УДК 519.1

А.М. Кочкаров, А.Н. Кочкарова, Л.Х. Хапаева

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ СТРУКТУР ПРОСТЕЙШИМИ ПРЕДФРАКТАЛЬНЫМИ ГРАФАМИ*

Развитие структур в самоорганизующихся системах происходит на основе определенных принципов. Одним из таких фундаментальных принципов является фрактальность развития. Применительно к графам этот принцип реализуется алгоритмом, приводящим к построению последовательности предфрактальных графов. Суть этого процесса состоит в замене вершины графа (его первичного элемента) новой структурой (графом) по определенным правилам. В работе исследована свойство простейших предфрактальных графов, которые в дальнейшем назовем простейшими предфрактальными деревьями (ППД), также представлен алгоритм работы в ППД: «с каждым этапом замены вершины затравкой (ЗВЗ) все вершины предшествующего предфрактального дерева обновляются, а их количество удваивается. В то же время, множество ребер с каждым этапом ЗВЗ «накапливается», ребро первого ранга дополняется двумя ребрами второго, затем четырьмя ребрами третьего и так далее». Доказаны задачи: 1) в простейших предфрактальных деревьях все ребра инцидентные одной и той же вершине являются ребрами разных рангов; 2) если дерево имеет совершенное парасочетание, то оно единственно; 3) множество ребер L-го ранга простейшего предфрактального дерева TG_L образуют реберное покрытие этого дерева являющееся совершенным парасочетанием; 4) что любому простейшему предфрактальному дереву соответствует единственная траектория. Таким образом доказана теорема, что при рассмотренном перечислении не возникает изоморфных корневых деревьев. Изоморфизм при таком подходе исключен так как во-первых разбиение корневого дерева по ребру равновесия приводит к двум компонентам изоморфно не сопоставимыми,так как одна из них содержит корень первоначального дерева, и во-вторых исключается симметрия относительно вершин к которым присоединяется конфигурация.

Затравка; простейшие предфрактальные деревья; парасочетание; конфигурация.

A.M. Kochkarov, A.N. Kochkarova, L.H. Khapaeva

MODELING FRACTAL STRUCTURES GROWTH BY MEANS SIMPLEST PREFRACTAL GRAPHS

Development of structures happens in the self-organized systems on the basis of certain principles. One of such fundamental principles is fractality of development. In relation to graphs this principle is realized by the algorithm leading to creation of sequence of prefractal graphs. The essence of this process consists in replacement of node of the graphs (of its primary element) with new structure (graphs) by certain rules. This work investigates properties of the elementary prefractal graphs (further called the elementary prefractal trees EPT), and the algorithm in EPT: "with each stage of the replacement of node with a priming (RNP) all nodes of the previous prefractal tree are updated, and their quantity doubles. At the same time, the set of edges with each stage of RNP "accumulates ", the edge of the first rank is supplemented with two edges of the second, then four edges of the third and so on". Proved results: 1) in the elementary prefractal trees all edges incidental to the same node are edges of different ranks; 2) if the tree has a perfect paracombination, then it unique; 3) set of edges of the L rank of the elementary prefractal tree of TG_L forms the edge covering of this tree that is a perfect paracombination; 4) a unique trajectory corresponds to and elementary prefractal tree. Thus the theorem is proved that at the considered transfer there are no isomorphic root trees. Isomorphism at such approach is excluded, because first, splitting a root tree on an edge of balance leads to two components isomorphically not comparable as one of them contains a root of an initial tree, and secondly symmetry which regard nodes that the configuration joins is excluded.

Priming; the elementary prefractal trees; paracombination; configuration.

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16–07–00231а.

Введение. *Фрактальные и предфрактальные графы*

Напомним, что для определения фрактального (предфрактального) графа необходимо ввести следующие понятия:

1. *Затравка* – любой связный граф, обозначаемый $H = (W, Q)$.[1–5]
2. Операцию замены вершины затравкой (ЗВЗ), суть которой состоит в следующем: в данном графе $G = (V, E)$намеченная вершина$v \in V$заменяется графом – затравкой $H = (W, Q)$, при этом каждое инцидентное вершине v ребро соединяется с одной из вершин затравки H. Это происходит произвольно (случайным образом) или по определенному правилу.

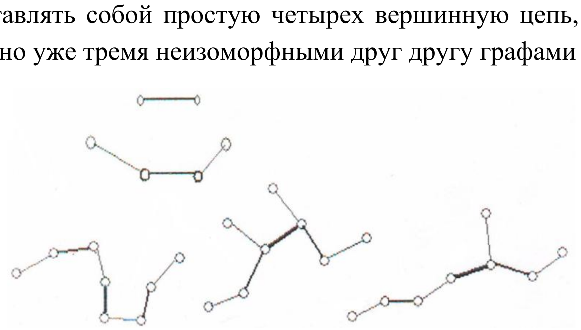
Предфрактальный граф будем обозначать$G_L = (V_L, E_L)$, где V_L – множество вершин графа, а E_L – множество его ребер. Предфрактальный граф определим рекуррентно, поэтапно, заменяя каждый раз в построенном на предыдущем этапе $l = 1,2, \ldots, L-1$ графе $G_l = (V_l, E_l)$каждую его вершину затравкой$H = (W, Q)$. На этапе $l = 1$предфрактальному графу соответствует сама затравка $G_1 = H$. О данном процессе говорят, что предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ порожден затравкой $H = (W, Q)$. Процесс порождения предфрактального графа G_L, по существу, есть процесс построения последовательности предфрактальных графов$G_1, G_{2,\ldots,} G_l, \ldots, G_L$, называемой *траекторией* [6]. Фрактальный граф $G = (V, E)$, порожденный затравкой $H = (W, Q)$, определяется бесконечной траекторией.

Для предфрактального графа G_L ребра, появившимся на l-м, $l \in \{1,2, \ldots, L\}$, этапе порождения, будем называть ребрами ранга l.

Обобщением описанного процесса порождения предфрактального графа G_L является такой случай, когда вместо единственной затравки Hиспользуется множество затравок $\{H_i\}$, где $i = 1,2, \ldots, m$ $(m \geq 2)$. Суть этого обобщения состоит в том, что при переходе от графа G_{l-1} к графу G_lкаждая вершина замещается некоторой затравкой H_i из этого множества, которая выбирается случайно или согласно определенному правилу, отражающему специфику моделируемого процесса или структуры.

Определение простейших предфрактальных графов

Рассмотрим модель развития структур происходящих на основе алгоритма замены вершины затравкой (ЗВЗ), когда предфрактальные графы порождены **простейшей** затравкой $H = (W, Q)$ [7], представляющие собой простейшее двухвершинное дерево (более простого связанного графа имеющего одно ребро не существует). Очевидно, что $|W| = 2, |Q| = 1$ (). Обозначим эту затравку H_1. Предфрактальные графы, образованныепо правилам ЗВЗ и порождаемые данной затравкой назовем **простейшими** и будем обозначатьTG_L. При это, в соответствии с определением предфрактальных графов $TG_1 = H_1$. Далее, TG_2 – будет представлять собой простую четырех вершинную цепь, TG_3 – может быть представлено уже тремя неизоморфными друг другу графами (рис. 1)



TG_1

TG_2

TG_3

Рис. 1. Простая вершинная цепь

На рисунке ребра первого ранга на всех графах выделены наиболее жирной линией, второго ранга – менее жирной и третьего – тонкой.

Постановка задачи и свойства простейших предфрактальных графов

Лемма 1. Любой простейший предфрактальный граф TG_L, является деревом с числом вершин равным 2^L и числом ребер равным $2^L - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при каждом этапе ЗВЗ количество вершин удваивается, то $|V_L| = 2|V_{L-1}|$. При этом $|V_1| = 2$отсюда по индукции получим $|V_L| = 2^L$.

В соответствии с процедурой ЗВЗ для простейших предфрактальных графов число ребер будет равно

$$|E_L| = |E_{L-1}| + |V_{L-1}|.$$

Рекуррентно применяя, полученное соотношение, имеем

$$\left|E_L = \sum_{i=1}^{L} 2^{i-1}\right| = 2^L - 1.$$

И, наконец, теперь очевидно, что любой простейший предфрактальный граф является деревом как связный граф, у которого число ребер на единицу меньше числа вершин.

В дальнейшем, простейшие предфрактальные графы TG_Lбудем называть простейшими предфрактальными деревьями (ППД).

Обратим внимание на то, что в ППД с каждым этапом ЗВЗ все вершины предшествующего предфрактального дерева обновляются, а их количество удваивается. В то же время, множество ребер с каждым этапом ЗВЗ «накапливается»: ребро первого ранга дополняется двумя ребрами второго, затем четырьмя ребрами третьего и т.д. в соответствии с леммой 1.

Лемма 2. Число m висячих вершин в простейших предфрактальных деревьях удовлетворяет соотношению

$$2 \leq m \leq 2^{L-1} (L \geq 2),$$

при $L = 1$. $m = 2$ (граф H_1).

Доказательство. При$L = 1$ ППД $TG_1 = H_1$. Такой граф имеет две вершины и обе висячие (m=2).

Рассмотрим простейшее предфрактальное дерево $TG_L (L \geq 2)$.Ему предшествует ППД TG_{L-1}с числом вершин $|V_{L-1}| = 2^{L-1}$.Каждая из этих вершин в соответствии с операцией ЗВЗ заменяется парой вершин составляющих в последствии множество вершин V_Lдерево TG_L, но очевидно только одна вершина из каждой пары может стать висячей. Следовательно, число висячих вершин $m \leq 2^{L-1}$. С другой стороны т.к. любое нетривиальное дерево содержит как минимум две висячие вершины, окончательно имеем

$$2 \leq m \leq 2^{L-1} \ (L \geq 2).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. В простейших предфрактальных деревьях все ребра инцидентные одной и той же вершине являются ребрами разных рангов.

Доказательство. Рассмотрим фрагмент ППД TG_{L-1}, состоящий из некоторой вершины $v \in V_{L-1}$инцидентных ей ребер. В процессе применения процедуры ЗВЗ, в полученном ППД TG_L возникает только одно ребро $L-$го ранга инцидентное «новым» вершинам $v_1 \in V_L, v_2 \in V_L$(все остальные ребра являются более старым). Это происходит на любом этапе применения процедуры ЗВЗ. Поэтому все ребра инцидентные одной и той же вершине в ППД TG_L являются ребрами разных рангов.

Следствие 1. В простейших предфрактальных деревьях не существует смежных ребер одного ранга.

Из определения смежности двух ребер следует их инцидентность некоторой вершине, а, следовательно, по лемме 3 эти ребра являются ребрами разных рангов.

Следствие 2. Степень любой вершины простейшего предфрактального дерева TG_L не превосходит L.

Степень любой вершины равна числу ребер инцидентных данной вершине. В ППД TG_Lчисло различных рангов его ребер совпадает с L, и следовательно если степень некоторой вершины превосходит L, то среди ребер инцидентных этой вершине будут обязательно ребра одного ранга, что противоречит лемме 3.

Теорема 1. Диаметр и радиус простейшего предфрактального дерева TG_L удовлетворяют соотношениям:

$$2L-1 \le D(TG_L) \le 2^L-1, \quad L \le r(TG_L) \le 2^{L-1}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное ППД TG_L. Пусть ему предшествует ППД TG_{L-1} с диаметром $D(TG_{L-1}) = p$. Этому значению диаметра соответствует самая длинная простая цепь в TG_{L-1}, содержащая $p+1$-вершин. При применении процедуры ЗВЗ приводящей к ППД TG_L эта цепь «максимально» может увеличиться на $p+1$- ребро и в результате самая длинная цепь в ППД TG_L может содержать максимально $2p+1$ – ребро. Отсюда имеем ряд «максимальных» диаметров для TG_L: $(1,3,7,\dots,2^L-1)$.Та же цепь «минимально» может увеличиться на два ребра, которые добавятся в любом случае на концах цепи при применении процедуры ЗВЗ. Следовательно, самая длинная (минимально возможная) цепь в ППД TG_L будет иметь длину $p+2$. Отсюда имеем ряд минимальных диаметров для TG_L: $(1,3,5,\dots,2L-1)$. Учитывая нечетность обоих оценок и общую зависимость между радиусом и диаметром произвольного дерева

$$\frac{D}{2} \le r \le \frac{D+1}{2},$$

окончательно получим

$$2L-1 \le D(TG_L) \le 2^L-1,$$
$$L \le r(TG_L) \le 2^{L-1}$$

Теорема доказана.

Перейдем к свойствам простейших предфрактальных деревьев связанных с одним из важнейших понятий в теории графов – понятие парасочетаний.

Определение 1. *Произвольное подмножество попарно несмежных ребер графа называют парасочетанием (или независимым множеством ребер)* [8–10].

Определение 2. *Совершенным парасочетанием графа называют парасочетание, являющееся реберным покрытием данного графа [11–12].*

Из второго определения следует, что множество вершин инцидентных ребрам составляющим совершенное парасочетание графа совпадает с множеством всех вершин этого графа.

Лемма 4. Если дерево имеет совершенное парасочетание, то оно единственно.

Доказательство. Пусть дерево имеет совершенное парасочетание. Тогда в это парасочетание входят все ребра инцидентные висячим вершинам. Удаление этих ребер из дерева вместо с инцидентными им вершинами приводит к лесу каждая из компонент, которого имеет совершенное парасочетание. Выделим ребра инцидентные висячим вершинам уже в каждой из образовавшихся компонент. Произведем удаление этих ребер. Продолжая этот процесс, мы однозначно переберем все ребра образующие совершенное парасочетание исходного дерева. Из этой однозначности следует единственность множества ребер образующих совершенное парасочетание.

Лемма 5. Множество ребер L-го ранга простейшего предфрактального дерева TG_Lобразуют реберное покрытие этого дерева являющееся совершенным парасочетанием.

Доказательство. Очевидно, в силу построения ППД TG_Lлюбая вершина этого дерева инцидентна некоторому ребру L-го ранга. Следовательно, ребра TG_Lобразуют реберное покрытие дерева TG_L. С другой стороны никакие два ребра L-го ранга не могут быть смежны в силу леммы 3. Из этих двух фактов согласно определению 2 следует, что множество ребер L-го ранга является совершенным парасочетанием.

Лемма доказана.

При этом в силу леммы 4 другого совершенного парасочетания в TG_Lне существует.

Определим операцию **свертки** $2k -$ вершинного дерева, имеющего совершенное парасочетание [13–16]. Каждое ребро совершенного парасочетания вместе с инцидентными ему вершинами принимается за новую вершину, а оставшиеся ребра будут новыми ребрами $k -$ вершинного дерева. Получаем дерево, соответствующее первому этапу свертки. Аналогично можно произвести второй этап, если новое дерево также имеет совершенное парасочетание.

Теорема 2. $2^L -$ вершинное дерево является простейшим предфрактальным деревом TG_L тогда и только тогда, когда оно имеет совершенное парасочетание на любом этапе свертки.

Доказательство. Из введенной процедуры свертки дерева имеющего совершенное парасочетание понятно, что если $2^L -$ вершинное дерево является ППД TG_L, то оно имеет совершенное парасочетание на любом этапе свертки. С другой стороны если $2^L -$вершинное дерево имеет совершенное парасочетание на любом этапе свертки, то за $L - 1$этапов свертки получим двухвершинное дерево совпадающее с H_1или, что тоже самое TG_1. Очевидно, что его предшественникам в процедуре свертки было ППД TG_2 и т.д. Продолжая рассматривать этапы свертки в обратном порядке т.е. фактически применяя процедуру ЗВЗ мы тем самым пройдем по всей траектории приводящей через $L - 1$ этапов к $2^L -$ вершинному дереву, являющемся ППД TG_L.

Теорема доказана.

Фактически, процедура свертки с помощью совершенного парасочетания является обратной к процедуре замены вершин затравкой H_1 [17].

В результате ее применения, граф TG_l переходит в граф TG_{l-1}.

Лемма 6. В простейших предфрактальных деревьях все ветви к одной и той же вершине имеют разные веса.

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Пусть ППД TG_Lсуществуют две ветви к одной и той же вершине имеющей одинаковый вес, т.е. содержащие одинаковое количество вершин k. Ни одно из двух ребер, соединяющих эти ветви с инцидентной им вершиной u, не может входить в совершенное парасочетание дерева TG_L. Так как в этом случае, либо – в одной ветви, либо- в другой возникло нечетное количество вершин, подлежащее реберному покрытию совершенного парасочетания. После проведения первого этапа свертки вновь образованное дерево TG_{L-1} будет снова иметь ветви соответствующие этим двум смежным ребрам с одинаковым количеством вершин $\frac{k}{2}$. И вновь эти ребра не могут входить в реберные покрытия совершенного парасочетания графа TG_{L-1}. В результате на некотором этапе свертки дерево TG_Lчисло вершин в этих ветвях станет нечетным или они превратятся в висячие. И то – и другое противоречит теореме 2.

Следствие 1. Любая вершина в ППД TG_Lможет иметь только одну смежную ей висячую вершину.

Следствие 2. В ППД TG_Lне существует двух разных ветвей к одной вершине с одинаковым весом.

Теорема 3. Любому простейшему предфрактальному дереву TG_L соответствует единственная траектория $TG_1, TG_2, \dots, TG_{L-1}$.

Доказательство. Как было показано выше (теорема 2) для данного ППД TG_L мы можем однозначно указать предшествующее ему по процедуре ЗВЗ ППД TG_{L-1}. При этом ППД TG_{L-1} получается при проведении процедуры свертки совершенного парасочетания ППД TG_L. Продолжая процедуру свертки мы восстанавливаем траекторию простейших предфрактальных деревьев предшествующих ППД TG_Lв обратном порядке, получая тем самым единственную последовательность простейших предфрактальных деревьев $TG_{L-1}, TG_{L-2}, \dots, TG_1$. Размещая полученную последовательность снова меняя порядок на обратный получаем траекторию ППДTG_L.

Теорема доказана.

Иллюстрацией данной теоремы служит корневое дерево, в котором вершинами являются простейшие предфрактальные деревья (рис. 2) [18]. Любая цепь такого дерева от корня до листа (висячая вершина) моделирует единственную траекторию, ведущую к данномуTG_L.

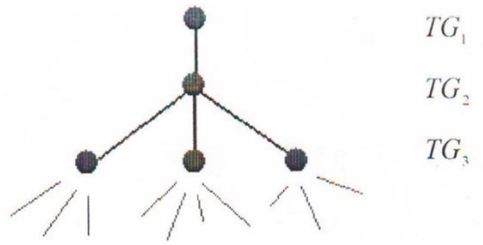


Рис. 2. Корневое дерево

Равновесность простейших предфрактальных деревьев. Одним из определяющих свойств простейших предфрактальных деревьев является их равновесность. Это свойство позволяет продуктивно подойти в дальнейшем к вопросу перечисления ППД и получению производящей функции этих деревьев.

Лемма 7. Любое простейшее предфрактального дерево TG_L является равновесным.

Доказательство. Рассмотрим произвольное ППД TG_L. Операция разбиения этого дерева по единственному в нем ребру первого ранга (фактически сводящаяся к удалению этого ребра) разбивает данное дерево на два поддерева, каждое из которых содержит 2^{L-1}вершин. Этот факт и является доказательством равновесности TG_L.

Обозначим $\{TG_L\}$-множество всех 2^L- вершинных деревьев, которые могут быть получены заLэтапов ЗВЗ из затравки H_1, т.е. $\{TG_L\}$-множество всех простейших предфрактальных деревьев-го ранга.

Теорема 4. Для любого $TG_L \in \{TG_L\}$ разбиения по ребру первого ранга (равновесия) приводит к лесу, состоящему из двух компонент, каждая из которых принадлежит множеству $\{TG_{L-1}\}$, т.е. являющихся ППД.

Доказательство. Из доказанной выше леммы 7 любое TG_L допускает равновесное разбиение по ребру первого ранга. Докажем, что компоненты этого разбиения в свою очередь являются ППД из множества $\{TG_{L-1}\}$. Обратим внимание, что процедуру ЗВЗ можно было бы начинать с нулевого шага, приняв за H_0 одну единственную вершину. На первом шаге эта вершина заменяется на H_1. Далее, процедура ЗВЗ происходит в соответствии с п. 2. За L этапов и будет получено ППД TG_L. Применительно к нашему случаю удаление ребра первого ранга приводит к двум компонентам, каждая из которых, фактически получена процедурой

ЗВЗ за $L-1$ этапов из соответствующей вершины затравки H_1, и, следовательно, каждая компонента связности является ППД ранга $L-1$, т.е. принадлежит множеству $\{TG_{L-1}\}$.

Теорема доказана.

Следует обратить внимание, что полученные таким образом, два ППД из множества $\{TG_{L-1}\}$, не обязаны совпадать с деревом TG_{L-1}, предшествующемTG_L в его траектории.

Применив процедуру разбиения по равновесному ребру в свою очередь каждый из двух компонент образовавшегося леса (что будет соответствовать удалению из первоначального дерева TG_L ребер первого и второго ранга), получим лес, состоящий из четырех компонент, каждая из которых принадлежит множеству $\{TG_{L-2}\}$ и т.д. После $L-1$этапа такой операции мы получим 2^{L-1} компонентный лес. При этом каждая из компонент будет представлена двухвершинным деревом с ребром L-го ранга. Заметим, что множество этих компонент составляют совершенное парасочетание первоначального ППД TG_L.

Лемма 8. Объединением двух простейших предфрактальных деревьев принадлежащих множеству $\{TG_L\}$ является простейшее предфрактальное дерево из множества $\{TG_{L+1}\}$.

Доказательство. Произведем объединение двух равновершинных ППД дополнительным ребром, соединяющим какую-либо вершину первого дерева с некоторой вершиной второго. Полученное дерево будет являться также простейшим предфрактальным деревом следующего ранга. Это видно из того, что если мы объявим дополнительное ребро – ребром первого ранга. А ребрам первого ранга в первоначальных деревьях присвоим ранг два и т.д. Тогда каждое из двух деревьев можно считать полученным процедурой ЗВЗ за $L+1$этапов из одной вершины затравки H_1.

Лемма доказана.

Теорема 5. (свойство сквозного равновесия). 2^L – вершинное равновесное дерево является TG_L тогда и только тогда, когда на любом этапе равновесного разбиения образуются равновесные компоненты.

Доказательство. Применение теоремы 4 рекуррентно, т.е. поэтапно, доказывает тот факт, что на любом этапе равновесного разбиения простейшего предфрактального дерева образуются компоненты, являющиеся в свою очередь ППД. Обратно, пусть дерево допускает равновесное разбиение на любом этапе. Отсюда следует, что, применив такое разбиение Lраз, как мы уже отмечали выше, получим лес из 2^{L-1}компонент, каждая из которых, представляет собой H_1, т.е. в частности являются деревьями TG_1. По лемме 8 предшествующие им деревья также являются ППД и принадлежат множеству $\{TG_2\}$. Из той же леммы, что на любом этапе объединения получаются простейшие предфрактальные деревья.

Теорема доказана.

Перечисление простейших предфрактальных деревьев. Вопрос о перечислении изоморфно различных простейших предфрактальных деревьев традиционно начнем с перечисления корневых деревьев при этом также являющихся ППД. При этом мы будем опираться на тот факт, что такое перечисление эквивалентно перечислению деревьев обладающих свойством сквозного равновесия.

Пусть $n=2^L$ – число вершин, рассматриваемых деревьев. Поставим вопрос, сколько существует изоморфно различных корневых деревьев с таким количеством вершин, принадлежащих при этом множеству $\{TG_L\}$. Чтобы ответить на этот вопрос, нам потребуется **процедура наращивания деревьев**, являющая обратной к процедуре равновесного разбиения [19–20]. В соответствии с этой процедурой мы будем строить (наращивать) деревья так, чтобы на любом этапе они оставались равновесными.

Введем данное построение рекуррентно. При этом будем обозначать $T_{f.2^L}$ – число изоморфно различных корневых деревьев, получающихся на этапе рассматриваемой процедуры.

При $L = 1$ $(n = 2) T_{f,2} = 1$.

Введем понятие *конфигурации*–коренное дерево с лишним (прерванным) ребром [21–22]. Двойной кружок означает корень дерева, а прерванное ребро– «свободное» ребро следующего присоединения. Это ребро в дереве следующего этапа становится ребром равновесия. На следующем этапе у нас существуют две возможности присоединения данной конфигурации к такому же коренному дереву (рис. 3). Первая – присоединение к коренной вершине, и вторая – присоединение к оставшейся вершине. Имеем:

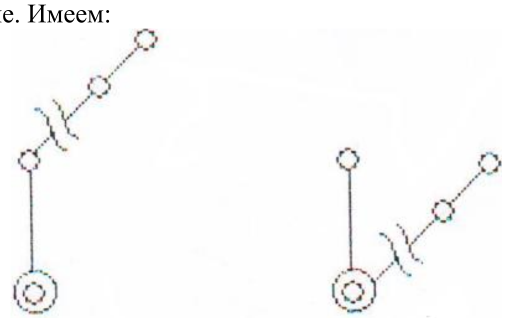


Рис. 3. Присоединение конфигурации к коренному дереву

Таким образом, при$L = 2$ $(n = 4) T_{f,2^2} = 2$.

На следующем этапе построения соответствующему $L = 3$ мы имеем две различных конфигурации, которые можно присоединять «свободным» ребром корневой вершины к каждой из четырех вершин каждого из полученных двух деревьев. Отметим, что «свободное» ребро впоследствии становится ребром равновесия нового дерева.

Итак, при $L = 3$ $(n = 8)$ число вариантов различных корневых деревьев $T_{f,2^3}$ будет равно произведению числа вершин корневого дерева соответствующего $L = 2$ $(n = 4)$на число различных корневых деревьев$T_{f,2^2}$ в квадрате. То есть $T_{f,2^3} = 2^2 T_{f,2^2} \cdot T_{f,2^2} = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Все шестнадцать различных восьмивершинных корневых деревьев, являющихся при этом ППД изображены на рис. 4.

Продолжая предшествующие рассуждения и учитывая, что число конфигураций совпадает с числом различных корневых деревьев предшествующего этапа, получаем рекуррентную формулу

$$T_{f,2^L} = 2^{L-1} (T_{f,2^{L-1}})^2.$$

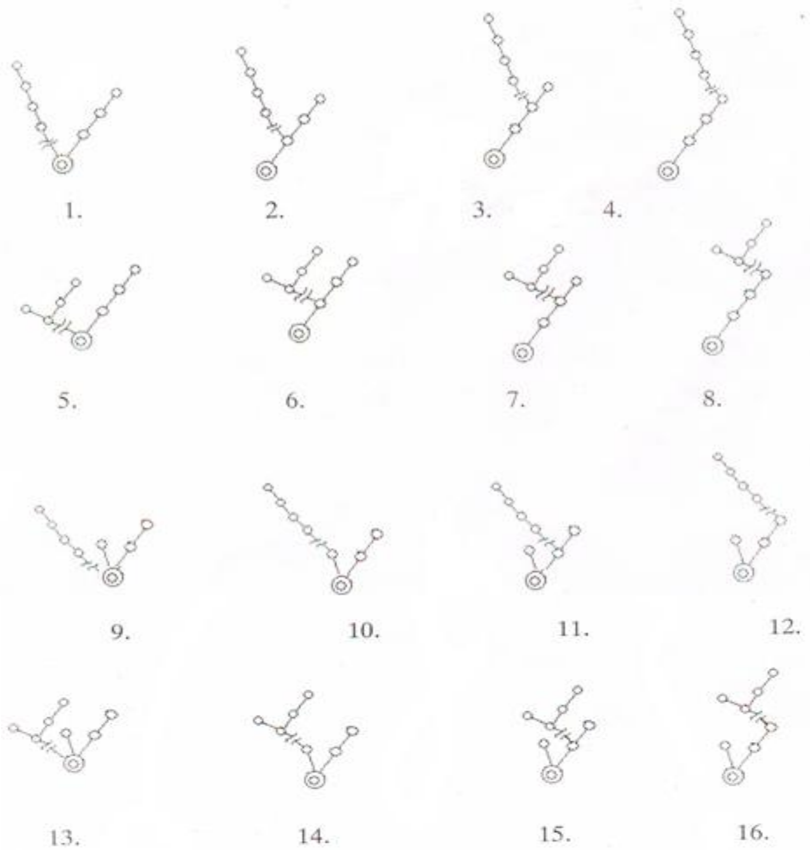


Рис. 4. Простейшие предфрактальные деревья

Осталось, выяснить вопрос, что при рассмотренном перечислении не возникает изоморфных корневых деревьев. Изоморфизм при таком подходе исключен т.к. во-первых разбиение корневого дерева по ребру равновесия приводит к двум компонентам изоморфно не сопоставимыми т.к. одна из них содержит корень первоначального дерева, и во вторых в силу леммы 6 исключается симметрия относительно вершин к которым присоединяется конфигурация.

Теорема 6. Число различных простейших предфрактальных деревьев множества $\{TG_L\}$связано с числом различных ППД $\{TG_{L-1}\}$ рекуррентным соотношением

$$T_{f,2^L} = 2^{L-1}(T_{f,2^{L-1}})^2.$$

Доказательство. Так как число различных ППД множества $\{TG_L\}$ совпадает с числом различных 2^L–вершинных корневых деревьев обладающих свойством сквозного равновесия (теорема 5), то полученное рекуррентное соотношения для таких деревьев справедливо и для чисел перечисления корневых простейших предфрактальных деревьев.

Число простейших предфрактальных деревьев значительно меньше числа корневых ППД. Так, из рис. 4 видно, что корневые деревья (1, 4, 10, 12) изоморфны первому 8 – вершинному дереву (рис. 1), корневые деревья (6,7, 13, 15) изоморфны второму 8 – вершинному дереву этого рисунка, и оставшиеся восемь корневых деревьев изоморфны одному и тому же третьему 8 – вершинному дереву рис. 1.

Формулу для числа $t_{f,2^L}$ ППД можно получить аналогично получению числа равновесных деревьев $t_{p,n}$.

$$t_{f,2^L} = \frac{T_{f,2^{L-1}}(T_{f,2^{L-1}}+1)}{2}.$$

Выводы:

1. В простейших предфрактальных деревьях все ребра инцидентные одной и той же вершине являются ребрами разных рангов.

2. Если дерево имеет совершенное парасочетание, то оно единственно.

3. Множество ребер L-го ранга простейшего предфрактального дерева TG_Lобразуют реберное покрытие этого дерева являющееся совершенным парасочетанием.

4. Любому простейшему предфрактальному дереву соответствует единственная траектория.

5. Любой простейший предфрактальный граф TG_L, является деревом с числом вершин равным 2^L и числом ребер равным $2^L - 1$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кочкаров А.М.* Распознавание фрактальных графов: Алгоритмический подход. – Нижний Архыз: Издательский центр «CYGNUS», 1998. – 170 с.
2. *Горбатов В.А.* Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика. – М.: Наука, Физматлит, 2000. – 544 с. – ISBN 5-02-015238-2.
3. *Нечепуренко М.И., Поков В. К., Майнагашев С.М. и др.* Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990. – 520 с.
4. *Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М.: Мир, 1979. – 535 с.
5. *Берж К.* Теория графов и ее применения: Пер. с фр. – М.: Иностранная литература, 1962. – 320 с.
6. *Кочкаров А.А.* Число всевозможных предфрактальных графов // IV Всероссийский симпозиум “Математическое моделирование и компьютерные технологии”: Тез. докл. Т. 2. – Кисловодск: КИЭП, 2000. – С. 73-74.
7. *Кочкаров А.А., Кочкаров Р.А.* Исследование связности предфрактальных графов // IV Всероссийский симпозиум “Математическое моделирование и компьютерные технологии”: Тез. докл. Т. 2. – Кисловодск: КИЭП, 2000. – С. 74-75.
8. *Кочкаров А.А.* Число точек сочленения предфрактального графа // II Международная конференция “Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики”: Тез. докл. – Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2001.
9. *Кочкаров А.А., Кочкаров Р.А.* Топологические характеристики предфрактальных графов и предупреждение кризисов сложных систем // Труды X Международной конференции “Проблемы управления безопасностью сложных систем”. Ч. 1. – М.: РГГУ – Издательский дом МПА-Прогресс, 2002. – С. 116-119.
10. *Кочкаров А.М., Перепелица В.А.* Число внутренней устойчивости предфрактального и фрактального графа // Сб. статей. РАН САО. – 1999.
11. *Коркмазова З.О., Тлябичева М.А.* Р-адические деревья на предфрактальных графах // Материалы Российско–Узбекского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики»: Тез. докл. – Нальчик: НИИ МПиА КБНЦ РАН, 2003. – С. 154-155.
12. *Харари Ф.* Теория графов: пер. а англ. и предисл. В.П. Козырева / под ред. Г.П. Гаврилова. –2-е изд. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 296 с.
13. *Мэлроуз Дж.* Иерархические фрактальные графы и блуждания в них // Фракталы в физике. – 1988. – С. 507-512.
14. *Емеличев В.А. и др.* Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990. – 384 с.
15. *Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В.* Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. – Ижевск: НИЦ «РХД», 2001. – 288 с.
16. *Свами М., Тхуласираман К.* Графы, сети и алгоритмы. – М.: Мир, 1984. – 455 с.
17. *Басакер Р., Саати Т.* Конечные графы и сети/Р. Басакер. – М.: Наука, 1974. – 368 с.
18. *Зыков А.А.* Теория конечных графов. – Новосибирск: Наука, 1969. – 554 с.

19. *Kochkarov A., Perepelitsa V.* Fractal Graphs and Their Properties // ICM 1998 Berlin, International Congress of Mathematicians, Abstracts of Short Communications and Posters. – 1998. – 347 p.
20. *БалхановВ.К.* Введение в теорию фрактального исчисления. – Улан–Удэ: БГУ, 2001. – 58 с.
21. *Nekrashevych V.* Hyperbolic spaces from self – simiral group actions // Algebra and Discrete Mathematics. – 2003. – No. 2. – P. 68-77.
22. *Riehl J., Hespanha J.P.* Fractal graph optimization algorithms // Proc. of the 44t Conf. on Decision and Contr., 2005. – P. 2188-2193.

REFERENCES

1. *Kochkarov A.M.* Raspoznavanie fraktal'nykh grafov: Algoritmicheskiy podkhod [The Recognition of fractal graphs: an Algorithmic approach]. Nizhniy Arkhyz: Izdatel'skiy tsentr «CYGNUS», 1998, 170 p.
2. *Gorbatov V.A.* Fundamental'nye osnovy diskretnoy matematiki. Informatsionnaya matematika [The fundamentals of discrete mathematics. The mathematics of information]. Moscow: Nauka, Fizmatlit, 2000, 544 p. ISBN 5-02-015238-2.
3. *Nechepurenko M.I., Pokov V.K., Maynagashev S.M. i dr.* Algoritmy i programmy resheniya zadach na grafakh i setyakh [Algorithms and programs for solving problems on graphs and networks]. Novosibirsk: Nauka. Sib. otd-nie, 1990, 520 p.
4. *Akho A., Khopkroft Dzh., Ul'man Dzh.* Postroenie i analiz vychislitel'nykh algoritmov [The construction and analysis of computational algorithms]. Moscow: Mir, 1979, 535 p.
5. *Berzh K.* Teoriya grafov i ee primeneniya: Per. s fr. [graph Theory and its applications. TRANS. with FR]. Moscow: Inostrannaya literatura, 1962, 320 p.
6. *Kochkarov A.A.* Chislo vsevozmozhnykh predfraktal'nykh grafov [the Number of all possible prefractal graphs], *IV Vserossiyskiy simpozium "Matematicheskoe modelirovanie i komp'yuternye tekhnologii": Tez. dokl.* [the IV all-Russian Symposium "Mathematical modeling and computer technologies". Proc. dokl.], Vol. 2. Kislovodsk: KIEP, 2000, pp. 73-74.
7. *Kochkarov A.A., Kochkarov R.A.* Issledovanie svyaznosti predfraktal'nykh grafov [a Study of the connectivity of prefractal graphs], *IV Vserossiyskiy simpozium "Matematicheskoe modelirovanie i komp'yuternye tekhnologii": Tez. dokl*. [the IV all-Russian Symposium "Mathematical modeling and computer technologies". Proc. dokl.]. Vol. 2. Kislovodsk: KIEP, 2000, pp. 74-75.
8. *Kochkarov A.A.* Chislo tochek sochleneniya predfraktal'nogo grafa [the Number of articulation points prefractal graph], *II Mezhdunarodnaya konferentsiya "Nelokal'nye kraevye zadachi i rodstvennye problemy matematicheskoy biologii, informatiki i fiziki": Tez. dokl.* [II international conference "Nonlocal boundary value problems and related problems of mathematical biology, Informatics and physics": Proc. dokl.]. Nal'chik: NII PMA KBNTs RAN, 2001.
9. *Kochkarov A.A., Kochkarov R.A.* Topologicheskie kharakteristiki predfraktal'nykh grafov i preduprezhdenie krizisov slozhnykh sistem [Topological characteristics of prefractal graphs and the prevention of crises in complex systems], *Trudy X Mezhdunarodnoy konferentsii "Problemy upravleniya bezopasnost'yu slozhnykh sistem"* [Proceedings of X International conference "problems of safety management of complex systems"], Part 1. M.: RGGU. Izdatel'skiy dom MPA-Progress, 2002. pp. 116-119.
10. *Kochkarov A.M., Perepelitsa V.A.* Chislo vnutrenney ustoychivosti predfraktal'nogo i fraktal'nogo grafa [the Number of internal stability of fractal and prefractal graph], *Sb. statey. RAN SAO* [Proc. articles. THE SAO RAS], 1999.
11. *Korkmazova Z.O., Tlyabicheva M.A.* P-adicheskie derev'ya na predfraktal'nykh grafakh [P-adic trees on prefractal graphs], *Materialy Rossiysko–Uzbekskogo simpoziuma «Uravneniya smeshannogo tipa i rodstvennye problemy analiza i informatiki»: Tez. dokl.* [Proceedings of the Russian – Uzbek Symposium "mixed type Equations and related problems of analysis and Informatics". Proc. Dokl]. Nal'chik: NII MPiA KBNTs RAN, 2003, pp. 154-155.
12. *Kharari F.* Teoriya grafov [Graph theory], Translation from English V.P. Kozyreva, Ed. by G.P. Gavrilova. 2nd ed. – M.: Editorial URSS, 2003, 296 p.
13. *Melrouz Dzh.* Ierarkhicheskie fraktal'nye grafy i bluzhdaniya v nikh [Hierarchical fractal graphs and walk in them], *Fraktaly v fizike* [Fractals in physics], 1988, pp. 507-512.
14. *Emelichev V.A. i dr.* Lektsii po teorii grafov [Lectures on graph theory]. Moscow: Nauka, 1990, 384 p.

15. *Asanov M.O., Baranskiy V.A., Rasin V.V.* Diskretnaya matematika: grafy, matroidy, algoritmy [Discrete mathematics: graphs, matroids, algorithms]. Izhevsk: NITs «RKhD», 2001, 288 p.
16. *Svami M., Tkhulasiraman K.* Grafy, seti i algoritmy [Graphs, networks and algorithms]. Moscow: Mir, 1984, 455 p.
17. *Basaker R., Saati T.* Konechnye grafy i seti [Finite graphs and networks]. Moscow: Nauka, 1974, 368 p.
18. *Zykov A.A.* Teoriya konechnykh grafov [Theory of finite graphs]. Novosibirsk: Nauka, 1969, 554 p.
19. *Kochkarov A., Perepelitsa V.* Fractal Graphs and Their Properties, *ICM 1998 Berlin, International Congress of Mathematicians, Abstracts of Short Communications and Posters,* 199, 347 p.
20. *BalkhanovV.K.* Vvedenie v teoriyu fraktal'nogo ischisleniya [Introduction to the theory of fractal calculus]. Ulan–Ude: BGU, 2001, 58 p.
21. *Nekrashevych V.* Hyperbolic spaces from self – simiral group actions, *Algebra and Discrete Mathematics,* 2003, No. 2, pp. 68-77.
22. *Riehl J., Hespanha J.P.* Fractal graph optimization algorithms, *Proc. of the 44t Conf. on Decision and Contr.*, 2005, p. 2188-2193.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор Д.М. Эдиев.

Кочкаров Ахмат Магометович – Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия, Институт прикладной математики и информатики; e-mail: Kochkarova-Asya@mail.ru; 369000, г. Черкесск, ул. Ставропольская, 36; кафедра математики; д.ф.-м.н.; профессор; зав. кафедрой.

Кочкарова Асият Нерчуковна – e-mail: Kochkarova-Asya@mail.ru; тел.: 89283909698; кафедра математики; ассистент.

Хапаева Лёля Халисовна – e-mail: Lelia.kazalieva@yandex.ru; тел.: 89280250725; кафедра информатики и информационных технологий; к.ф.-м.н.; доцент.

Kochkarov Ahmat Magometovich – North-Caucasian State HumanitarianTechnological Academy, Institute of Applied Mathematics and Computer Science; e-mail: Kochkarova-Asya@mail.ru; 36, Stavropol street, Cherkessk, 369000; dr. of phys. and math. sc.; professor; the department of mathematics; head of department.

Kochkarova Asiyat Nerchukovna – e-mail: Kochkarova-Asya@mail.ru; phone: +79283909698; the department of mathematics; assistant.

Khapaeva Lelia Halisovna – e-mail: Lelia.kazalieva@yandex.ru; phone: +79280250725; the department of Informatics and information technologies; cand. of phys. and math. sc.; associate professor.

УДК 519.532.711.3

А.К. Кубанова

ЯЧЕИСТО-ПОСЛОЙНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ УДАРНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА СРЕДУ

Существуют техногенные и природные воздействия на многофазные объекты окружающей среды, когда при этих интенсивных ударных воздействиях, как правило, пространственно-временные характеристики неизвестны, а известны их локальные амплитуды и продолжительности воздействия малы, по сравнению с характерным временем релаксации среды. В такой ситуации возникает необходимость в развитии нового подхода к моделированию динамики движения многофазных сред. Суть предложенного нами подхода заключается: в развитии методов математического моделирования достаточно сложных процессов динамики движения многофазных сред на основе модификации метода характеристик, учитывающего самосогласованность поля скоростей многофазной среды, положение