20. *Alpatov B.A., Babayan P.V., Smirnov S.A., Maslennikov E.A.* Algoritm predvaritel'nogo otsenivaniya prostranstvennoy orientatsii ob"ekta s pomoshch'yu deskriptora vneshnego kontura [Prior estimation algorithm spatial orientation of the object via outer contour descriptor], *Tsifrovaya obrabotka signalov* [Digital signal processing], 2014, No. 3, pp. 43-46.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор М.Ю. Медведев.

Алпатов Борис Алексеевич – Рязанский государственный радиотехнический университет; e-mail: aitu@rsreu.ru; 390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1; тел.: +74912460342; кафедра автоматики и информационных технологий в управлении; д.т.н.; профессор.

Бабаян Павел Вартанович – кафедра автоматики и информационных технологий в управлении; к.т.н.; доцент.

Балашов Олег Евгеньевич – кафедра автоматики и информационных технологий в управлении; к.т.н.; доцент.

Фельдман Александр Борисович – кафедра автоматики и информационных технологий в управлении; к.т.н.; доцент.

Баранцев Александр Александрович – Государственный Рязанский приборный завод; e-mail: hunter-rzn@yandex.ru; 390000, Рязань, ул. Семинарская, 32; тел.: +74912298380; научно-конструкторский центр видеокомпьютерных технологий; к.т.н.; научный сотрудник.

Alpatov Boris Alekseevich – Ryazan State Radio Engineering University; e-mail: aitu@rsreu.ru; 59/1, Gagarina street, Ryazan, 390005, Russia; phone: +74912460342; the department of automatics and information technology; dr. of eng. sc.; professor.

Babayan Pavel Vartanovich – the department of automatics and information technology; cand. of eng. sc.; associate professor.

Balashov Oleg Evgenevich – the department of automatics and information technology; cand. of eng. sc.; associate professor.

Feldman Alexander Borisovich – the department of automatics and information technology; cand. of eng. sc.; associate professor.

Barancev Aleksandr Aleksandrovich – Ryazan State Instrument-making Enterprise; e-mail: hunter-rzn@yandex.ru; 32, Seminarskaya street, Ryazan, 390000, Russia; phone: +74912298380; Scientific and Design Center of videodata processing; cand. of eng. sc.; researcher.

УДК 004.021

А.А. Кочкаров, Д.В. Яцкин, О.А. Рахманов

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА*

Формулируется задача мониторинга ограниченного пространства. Устанавливается связь между мониторингом пространства и обнаружением объектов на этом пространстве. После введения некоторых допущений делается вывод о необходимости решения задачу покрытия множества (связного пространства). Характерной особенностью рассматриваемой задачи является наличие в зоне мониторинга препятствий. Под препятствием понимается связная область пространства, в каждой точке которого невозможно размещение какого-либо объекта. Тем не менее, поскольку препятствия могут лежать в зоне мониторинга, решение задачи предполагает покрытие зоны мониторинга в том числе и в точках препятствий. Предлагается использование одноранговой сети мобильных робо-

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 16-01-00342 а).

тов для решения поставленной задачи. Преимуществом такого подхода является высокий уровень адаптивности к изменению внешних параметров, а также устойчивости к выходу из строя отдельных элементов сети. Задача покрытия описывается математически, делается вывод о необходимости дискретизации задачи. Все функции и параметры заменяются на дискретные аналоги, при этом шаги дискретизации выбираются малыми по сравнению с характерными размерами задачи. Формулируется и доказывается ряд лемм, посредством которых исследуются свойства и признаки разного рода покрытий. Вводятся определения минимального и наименьшего покрытий, устанавливается отношение между ними. Предлагается механизм решения задачи покрытия посредством построения полного нагруженного графа по определенным правилам и анализа этого графа. Изучаются достаточные условия для построения наименьшего покрытия. Формулируется алгоритм построения наименьшего покрытия при помощи децентрализованной одноранговой сети мобильных роботов. Работоспособность алгоритма следует из сформулированных ранее лемм и утверждений. Оценивается трудоемкость алгоритма. Делается вывод о применимости подобного алгоритма для решения реально возникающих задач, связанных с мониторингом пространства.

Мониторинг; задача обнаружения; теория множеств; покрытие множества; алгоритмы покрытия; теория графов; дискретная оптимизация; мобильный робот; групповое управление.

A.A. Kochkarov, D.V. Yatskin, O.A. Rahmanov

THE MONITORING PROBLEM AND ITS CONNECTION WITH THE PROBLEM OF COVERING CONNECTED SPACES

The problem of limited space monitoring is formulated. The connection between the monitoring space and the detection of objects in this space sets up. After introducing some assumptions we conclude the necessity of solving the covering set (connected space) problem. The presence of obstacles in the monitoring area is the characteristic feature of the problem. "Obstacle" means a connected space area each point of which can not accommodate any object. However, as obstacles may lie in the monitoring area, the coverage of monitoring area should include the obstacles points. It is proposed to use an ad hoc network of mobile robots to solve the problem. The advantage of this approach is the high level of adaptability to changes in external parameters, as well as the resistance to failure of individual network elements. Coverage problem is described mathematically, the conclusion about necessity a sampling problem is made. All functions and parameters are replaced by digital analogues, the sampling steps are chosen to be small compared with the characteristic dimensions of the problem. We formulate and prove a couple of lemmas through which we study the properties and characteristics of various kinds of coverages. The smallest and minimum coverages are defined and ratio therebetween is set up. The mechanism of solution the covering problem by building a complete loaded graph according to certain rules, and the analysis of this graph is provided. We study the sufficient conditions for the construction of the smallest coverage. The algorithm for constructing the smallest coverage using a decentralized ad hoc network of mobile robots is developed. The efficiency of the algorithm follows from the lemmas and propositions set out above. The complexity of the algorithm is estimated. It is concluded that this algorithm is applicant and can solve the real problems related to space monitoring that arise.

Monitoring; detection problem; set theory; cover set; covering algorithms; graph theory, discrete optimization; mobile robot; group control.

Введение. В современном мире достаточно часто возникает задача мониторинга пространства [1–4]. Мониторинг – систематическое наблюдение за каким-либо процессом с целью фиксировать соответствие (или несоответствие) результатов этого процесса первоначальным предположениям [5]. В более узком случае, который и будет рассматриваться, задача мониторинга сопряжена с задачей обнаружения – систематическое наблюдение за определенным пространством с целью обнаружить какой-либо объект при его появлении. Решение такой задачи может потребоваться для самых разных нужд (метеорологические наблюдения [6], экологический мониторинг [7], мониторинг сложных технических систем [8]).

Объект, на обнаружение которого направлена задача (это может быть как какой-то предмет [9–12], так и нечто другой природы – например, сигнал [13]) мы будем называть целью, субъект же – обнаружителем.

При наличии неких обнаружителей, характеристики которых отвечают определенным требованиям, можно считать задачу идентификации цели решенной. Действительно, разработаны алгоритмы обнаружения самых разных объектов [14–18]. Для нас же, поскольку мы хотим получить наиболее решение задачи, максимально независимое от типа объекта, наибольший интерес представляет задача эффективного размещения обнаружителей для реализации этих алгоритмов [19]. Назовем эту задачу *задачей геометрического мониторинга*.

Цель, возникшую в зоне мониторинга, необходимо обнаружить практически моментально – допустить небольшую задержку во времени (связанную со срабатыванием аппаратуры, передачей данных и проч.) можно допустить (за невозможностью избежать), но она должна быть пренебрежимо мала в масштабах задачи.

Для решения этой задачи предлагается использовать сеть неподвижных устройств. Рассчитывается число и расположение элементов этой сети - чтобы их зоны видимости при наложении полностью перекрывали зону мониторинга. Алгоритмы поиска такого расположения будем называть “алгоритмы покрытия”.

Математическое описание задачи. Наиболее общая формулировка задачи покрытия такова:

- Задана некая рабочая зона (зона мониторинга) – связная область пространства.
- Даны N одинаковых устройств, каждому из которых соответствует своя зона покрытия (определяется аналогично для всех устройств).
- В рабочей зоне задано распределение конечное число препятствий – связных множеств точек рабочей зоны, в которых устройства не могут находиться.
- Каждое препятствие каким-либо образом (известным для каждой частной задачи) изменяет зону покрытия каждого устройства (в зависимости от взаимного расположения препятствия и устройства). После учета влияния всех препятствий образуется *реальная зона видимости*.

Требуется найти такие $k \le N$ наборов координат, что если каждое устройство займет позицию, соответствующие одному из этих наборов (так, чтобы два устройства не использовали один набор координат), в рабочей зоне не было бы точки, не входящей в реальную зону видимости одного из устройств. При этом значение k должно быть минимальным из всех возможных.

Здесь следует заметить следующий принципиальный момент. При подобной постановке задачи возможна ситуация, при которой препятствия будут изменять зону покрытия таким образом, что мониторинг в некоторых точках будет невозможен при любом взаимном расположении устройств. В таком случае будет сделан вывод о невозможном полном решении задачи с помощью сети таких устройств. Однако в какой-то мере задача может быть решена, поэтому при реальной постановке задачи требуется указать допустимые размеры *слепых зон* (зон, которые не могут входить в зону видимости ни одного из устройств, независимо от расположения) при которых решение задачи считается допустимым.

Соответственно, на математическом языке задача звучит следующим образом:

- Дано связное ограниченное множество A, на котором задано K связных подмножеств B_i. При этом $\bigcup_{i=1}^{K} B_i = B$. Мы считаем, что множества задаются на некоей евклидовой плоскости, а значит, мы можем вычислять расстояния между элементами этих множеств.

- Задан закон, ставящий в соответствие некоей точке рабочей зоны $X=(x_1,x_2,x_3)$ ограниченное связное множество $C(X)$, содержащее в себе точку X.
- Для каждого B_i задана функция f_i, преобразующая $C(X)$ в каждой точке X рабочей зоны. Соответственно, при заданном распределении B_i каждой точке X можно поставить в соответствие множество $D(X)=\bigcap_{i=1}^{K} f_i(C(X))$.

Требуется найти $k \le N$ точек X_i таких, что:

1. $\forall i \in \{1,2,...,k\} \to X_i \notin B$;
2. $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} D(X_i)$.
3. $k \to \min$

Соответствие введенных обозначений реальным физическим характеристикам представлено в табл. 1.

Таблица 1

Соответствие математического и инженерного описаний задачи

Инженерное описание	Математическое описание
Рабочая зона	A
Координаты точек рабочей зоны	$X=(x_1,x_2,x_3)$
Препятствия	$\bigcup_{i=1}^{K} B_i = B$
Зона видимости устройства, находящегося в точке X, без учета влияния препятствий	$C(X)$
Зона видимости устройства, находящегося в точке X, с учетом влияния препятствия под номером n	$f_n(C(X))$
Реальная зона видимости устройства, находящегося в точке X	$D(X)=\bigcap_{i=1}^{K} f_i(C(X))$

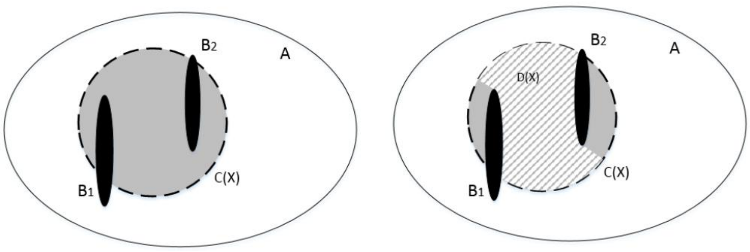

Рис. 1. Пример. Рабочая зона A, препятствия B_1 и B_2 и зона видимости $C(X)$ (слева). То же и реальная зона видимости $D(X)$ (справа)

Дискретизация задачи и алгоритм ее решения. Сведем задачу к дискретной.

Рабочая зона A представляется в виде сетки (некоего аналога расчетной сетки [20]) $L=\{l_i\}$ с шагом Δ.

Определяется сетка следующим образом:

- ♦ Элементом сетки являются точки в рассматриваемом пространстве.
- ♦ Для каждого элемента l_i на расстоянии Δ находится минимум один элемент l_j. Если таких элементов несколько, то расстояние между ними равно или 2Δ или $\sqrt{2}\Delta$ соответственно. На евклидовой плоскости это соответствует некоей структуре, состоящей из квадратов, вершинами которых являются элементы L.
- ♦ Нет такой точки пространства A, в Δ-окрестности которой (на расстоянии, не превышающем Δ) не находился бы хотя бы один элемент сетки L.

С точки зрения физики шаг Δ должен быть пренебрежимо малым по отношению к характерным размерам задачи.

Итак, после перехода к описанию рабочей зоны в виде сетки, начинается мышление в дискретных терминах. То есть, например, будем считать, что множество $D(l_i)$ – дискретное множество, состоящее из элементов L, принадлежащих непрерывному множеству, соответствующему непрерывному $D(l_i)$, описанному ранее.

Поскольку рабочая зона A ограничена и Δ – конечное число, можем считать, что задано конечное множество $L=\{l_1,l_2,\ldots,l_M\}$. Действительно, ограниченность множества A означает, что означает, что $\forall x\in A\ \ \exists M\in N\rightarrow \max\limits_{y\in A}(dist(x,y))\le M\Delta$, где N – множество натуральных чисел, $dist(x,y)$ – расстояние между элементами x и y. Соответственно, общее число элементов сетки не может превышать M^2 (при рассмотрении каждого элемента $x\in A$). Это очень грубая оценка, но она в полной мере подтверждает конечность множества L. Обозначим множество подмножеств L как $S=\{S_1,S_2,\ldots,S_p\}$. Здесь $S_i=D(l_i)$ для всех $l_i\in A\setminus B$. Таким образом, надо найти *покрытие* множества A – подмножество $S'\subseteq S$ такое, что:

$$\bigcup_{S_i'\in S'} S_i'=L.$$

Покрытие S' называется *минимальным*, если не существует покрытия $S''\subset S'$. Минимальных покрытий может быть несколько. Покрытие S' называется *наименьшим*, если для любого минимального покрытия S'' выполняется $|S'|\le|S''|$, где $|X|$ – мощность множества X. Оптимально искать наименьшее покрытие S'.

<u>Лемма 1.</u>

Условие

$$\bigcap_{S_i'\in S'} L\setminus S_i'=\varnothing$$

является необходимым и достаточным условием того, что S' – покрытие L.

Доказательство:

- ♦ Необходимость. Пусть S' – покрытие L. Следовательно, выполняется условие $\bigcup\limits_{S_i'\in S'} S_i'=L$. Предположим, что $\bigcap\limits_{S_i'\in S'} L\setminus S_i'=F$. Значит,

$L \setminus \left(\bigcap_{S_i' \in S'} L \setminus S_i' \right) = L \setminus F$. Однако, с другой стороны, $L \setminus \left(\bigcap_{S_i' \in S'} L \setminus S_i' \right) = \bigcup_{S_i' \in S'} S_i'$.

Значит, $\bigcup_{S_i' \in S'} S_i' = L \setminus F$, что может быть верно только в случае $F = \varnothing$. Что и требовалось доказать.

- Достаточность. $\bigcap_{S_i' \in S'} L \setminus S_i' = \varnothing$. Из этого следует, что $\bigcup_{S_i' \in S'} S_i' = L \setminus \left(\bigcap_{S_i' \in S'} L \setminus S_i' \right) = L \setminus \{\varnothing\} = L$, то есть S' – покрытие L. Что и требовалось доказать.

Лемма 2.

Покрытие S' минимально тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$\forall S_k' \in S' \to \bigcap_{S_i' \in L \setminus \{S_k'\}} L \setminus S_i' \neq \varnothing$$

является необходимым и достаточным условием того, что покрытие S' – минимальное покрытие L.

Доказательство:

- *Необходимость. Пусть S' – минимальное покрытие L. Предположим, что $\exists S_k' \in S' \to \bigcap_{S_i' \in L \setminus \{S_k'\}} L \setminus S_i' = \varnothing$. Тогда рассмотрим $S'' = S' \setminus \{S_k'\}$. Для этого множества выполняется $\bigcap_{S_i'' \in S''} L \setminus S_i'' = \varnothing$. Согласно лемме 1 это значит, что S'' – покрытие L. Но $S'' \subset S'$, а значит, S' не является минимальным покрытием L. Что и требовалось доказать.*
- *Достаточность. Предположим, что условие $\forall S_k' \in S' \to \bigcap_{S_i' \in L \setminus \{S_k'\}} L \setminus S_i' \neq \varnothing$ выполняется, но S' не является минимальным покрытием L. Значит, $\exists S'' \subset S'$, при этом S''– покрытие L. Тогда, согласно лемме 1, $\bigcap_{S_i'' \in S''} L \setminus S_i'' = \varnothing$. Однако из условия $\forall S_k' \in S' \to \bigcap_{S_i' \in L \setminus \{S_k'\}} L \setminus S_i' \neq \varnothing$ напрямую следует, что $\forall F \subset S' \to \bigcap_{F_i \in F} L \setminus S_i' \neq \varnothing$. Значит, S'' не может быть покрытием L, т.е., получаем противоречие. Что и требовалось доказать.*

Метод построения полного нагруженного графа.

Строим полный нагруженный граф $G = (V, E, L(V), L(E))$. В нем множеству вершин $V = \{v_i\}, i \in \{1,2,\ldots,p\}$ взаимно однозначно сопоставляется множество $L(V) = \{L(v_i)\}$, где $L(v_i) = L \setminus S_i$. Соответственно, число вершин равно мощности множества S. Каждая вершина v_i нагружена множеством $L(v_i)$.

Множеству ребер $E = \{e_{ij}\} = \{(v_i, v_j)\}$ сопоставляется множество $L(E) = \{L(e_{ij})\}$, где $L(e_{ij}) = L(v_i) \cap L(v_j), i \neq j$. Множество всех ребер, инцидентных вершине v_i будем обозначать E_i. Множество всех вершин, инцидентных ребрам из множества E_i, будем обозначать $V(E_i)$.

<u>Лемма 3.</u>

Минимальное по мощности подмножество $E_i' \subseteq E_i$ при выполнении условий

- $L(v_i) \neq \varnothing$;
- $\bigcap\limits_{x \in E_i'} L(x) = \varnothing.$

определяет минимальное покрытие S' множества L, однозначно соответствующее множеству $V(E_i') \setminus \{v_i\}$ вершин, если $\bigcap\limits_{x \in V(E_i') \setminus \{v_i\}} L(x) = \varnothing$ или множеству $V(E_i')$, если $\bigcap\limits_{x \in V(E_i') \setminus \{v_i\}} L(x) \neq \varnothing$.

Доказательство.

$L(v_i) \neq \varnothing$, *следовательно,* $\{S_i\}$ *не является покрытием множества* L.

Условие $\bigcap\limits_{x \in E_i'} L(x) = \varnothing$, *в силу того, что по определению* $L(e_{ij}) = L(v_i) \cap L(v_j), i \neq j$, *можно записать как* $\bigcap\limits_{x \in V(E_i')} L(x) = \varnothing$. *Значит, согласно лемме 1, множество* $\hat{S}$, *соответствующее* $V(E_i')$, *определяет покрытие множества* L.

Можно также утверждать, что при соблюдении условия $\bigcap\limits_{x \in V(E_i') \setminus \{v_i\}} L(x) = \varnothing$, *множество* $\tilde{S}$, *однозначно соответствующее* $V(E_i') \setminus \{v_i\}$, *определяет покрытие множества* L.

Установим теперь, являются ли эти покрытия минимальными. Исходя из предположения о том, что $E_i' \subseteq E_i$ *– минимальное по мощности подмножество, и рассматривая можно сделать вывод о возможности построения* E_i', *удовлетворяющим условию леммы 2 (при рассмотрении отдельно множеств* $\hat{S}$ *и* $\tilde{S}$ *с соблюдением соответствующих условий). Что и требовалось доказать.*

<u>Лемма 4.</u>

Минимальное по мощности подмножество $E_i' \subseteq E_i$ при выполнении условий

- $\left|L(e_{ij})\right| = \min\limits_{x \in E} \left|L(x)\right|$;
- $\forall v \in V \rightarrow L(v) \neq \varnothing$;
- $\bigcap\limits_{x \in E_i'} L(x) = \varnothing$.

определяет наименьшее покрытие S', однозначно соответствующее множеству $V(E_i) \setminus \{v_i\}$ вершин, если $\bigcap\limits_{x \in V(E_i) \setminus \{v_i\}} L(x) = \varnothing$ или множеству $V(E_i)$, если $\bigcap\limits_{x \in V(E_i) \setminus \{v_i\}} L(x) \neq \varnothing$.

Доказательство.

Поскольку $\forall v \in V \to L(v) \neq \varnothing$ *, тривиального решения не существует.*

$E_i' \subseteq E_i$ *выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие* $\bigcap\limits_{x \in E_i'} L(x) = \varnothing$ *. Значит, используя лемму 3, можно сделать вывод о том, каким образом определяется минимальное покрытие. Однако, учитывая условие* $\left|L(e_{ij})\right| = \min\limits_{x \in E}\left|L(x)\right|$ *, можно сделать вывод о том, что данное покрытие будет являться также наименьшим. Что и требовалось доказать.*

На основании всего вышесказанного, используя вышеуказанные леммы, в особенности лемму 4 можно выработать следующий алгоритм.

Алгоритм построения наименьшего покрытия множества L .

1. Имея множество L , задающее рабочую область, строим множество подмножеств $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_p\}$ где $S_i = D(l_i)$ для всех $l_i \in A \setminus B$.
2. Ставим в соответствие этим множествам множество $L(V^{(0)}) = \{L \setminus S_i\}$. Если один из элементов этого множества – пустое множество, делаем вывод о том, что существует тривиальное решение, алгоритм закончен. Иначе – переход к шагу 3.
3. Строим полный нагруженный граф $G^{(0)} = (V^{(0)}, E^{(0)}, L(V^{(0)}), L(E^{(0)}))$. О том, какие вершины и ребра какими множествами надо нагружать, можно прочитать в разделе «Метод построения полного нагруженного графа».
4. *Проверка существования покрытия.* Для произвольной вершины $v_i^{(0)}$ определяется подмножество $L(E_i^{(0)}) = \bigcap\limits_{x \in E_i^{(0)}} L(x)$. Если в результате получится непустое множество – делается вывод о том, что покрытия не существует, алгоритм закончен. В противном случае - переход к шагу 5.
5. $k \leftarrow 0$. Присвоение переменной k значения 0 .
6. В полном нагруженном графе $G^{(k)}$ осуществляется поиск ребра $e_{ij}^{(k)}$, для которого $\left|L(e_{ij}^{(k)})\right| = \min\limits_{x \in E^{(k)}}\left|L(x)\right|$. Если $\bigcap\limits_{j} L(e_{ij}^{(k)}) = \varnothing$, осуществляется переход к шагу 8, иначе – к шагу 7.
7. Строится полный нагруженный граф $G^{(k+1)} = (V^{(k+1)}, E^{(k+1)}, L(V^{(k+1)}), L(E^{(k+1)}))$ следующим образом:

- $V^{(k+1)} = V^{(k)} \setminus \{v_i^{(k)}\}$,
- $E^{(k+1)} = E^{(k)} \setminus E_i^{(k)}$,

  $L(v_t^{(k+1)}) = L(e_{it}^{(k)})$,

  $L(e_{tp}^{(k+1)}) = L(e_{it}^{(k)}) \cap L(e_{ip}^{(k)})$

  для всех $v_t^{(k+1)} \in V^{(k+1)}$, $e_{tp}^{(k+1)} \in E^{(k+1)}$.

  $k \leftarrow k+1$.
- Переход к шагу 6.

8. *Начало построения наименьшего покрытия.*
   ♦ $V = V(\{e_{ij}^{(k)}\}) = \{v_i^{(k)}, v_j^{(k)}\}$.
9. Если $k = 0$, осуществляется переход к шагу 12. В противном случае: $k \leftarrow k-1$, переход к шагу 10.
10. В графе $G^{(k)}$ определяется подмножество $L(V) = \bigcup_{x \in V} L(x)$.
11. Если в $G^{(k)}$ выполняется условие $L(V) \neq \varnothing$, то $V = V \cup \{v_i^{(k)}\}$. Переход к шагу 9.
12. Множество $S' = \{L \setminus L(v_t^{(o)}) : v_t^{(o)} \in V\}$ определяет наименьшее покрытие множества L.

Конец алгоритма

Лемма 5.

Трудоемкость алгоритма 1 оценивается как $O(p) = p^3 + p^2$.

Доказательство.

Вся вычислительная мощность реализуется при построении полного нагруженного графа. Число вершин графа совпадает с мощностью множества S *и равняется* p*, как уже было определено ранее. Для* p *вершин графа имеем* p *действий по вычислению нагрузки в вершинах и* $\frac{(p-1)p}{2}$ *действий для вычисления нагрузки ребер полного графа. Такие вычисления выполняются* $(p-2)$ *раза. Таким образом, грубая оценка* $O(p) = p^3 + p^2$.

Величина p зависит от соотношения между размерами множества $A \setminus B$ и величиной Δ.

Заключение. В настоящей работе представлен алгоритм нахождения наименьшего покрытия для некоего связного множества с препятствиями для задачи, которая не формулировалась ранее. Следует отметить, что рассматривалось покрытие всей зоны, независимо от препятствий. Приведенный алгоритм построения наименьшего покрытия (с учетом этой особенности рассмотрения задачи) может быть использован в задачах, в которых обнаружители физически расположены на разных «уровнях» с целью. Например, если обнаружителями являются наземные устройства, а целью – воздушные объекты (или наоборот). Задачи подобного рода могут возникать при построении систем мониторинга разного рода.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Enck W. et al.* TaintDroid: an information-flow tracking system for realtime privacy monitoring on smartphones // ACM Transactions on Computer Systems (TOCS). – 2014. – Vol. 32, No. 2. – P. 5.
2. *Moore J.W., Ramamoorthy S.* Heavy metals in natural waters: applied monitoring and impact assessment. – Springer Science & Business Media, 2012.
3. *Heyer R. et al. (ed.).* Measuring and monitoring biological diversity: standard methods for amphibians. – Smithsonian Institution, 2014.
4. *Liu Y. et al.* Mining frequent trajectory patterns for activity monitoring using radio frequency tag arrays // Parallel and Distributed Systems, IEEE Transactions on. – 2012. – Vol. 23, No. 11. – P. 2138-2149.
5. *Крысин Л.П.* Толковый словарь иноязычных слов. – М.: Эксмо, 2008. – 944 с.
6. *Израэль Ю.А* Глобальная система наблюдений. Прогноз и оценка окружающей природной среды. Основы мониторинга // Метеорология и гидрология. – 1974. – № 7. – С. 3-8.
7. *Кондратьев А.Д., Королева Т.В., Пузанов А.В., Черницова О.В., Ефременков А.А., Шарапова А.В., Горбачев И.В., Двуреченская Е.Б.* Совершенствование системы экологического мониторинга районов падения отделяющихся частей ракет-носителей // МНКО. – 2012. – № 6 (37).

8. *Кульба В.В., Сомов Д.С., Кочкаров А.А.* Применение структурно-интегрированных индикаторов в мониторинге сложных технических систем // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 3 (116). – С. 52-64.
9. *Chen X. et al.* Aircraft detection by deep belief nets //Pattern Recognition (ACPR), 2013 2nd IAPR Asian Conference on. – IEEE, 2013. – P. 54-58.
10. *Hailong L.* Study on the dust particles parameter with rocket detection in Earth's mesopause // Antennas, Propagation & EM Theory (ISAPE), 2012 10th International Symposium on. – IEEE, 2012. – P. 1026-1028.
11. *Lobell D.B. et al.* Satellite detection of earlier wheat sowing in India and implications for yield trends //Agricultural Systems. – 2013. – Vol. 115. – P. 137-143.
12. *Held D., Levinson J., Thrun S.* A probabilistic framework for car detection in images using context and scale // Robotics and Automation (ICRA), 2012 IEEE International Conference on. – IEEE, 2012. – С. 1628-1634.
13. *Hlawatsch F.* Time-frequency analysis and synthesis of linear signal spaces: time-frequency filters, signal detection and estimation, and Range-Doppler estimation. – Springer Science & Business Media, 2013. – Vol. 440.
14. *Ramírez D. et al.* Detection of rank-signals in cognitive radio networks with uncalibrated multiple antennas // Signal Processing, IEEE Transactions on. – 2011. – Vol. 59, No. 8. – P. 3764-3774.
15. *Yang X. et al.* Blind detection for primary user based on the sample covariance matrix in cognitive radio //Communications Letters, IEEE. – 2011. – Vol. 15, No. 1. – P. 40-42.
16. *Hu D., Ronhovde P., Nussinov Z.* Phase transitions in random Potts systems and the community detection problem: spin-glass type and dynamic perspectives // Philosophical Magazine. – 2012. – Vol. 92, No. 4. – P. 406-445.
17. *Ventresca M.* Global search algorithms using a combinatorial unranking-based problem representation for the critical node detection problem //Computers & Operations Research. – 2012. – Vol. 39, No. 11. – P. 2763-2775.
18. *Fan C. M. et al.* Numerical solutions of boundary detection problems using modified collocation Trefftz method and exponentially convergent scalar homotopy algorithm // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2012. – Vol. 36, No. 1. – P. 2-8.
19. *Яцкин Д.В.* Самоорганизация и командно-информационное взаимодействие абонентов в децентрализованных сетевых системах // Материалы семнадцатого научно-практического семинара “Новые информационные технологии в автоматизированных системах”, Москва, 2014.
20. *Thompson Joe F., Warsi Z.A., Mastin C.,* Numerical Grid Generation, Foundations and Applications. – Amsterdam: North-Holland, 1985.

REFERENCES

1. *Enck W. et al.* TaintDroid: an information-flow tracking system for realtime privacy monitoring on smartphones, *ACM Transactions on Computer Systems (TOCS*), 2014, Vol. 32, No. 2, pp. 5.
2. *Moore J.W., Ramamoorthy S.* Heavy metals in natural waters: applied monitoring and impact assessment. Springer Science & Business Media, 2012.
3. *Heyer R. et al. (ed.).* Measuring and monitoring biological diversity: standard methods for amphibians. Smithsonian Institution, 2014.
4. *Liu Y. et al.* Mining frequent trajectory patterns for activity monitoring using radio frequency tag arrays, *Parallel and Distributed Systems, IEEE Transactions on,* 2012, Vol. 23, No. 11, pp. 2138-2149.
5. *Krysin L.P.* Tolkovyy slovar' inoyazychnykh slov [Explanatory dictionary of foreign words]. Moscow: Eksmo, 2008, 944 p.
6. *Izrael' Yu.A.* Global'naya sistema nablyudeniy. Prognoz i otsenka okruzhayushchey prirodnoy sredy. Osnovy monitoringa [The global observing system. Forecast and assessment of the natural environment. Monitoring framework], *Meteorologiya i gidrologiya* [Meteorology and Hydrology], 1974, No. 7, pp. 3-8.
7. *Kondrat'ev A.D., Koroleva T.V., Puzanov A.V., Chernitsova O.V., Efremenkov A.A., Sharapova A.V., Gorbachev I.V., Dvurechenskaya E.B.* Sovershenstvovanie sistemy ekologicheskogo monitoringa rayonov padeniya otdelyayushchikhsya chastey raket-nositeley [Improvment of environmental monitoring in areas of falling of detachable parts of carrier rockets], *MNKO* [The world of science, culture, education], 2012, No. 6 (37).

8. *Kul'ba V.V., Somov D.S., Kochkarov A.A.* Primenenie strukturno-integrirovannykh indikatorov v monitoringe slozhnykh tekhnicheskikh sistem [The use of structure-integrated indicators in complex technical systems monitoring], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2011, No. 3 (116), pp. 52-64.
9. *Chen X. et al.* Aircraft detection by deep belief nets,*Pattern Recognition (ACPR), 2013 2nd IAPR Asian Conference on*. IEEE, 2013, pp. 54-58.
10. *Hailong L.* Study on the dust particles parameter with rocket detection in Earth's mesopause, *Antennas, Propagation & EM Theory (ISAPE), 2012 10th International Symposium on*. IEEE, 2012, pp. 1026-1028.
11. *Lobell D.B. et al.* Satellite detection of earlier wheat sowing in India and implications for yield trends, *Agricultural Systems*, 2013, Vol. 115, pp. 137-143.
12. *Held D., Levinson J., Thrun S.* A probabilistic framework for car detection in images using context and scale, *Robotics and Automation (ICRA), 2012 IEEE International Conference on*. IEEE, 2012, pp. 1628-1634.
13. *Hlawatsch F.* Time-frequency analysis and synthesis of linear signal spaces: time-frequency filters, signal detection and estimation, and Range-Doppler estimation. Springer Science & Business Media, 2013, Vol. 440.
14. *Ramírez D. et al.* Detection of rank-signals in cognitive radio networks with uncalibrated multiple antennas, *Signal Processing, IEEE Transactions on,* 2011, Vol. 59, No. 8, pp. 3764-3774.
15. *Yang X. et al.* Blind detection for primary user based on the sample covariance matrix in cognitive radio, *Communications Letters, IEEE,* 2011, Vol. 15, No. 1, pp. 40-42.
16. *Hu D., Ronhovde P., Nussinov Z.* Phase transitions in random Potts systems and the community detection problem: spin-glass type and dynamic perspectives, *Philosophical Magazine,* 2012, Vol. 92, No. 4, pp. 406-445.
17. *Ventresca M.* Global search algorithms using a combinatorial unranking-based problem representation for the critical node detection problem, *Computers & Operations Research,* 2012, Vol. 39, No. 11, pp. 2763-2775.
18. *Fan C. M. et al.* Numerical solutions of boundary detection problems using modified collocation Trefftz method and exponentially convergent scalar homotopy algorithm, *Engineering Analysis with Boundary Elements,* 2012, Vol. 36, No. 1, pp. 2-8.
19. *Yatskin D.V.* Samoorganizatsiya i komandno-informatsionnoe vzaimodeystvie abonentov v detsentralizovannykh setevykh sistemakh [Self-organization and team-communication subscribers in a decentralized network systems], *Materialy semnadtsatogo nauchno-prakticheskogo seminara "Novye informatsionnye tekhnologii v avtomatizirovannykh sistemakh", Moskva, 2014* [Proceedings of the seventeenth scientific-practical seminar "New information technologies in automated systems", Moscow, 2014].

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н. А.О. Жуков.

Кочкаров Азрет Ахматович – Финансовый университет при Правительстве РФ; e-mail: akochkar@gmail.com; 127083, Москва, ул. 8 Марта, д. 10, стр. 1; тел.: 84957880007, доб. 3689; ОАО «РТИ», заместитель директора НТЦ-3; кафедра прикладной математики; ф.-м.н.; доцент.

Яцкин Данил Владиленович – ОАО «РТИ»; e-mail: danil@frtk.com; 127083, Москва, ул. 8 Марта, 10, стр. 1; тел.: 84957880007, доб. 3566; студент МФТИ(ГУ); специалист НТЦ-3.

Рахманов Олег Александрович – ОАО «Ростелеком»; e-mail: ra-oleg@yandex.ru; 125047, Москва, ул. 1-я Тверская-Ямская, 14; руководитель проектов.

Kochkarov Azret Akhmatovich – Applied Mathematics Department of the Financial University under the Government of the Russian Federation; e-mail: akochkar@gmail.com; Moscow, 127083, 8 Marta street, 10, bild. 1; phone: +74957880007, ad. 3689; JSC "RTI", vice-chief of R&D centre; associate professor.

Yatskin Danil Vladilenovich – JSC "RTI"; e-mail: danil@frtk.com; Moscow, 127083, 8 Marta street, 10, bild. 1; phone: +74957880007, ad. 3566; specialist R&D centre; student of MIPT.

Rahmanov Oleg Alexandrovich – OJSC «Rostelecom»; e-mail: ra-oleg@yandex.ru; 125047, Moscow, 1-ya Tverskaya-Yamskaya street, 14; project manager.