода k-means представлен на рис. 1 (стрелками указаны обмены) [4–10].

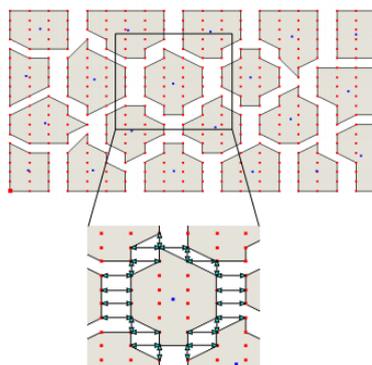
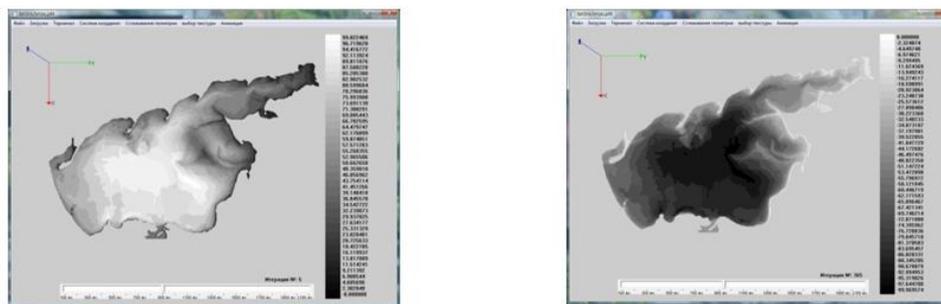


Рис. 1. Декомпозиция расчетной области

Рис. 2 описывает возможный сценарий биологической реабилитации Азовского моря с помощью моделирования процесса его альголизации водорослью *Chlorella Vulgaris* BIN с целью вытеснения токсичного синезеленого фитопланктона *Aphanizomenon flos-aquae* [11–14].

Рис. 2. Совместное распределение концентраций водорослей для временных интервалов  $T = 1$ ,  $T = 107$  дней

Для численной реализации предложенной математической модели биологической реабилитации мелководного водоема использовались схемы повышенного порядка точности [15–20], был разработан параллельный алгоритм модифицированного попеременно-треугольного метода, для распределения данных между процессорами МВС использовался k-means алгоритм, повышающий эффективность алгоритма решения поставленной задачи на 15 % по сравнению с алгоритмом, основанном на стандартном разбиении расчетной области.

**Заключение.** Применение МВС позволило сократить время решения поставленной модельной задачи, и сохранить требуемую точность моделирования гидробиологических процессов, протекающих в мелководных водоемах, что актуально в задачах водной экологии.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Никитина А.В. и др. Оптимальное управление устойчивым развитием при биологической реабилитации Азовского моря // Математическое моделирование. – 2016. – Т. 28, № 7. – С. 96-106.
2. Чистяков А.Е., Першина Ю.В. Решение задачи динамики популяций на основе модели хищник–жертва // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – № 1 (138). – С. 142-149.

3. *Чистяков А.Е., Перишина Ю.В.* Математическая модель динамики популяций и ее численное решение на основе сеточных методов // Альманах современной науки и образования. – 2013. – № 1. – С. 165-170.
4. *Камышишникова Т.В., Никитина А.В., Чистяков А.Е.* Математические модели и методы управления в экономике и экологии: учеб.-метод. пособие. – Ростов-на-Дону, 2015.
5. *Никитина А.В. и др.* К вопросу о формировании заморных зон в восточной части Азовского моря // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 1-1. – URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=19509> (дата обращения: 02.11.2016).
6. *Никитина А.В., Абраменко Ю.А., Чистяков А.Е.* Математическое моделирование процессов разлива нефти в мелководных водоемах // Информатика, вычислительная техника и инженерное образование. – 2015. – № 3 (23). – С. 49-55.
7. *Chistyakov A.E. et al.* A Differential Game Model of Preventing Fish Kills in Shallow Water Bodies // Game Theory and Applications. – 2015. – Vol. 17. – P. 37-48.
8. *Trän J.K.* A Predator-Prey Functional Response Incorporating Indirect Interference and Depletion // Verh. Internat. Verein. Limnol. – 2008. – Vol. 30, No. 2. – P. 302-305.
9. *Никитина А.В. и др.* Применение схем повышенного порядка точности для решения задач биологической кинетики на многопроцессорной вычислительной системе // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 12-3. – С. 500-504.
10. *Сухинов А.И. и др.* Комплекс моделей, явных регуляризованных схем повышенного порядка точности и программ для предсказательного моделирования последствий аварийного разлива нефтепродуктов // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2016): Труды Международной научной конференции, Архангельск, 28 марта – 1 апреля 2016 г. – Челябинск, 2016. – С. 308-319.
11. *Никитина А.В., Семенякина А.А., Чистяков А.Е.* Параллельная реализация задачи диффузии-конвекции на основе схем повышенного порядка точности // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2016. – № 7. – С. 3-8.
12. *Сухинов А.И. и др.* Численное моделирование экологического состояния Азовского моря с применением схем повышенного порядка точности на многопроцессорной вычислительной системе // Компьютерные исследования и моделирование. – 2016. – Т. 8, № 1. – С. 151-168.
13. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
14. *Коновалов А.Н.* К теории попеременно-треугольного итерационного метода // Сибирский математический журнал. – 2002. – Т. 43, № 3. – С. 552-572.
15. *Чистяков А.Е., Никитина А.В., Сумбаев В.В.* Решение задачи Пуассона на основе многосеточного метода // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2016. – № 8. – С. 3-7.
16. *Tuyuyunov Yu., Senina I., Arditi R.* Clustering due to acceleration in the response to population gradient: a simple self-organization model // The American Naturalist. – 2004. – No. 164. – P. 722-735.
17. *Volterra V.* Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together // Rapp. P. – V. Reun. Cons. Int. Explor. Mer. – 1928. – No. 3. – P. 3-51.
18. *Yakushev E.V., Mikhailovsky G.E.* Mathematical modeling of the influence of marine biota on the carbon dioxide ocean-atmosphere exchange in high latitudes // Air-Water Gas Transfer, Sel. Papers, Third Int. Symp., Heidelberg University / ed. by B. Jaehne and E.C. Monahan, AEON Verlag & Studio, Hanau, 1995. – P. 37-48.
19. *Марчук Г.И., Саркисян А.С.* Математическое моделирование циркуляции океана. – М.: Наука, 1988. – 297 с.
20. *Каменецкий Е.С., Радионов А.А.* Математическое моделирование атмосферных процессов в Кармадонском ущелье Северной Осетии // Владикавказский математический журнал. – 2010. – Т. 12. – Вып. 3. – С. 41-46.

#### REFERENCES

1. *Nikitina A.V. i dr.* Optimal'noe upravlenie ustoychivym razvitiem pri biologicheskoy reabilitatsii Azovskogo morya [The optimal management of sustainable development with biological rehabilitation of the Azov sea], *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling], 2016, Vol. 28, No. 7, pp. 96-106.

2. *Chistyakov A.E., Pershina Yu.V.* Reshenie zadachi dinamiki populyatsiy na osnove modeli khishchnik–zhertva [Solution of the dynamics of population, based on ofpredator-prey model], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2013, No. 1 (138), pp. 142-149.
3. *Chistyakov A.E., Pershina Yu.V.* Matematicheskaya model' dinamiki populyatsiy i ee chislennoe reshenie na osnove setochnykh metodov [A mathematical model of population dynamics and its numerical solution based on grid methods], *Al'manakh sovremennoy nauki i obrazovaniya* [Almanac of modern science and education], 2013, No. 1, pp. 165-170.
4. *Kamyshnikova T.V., Nikitina A.V., Chistyakov A.E.* Matematicheskie modeli i metody upravleniya v ekonomike i ekologii: ucheb.-metod. posobie [Mathematical models and control methods in economy and ecology: textbook]. Rostov-on-Don, 2015.
5. *Nikitina A.V. i dr.* K voprosu o formirovanii zamornykh zon v vostochnoy chasti Azovskogo morya [The question of the formation of hypoxic zones in the Eastern part of Azov sea coast], *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya* [Modern problems of science and education], 2015, No. 1-1. Available at: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=19509> (accessed 02 November 2016).
6. *Nikitina A.V., Abramenko Yu.A., Chistyakov A.E.* Matematicheskoe modelirovanie pro-tsessov razliva nefi v melkovodnykh vodoemakh [Mathematical modeling of oil spill in shallow waters], *Informatika, vychislitel'naya tekhnika i inzhenernoe obrazovanie* [Informatics, computer science and engineering education], 2015, No. 3 (23), pp. 49-55.
7. *Chistyakov A.E. et al.* A Differential Game Model of Preventing Fish Kills in Shallow Water Bodies, *Game Theory and Applications*, 2015, Vol. 17, pp. 37-48.
8. *Trän J.K.* A Predator-Prey Functional Response Incorporating Indirect Interference and Depletion, *Verh. Internat. Verein. Limnol.*, 2008, Vol. 30, No. 2, pp. 302-305.
9. *Nikitina A.V. i dr.* Primenenie skhem povyshennogo poryadka tochnosti dlya resheniya zadach biologicheskoy kinetiki na mnogoprotsessornoy vychislitel'noy sisteme [The schemes of increased order of accuracy for solving problems of biological kinetics in a multiprocessor computer system], *Fundamental'nye issledovaniya* [Fundamental research], 2015, No. 12-3, pp. 500-504.
10. *Sukhinov A.I. i dr.* Kompleks modeley, yavnykh regulyazirovannykh skhem povyshennogo poryadka tochnosti i programm dlya predskazatel'nogo modelirovaniya posledstviy avariynogo razliva nefteproduktov [A set of models, explicit regularized schemes of high order of accuracy and programs for predictive modeling of consequences of emergency oil spill], *Parallel'nye vychislitel'nye tekhnologii (PaVT'2016): Trudy Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii, Arkhangel'sk, 28 marta – 1 aprelya 2016 g.* [Parallel computational technologies (PCT '2016): proceedings of the International scientific conference, Arkhangelsk, March 28 – April 1, 2016]. Chelyabinsk, 2016, pp. 308-319.
11. *Nikitina A.V., Semenyakina A.A., Chistyakov A.E.* Parallel'naya realizatsiya zadachi diffuzii-konveksii na osnove skhem povyshennogo poryadka tochnosti [Parallel implementation of the tasks of diffusion-convection-based schemes of high order of accuracy], *Vestnik komp'yuternykh i informatsionnykh tekhnologiy* [Herald of computer and information technologies], 2016, No. 7, pp. 3-8.
12. *Sukhinov A.I. i dr.* Chislennoe modelirovanie ekologicheskogo sostoyaniya Azovskogo morya s primeneniem skhem povyshennogo poryadka tochnosti na mnogoprotsessornoy vychislitel'noy sisteme [Numerical simulation of the ecological state of the Azov sea with the use of schemes of high order of accuracy on a multiprocessor computer system], *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie* [Computer research and modeling], 2016, Vol. 8, No. 1, pp. 151-168.
13. *Samarskiy A.A.* Teoriya raznostnykh skhem [The theory of difference schemes]. Moscow: Nauka, 1989, 432 p.
14. *Konovalov A.N.* K teorii poperemennno-treugol'nogo iteratsionnogo metoda [The theory of alternating-triangular iterative method], *Sibirskiy matematicheskii zhurnal* [Siberian mathematical journal], 2002, Vol. 43, No. 3, pp. 552-572.
15. *Chistyakov A.E., Nikitina A.V., Sumbaev V.V.* Reshenie zadachi Puassona na osnove mnogosetochnogo metoda [The solution of the Poisson problem based on the multigrid method], *Vestnik komp'yuternykh i informatsionnykh tekhnologiy* [Herald of computer and information technologies], 2016, No. 8, pp. 3-7.

16. Tyutyunov Yu., Senina I., Arditi R. Clustering due to acceleration in the response to population gradient: a simple self-organization model, *The American Naturalist*, 2004, No. 164, pp. 722-735.
17. Volterra V. Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together, *Rapp. P. – V. Reun. Cons. Int. Explor. Mer.*, 1928, No. 3, pp. 3-51.
18. Yakushev E.V., Mikhailovsky G.E. Mathematical modeling of the influence of marine biota on the carbon dioxide ocean-atmosphere exchange in high latitudes, *Air-Water Gas Transfer, Sel. Papers, Third Int. Symp., Heidelberg University*, ed. by B. Jaehne and E.C. Monahan, AEON Verlag & Studio, Hanau, 1995, pp. 37-48.
19. Marchuk G.I., Sarkisyan A.S. Matematicheskoe modelirovanie tsirkulyatsii okeana [Mathematical modeling of the ocean circulation]. Moscow: Nauka, 1988, 297 p.
20. Kamenetskiy E.S., Radionov A.A. Matematicheskoe modelirovanie atmosferykh protsessov v Karmadonskom ushel'e Severnoy Osetii [Mathematical modeling of atmospheric processes in the Karmadon gorge in North Ossetia], *Vladikavkazskiy matematicheskiy zhurnal* [Vladikavkaz mathematical journal], 2010, Vol. 12, Issue 3, pp. 41-46.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н. Э.В. Мельник.

**Никитина Алла Валерьевна** – Научно-исследовательского института многопроцессорных вычислительных систем имени академика А.В. Каляева Южного федерального университета; e-mail: nikitina.vm@gmail.com; г. Таганрог, ул. Чехова, 2; тел.: 89515168538; д.т.н.; доцент; в.н.с.

**Nikitina Alla Valer'evna** – Research Institute of Multiprocessor Computer Systems named after Academician A. Kalyaeva Southern Federal University; e-mail: nikitina.vm@gmail.com; 2, Chekhov street, Taganrog, Russia; phone: +79515168538; dr. of eng. sc.; associate professor; leading researcher.