

Раздел I. Автоматизация и управление

УДК 004.891.2

А.Н. Целых, В.С. Васильев, Л.А. Целых, С.А. Барковский

МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В НЕЧЕТКИХ КОГНИТИВНЫХ МОДЕЛЯХ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ ОРИЕНТИРОВАННЫМИ ВЗВЕШЕННЫМИ ГРАФАМИ*

Представлен новый метод выделения эффективных управлений, который основан на транзитивной передаче силы влияния между вершинами в ориентированных взвешенных графах с причинно-следственными связями. Такие графы могут представлять когнитивную модель социально-экономической системы. Взаимные влияния вершин друг на друга в условиях существования множественных циклов приводит к необходимости введения декремента затухания, а влияния будут определяться из решения СЛАУ. Для решения задачи определения и отбора эффективных управлений мы вводим теорию эффективных управлений в этой статье. Данный подход базируется на положениях общей теории систем и системном анализе в приложении к управлению в социально-экономических системах. В качестве её презентации будут представлены определения некоторых метрик состояния вершин, отражающие результативность компонент эффективных управлений в системе. Решение задачи поиска оптимального управления сводится к задаче максимизации квадратичной формы, что обеспечивает её корректность (существование решения, возможность получения решения и единственность решения), вычисление в вещественной, а не в комплексной области и независимость от условий устойчивости. На основе теории эффективных управлений предлагаются метрики вершин, оценивающие меру и способность эффективного управления, соответственно измерения роста фактора модели при управляющем воздействии.

Ориентированные взвешенные графы; компоненты эффективных управлений; оптимизация функционалов на графах; решение СЛАУ на графах; нечеткие когнитивные карты.

A.N. Tselykh, V.S. Vasilev, L.A. Tselykh, S.A. Barkovskii

METHOD OF THE SELECTION OF EFFECTIVE CONTROLS IN FUZZY COGNITIVE MODELS REPRESENTED AS DIRECTED WEIGHTED GRAPHS

In this article, we present a new method of selection effective controls which is based on the transitive power influence transmission between the nodes in the directed weighted graphs with cause-and-effect relationships. These graphs can be a cognitive model of socio-economic system. The influence will be determined from the solution of linear systems. The influences will be determined from the solutions generated by System of Linear Algebraic Equations (SLAE). To solve the problem of identification and selection of effective controls, we introduce the theory of effective controls in this article. This approach is based on the provisions of the general systems theory and systems analysis in the annex to the management of socio-economic systems. This approach is based on the provisions of the general systems theory and systems analysis in the annex to the socio-economic systems management. For its presentation we will determine definitions of certain vertices state metrics, reflecting the impact of components of effective controls in the system. The solution problem for the searching of optimal control that turns to the problem of maximizing a quadratic form, which ensures its validity (the existence of the solutions, the possibility of the solu-

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 16-01-00098.

tions and uniqueness of the solution), calculating a real, rather than complex domain and independent from conditions of stability. Based on the theory of effective controls, vertices metrics are offered that evaluate and measure the ability of efficient controls in accordance to the measuring of the growth factor of a model during control influence.

Directed weighted graphs; components of effective controls; functional optimization on graphs; SLAE decision on graphs; fuzzy cognitive maps.

1. Введение. В некоторых недоопределенных слабоформализуемых средах (области менеджмента, социальные и экономические системы) возникают ситуации, в которых трудно, а порой и невозможно, безусловно идентифицировать конкретную проблемную задачу в управляемой системе. Часто задача сформулирована лишь в общих чертах для системы в целом, без выделения конкретных управляющих и управляемых параметров.

Одним из вариантов визуализации представлений социально-экономических систем являются когнитивные модели в виде нечеткой когнитивной карты [1, 2]. Графическое представление модели поведения системы позволяет понимать, какие концепты системы влияют на другие концепты и в какой степени, но при этом целевую направленность системы очень трудно понять, а также выделить из нее какие-либо ключевые элементы. Это связано как с большой размерностью когнитивной карты, так и с наличием многочисленных обратных связей (сложность концептов и отношений между ними). Размеры современных когнитивных карт превышают возможности человеческого восприятия, поэтому их стандартное представление теряет свою информативность.

В последнее время математическая поддержка теории нечетких когнитивных карт получила некоторое развитие. Однако основное внимание уделялось развитию методов формирования когнитивных карт и проблемам, связанным с этим [3]. В целом, математический инструментарий обработки когнитивных карт представлен двумя следующими подходами:

- ◆ статистическим анализом (анализ влияний), с выделением факторов с наиболее сильным влиянием на целевые факторы [1, 4, 5];
- ◆ динамическим анализом на базе генерации возможных сценариев развития ситуации во времени [5, 6].

При проведении первого типа анализа вычисления системных показателей основаны на суммировании сил (весов на дугах) [1, 4], выборе наибольшего (наименьшего) значения с вычислением консонанса и диссонанса (степени уверенности в приращении значения признака) [6], произведении весов дуг [7], произведении весов и значений узлов [8]. Моделирование динамических когнитивных процессов представлено методами с использованием операции *max-product* [4]; динамическими когнитивными сетями DCN [9]; частными когнитивными картами на базе теории декомпозиции [7] и др.

При этом целевые факторы и факторы воздействия назначаются аналитиком при разработке системы (экспертно), что может привести к ошибочным выводам. Задача автоматизации обнаружения таких факторов является актуальной проблемой.

Одно из возможных решений заключается в выделении эффективных управлений, в т.ч. *многоуровневом*, в исходном графе, представляющем заданный эквивалент системы в целом (в долевым или процентном измерении). Например, отобранные вершины и связи могут представлять 50–70 % общего потенциала системы. Эффективные управления включают небольшой (разумный) набор концептов, несущих основную нагрузку системы с точки зрения эффективности управляющих воздействий и их результативности в целевых концептах системы. Важно, однако, чтобы при выделении определяющих вершин не утратилось информационное содержание когнитивной модели. Выделение наиболее важных, ключевых концептов

системы позволяет анализировать и исследовать свойства системы без утраты информации о её предназначении, целевой направленности. Отбор эффективных управлений является основой принятия управленческих решений.

Для решения задачи определения и отбора эффективных управлений мы вводим *теорию эффективных управлений* в этой статье. Данный подход базируется на положениях общей теории систем и системном анализе в приложении к управлению в социально-экономических системах. В качестве её презентации будут представлены определения некоторых метрик состояния вершин, отражающие результативность компонент эффективных управлений в системе.

Новизна подхода заключается в адаптации модели управления традиционных технических систем к изменяющимся условиям существования экономических и социальных систем на основе когнитивного моделирования.

2. Связанные работы. Нечеткие когнитивные карты представляют собой ориентированные взвешенные циклические графы с причинно-следственными связями. В основном, направления анализа графов связаны с кластеризацией, укрупнением и анализом графа на основе метрик.

Многие традиционные инструменты анализа сети, особенно метрики в анализе социальной сети [10–13], такие как степени узла, промежуточность, центральность и близость предназначены для невзвешенных сетей. Недавно введенные меры h -типа (h -индекс, h -степень) [14] имеют некоторые потенциальные возможности в области анализа для взвешенных сетей по сравнению с традиционными показателями для невзвешенных сетей. Однако они основываются на направленности дуг, но не учитывают их весовые характеристики, а также передающиеся воздействия от одного узла к другому.

В статье [7] предпринята попытка учесть эффект влияния одной вершины на другую. В работе также предлагается новая метрика эффекта влияния, представляющая произведение весов дуг. Представленный в работе [7] метод рассчитан на кластеризацию графов, матрица смежности которых имеет четко выраженную блочную структуру. Но вычисления основаны на простых выражениях, носящих интуитивный характер, в которых не учитывается транзитивная передача влияния.

В статьях [15] и [16] степень влияния определяется не из интуитивных соображений, а из решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Но процессы рассматриваются в динамике, поэтому для [15] оказываются актуальными условия устойчивости, выражающиеся в том, что весь спектр матрицы должен располагаться внутри единичного круга, а сами собственные числа и собственные вектора оказываются комплексными.

В работе [16] рассматривается метод кластеризации CSIP на основе сортировки силы воздействия (influence power), как динамической силы влияния между узлами с учетом окружения. Данный метод вводит новые соответствующие метрики вершин, которые могут служить основой отбора ключевых вершин. Однако результаты работы [16] существенным образом ориентированы на стохастические матрицы, т.е. матрицы смежности, суммы на столбцах элементов которых строго равны единице, а сами элементы неотрицательны. Невыполнение этих условий делает невозможным и применение самих методов.

В нашем исследовании ставится задача, ориентированная на матрицы общего, а не специального вида, для решения которой выполнение условий устойчивости не является необходимым принципиальным требованием.

3. Методы. Рассмотрим решение задачи с позиции интеграции трех подходов: традиционной технической системы управления, особенностей управления в социально-экономических системах и представления социально-экономической системы в виде когнитивной модели.

Математическая постановка проблемы

Рассмотрим конечный граф $G = \langle V, E \rangle$, где $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ – конечное множество вершин, n – количество вершин, $E = \{\langle v_j, v_k \rangle | v_j \in V, v_k \in V\}$ – конечное множество дуг. Графу G соответствует матрица смежности $\mathbf{A} = \|a_{jk}\|_{n \times n}$, где вес a_{jk} дуги $\langle v_j, v_k \rangle$ может выражать наличие дуги (булево значение), кратность дуги, вес дуги, нечёткую меру смежности вершин v_j и v_k и др.

Традиционная техническая система управления

Рассмотрим следующую модель управления:

$$x_j = u_j + \delta(a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \dots + a_{nj}x_n) = u_j + \delta \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i$$

где x_j – значение роста показателя, связанного с вершиной v_j ; u_j – величина управляющего воздействия на показатель, связанный с вершиной v_j ; δ – декремент затухания, $0 < \delta \leq 1$.

Модель может быть представлена в матричной форме:

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \delta \mathbf{A}^T \mathbf{x} \quad \text{или} \quad (\mathbf{E} - \delta \mathbf{A}^T) \mathbf{x} = \mathbf{u}, \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$ – вектор роста показателей, связанных с вершинами; $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)^T$ – вектор управляющих воздействий; \mathbf{E} – единичная матрица.

Получение модели может быть объяснено следующим образом. При непосредственном влиянии управляющего воздействия \mathbf{u} на показатели \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}.$$

С учётом одношаговой передачи воздействия по дугам графа:

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{A}^T \mathbf{u}.$$

С учётом двух-шаговой передачи воздействия по дугам графа:

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{A}^T \mathbf{u} + \mathbf{A}^T \mathbf{A}^T \mathbf{u}$$

и т.д.

При условии сходимости выстраивающегося ряда получаем:

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{A}^T \mathbf{u} + \mathbf{A}^T \mathbf{A}^T \mathbf{u} + \dots + \underbrace{\mathbf{A}^T \mathbf{A}^T \dots \mathbf{A}^T}_{k} \mathbf{u} + \dots$$

Для возможности управления сходимостью и вводится декремент δ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \delta \mathbf{A}^T \mathbf{u} + \delta^2 \mathbf{A}^T \mathbf{A}^T \mathbf{u} + \dots + \delta^k \underbrace{\mathbf{A}^T \mathbf{A}^T \dots \mathbf{A}^T}_{k} \mathbf{u} + \dots$$

При абсолютной сходимости получаем модель (1).

Заметим, что модель (1) содержит не динамически изменяющиеся, а итоговые, предельные значения величин роста показателей и воздействий, хотя может быть интерпретирована и первым образом. Но в динамическом случае лучше использовать представление:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{A}^T \mathbf{x}^{(k)}$$

или

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{u}^{(k)} - (\mathbf{E} - \delta \mathbf{A}^T) \mathbf{x}^{(k)},$$

что соответствует канонической форме итерационных вычислительных схем.

Если обратная величина δ^{-1} принадлежит резольвентному множеству матрицы \mathbf{A} , то итоговые значения роста показателей \mathbf{x} могут быть найдены как решение СЛАУ с матрицей $(\mathbf{E} - \delta \mathbf{A}^T)$ и правой частью \mathbf{u} :

$$\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \delta \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{u}. \quad (2)$$

Если δ^{-1} принадлежит спектру, то будет существовать ненулевое решение $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ даже при нулевом воздействии $\mathbf{u} = \mathbf{0}$:

$$(\mathbf{E} - \delta \mathbf{A}^T) \mathbf{e} = \mathbf{0},$$

выражающееся через собственные числа λ_i ($1 \leq i \leq n$) и соответствующие им собственные векторы e_i ($1 \leq i \leq n$) матрицы A^T .

В решении x независимо от значения δ могут быть выделены слагаемые e_i . При этом в общем случае λ_i , а вслед за ними и компоненты e_i , будут комплексными числами даже для вещественной матрицы A . Действительные части λ_i соответствуют показателям экспоненциального роста (в случае положительности) или убывания (в случае отрицательности), а мнимые части – частотам собственных колебаний. Кратность корня λ_i добавляет полиномиальные множители.

Управление в социально-экономических системах

Принципиальное отличие социально экономических систем от технических состоит в следующем.

В социально-экономических системах, во-первых, многие явления носят циклический, но не строго периодический характер, то есть повторяемость имеет место, но не через неизменные интервалы времени, за исключением разве что сельско-хозяйства. Подобное является следствием того, что система на самом деле нелинейная, спектр представляет собой дополнение к резольвентному множеству, а не конечное множество корней характеристического полинома, которые будут зависеть от решения x , для анализа которого они предназначаются быть использованными. То есть такой анализ окажется сложным и есть риск, что недостоверным.

Второе принципиальное отличие состоит в том, что устойчивость для социально-экономической модели не является таким необходимым условием, как для технического устройства. Например, характерное время произнесения слова человеком – 1 секунда. За это время приёмник-передатчик GSM-модуля на частоте 900/1800/1900 MHz производит около миллиона колебаний. Если устройство работает неустойчиво (приёмник или передатчик переходит в режим генератора), то это проявится через несколько колебаний или десятков колебаний. И тогда разговор двух абонентов будет невозможным. Разговор будет также невозможным, если несущая частота не является стабильной, то есть период колебаний неизменен лишь приблизительно.

В социально-экономических системах фирма, стремящаяся приобрести конкурентное преимущество, будет стремиться как раз «разорвать замкнутый круг» устойчивости. При этом все отдадут себе отчёт, что устремления конкурентов такие же, и никто не приобретёт конкурентные преимущества навечно. Поэтому задача ставится зачастую на очередной хозяйственный цикл, и если удастся удержать позиции не один, а несколько циклов, то это дополнительный выигрыш.

Наконец, третье отличие состоит в том, что могут быть неясны или не сформулированы сами цели, и они должны определиться в результате решения задачи. То есть управляющее воздействие должно быть направлено на те показатели, на рост которых оно в принципе может быть направлено для данной социально-экономической системы. Бессмысленно переориентировать сельское хозяйство Якутии с оленеводства на выращивание кофе, если сложились сверхблагоприятные мировые цены на кофе. То есть управляющее воздействие для сельского хозяйства Якутии нужно не задавать директивой – выращивать кофе, а определять оптимальное решение из самой социально-экономической системы – сельское хозяйство Якутии.

Для учёта всех перечисленных отличий предлагается изменить постановку задачи, а именно не по известному вектору управляющих воздействий u определять вектор роста показателей x из решения СЛАУ (2), а сам вектор u определять из решения оптимизационной задачи максимизации R – отношение квадратов норм $\|\bar{x}\|^2$ и $\|\bar{u}\|^2$:

$$R = \frac{\|x\|^2}{\|u\|^2} = \frac{((E - \delta A^T)^{-1} u, (E - \delta A^T)^{-1} u)}{(u, u)} = \frac{(Cu, u)}{(u, u)} \rightarrow \max, \quad (3)$$

где $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$ – вектор роста показателей, связанных с вершинами;
 $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)^T$ – вектор управляющих воздействий;

$\mathbf{C} = ((\mathbf{E} - \delta\mathbf{A})^T(\mathbf{E} - \delta\mathbf{A}))^{-1}$ – симметричная положительно определённая (или полуопределённая) матрица.

После этого вектор \mathbf{x} определяется из решения СЛАУ (2).

В отсутствие ограничений на управляющие воздействия \mathbf{u} максимальное значение R_{max} равно максимальному собственному числу λ_{max} матрицы \mathbf{C} и достигается на собственном векторе \mathbf{e}_{max} матрицы \mathbf{C} , соответствующем собственному числу λ_{max} .

Из симметрии матрицы \mathbf{C} следует, что все её собственные числа (в том числе и λ_{max}) будут действительными числами. Все компоненты всех собственных векторов будут также действительными числами. Решение \mathbf{x} СЛАУ (2) с матрицей и правой частью, содержащими только действительные числа, также будет состоять только из действительных чисел. Это снимает проблемы интерпретации экономических показателей, выраженных комплексными числами. Они комплексными числами просто не выражаются. Добавим, что для положительно полуопределённой матрицы \mathbf{C} все её собственные числа будут неотрицательны, что также характерно для значений экономических показателей.

Таким образом, постановка задачи (3) учитывает все перечисленные отличия. Решение $\mathbf{u} = \mathbf{e}_{max}$ не задаётся, а определяется в результате решения оптимизационной задачи. Условия устойчивости не доминируют над решением $\mathbf{u} = \mathbf{e}_{max}$, а, скорее всего, даже нарушаются. Все вычисления проводятся не в комплексной, а в вещественной области.

Ещё раз подчеркнём различия в постановках задач. Решение \mathbf{x} СЛАУ (2) рассчитано на произвольную правую часть \mathbf{u} и поэтому может содержать любые собственные векторы матрицы $(\mathbf{E} - \delta\mathbf{A}^T)$, которые в общем случае являются комплексными. Решение задачи (3) достигается на вполне конкретном вещественном векторе $\mathbf{u} = \mathbf{e}_{max}$ симметричной матрицы \mathbf{C} . Следовательно, для вещественной матрицы $(\mathbf{E} - \delta\mathbf{A}^T)$ и решение \mathbf{x} будет вещественным.

Если собственные числа матрицы $(\mathbf{E} - \delta\mathbf{A}^T)$ выходят за границу единичного круга, то малые изменения компонент \mathbf{u} будут приводить к заметным изменениям компонент вектора \mathbf{x} (неустойчивость). В случае сильной чувствительности к точности задания \mathbf{u} такому решению нельзя доверять. В постановке задачи (3) само понятие сильных изменений в выходных данных при малых изменениях во входных данных отсутствует, поскольку в основе определения $\mathbf{u} = \mathbf{e}_{max}$ и R_{max} лежат сходящиеся итерационные процессы. Условия устойчивости не доминируют, и даже предназначены быть нарушенными, и в конкурентной среде социально-экономической системы есть масса причин, которые будут мешать реализовать оптимальное управление.

Когнитивная модель и управление

Пусть управляющее воздействие u_j не изменяет самого показателя x_j , а передаётся показателям x_i ($1 \leq i \leq n$), связанным дугами a_{ji} с показателем x_j : $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}(u_i + \delta \sum_{k=1}^n a_{ki}x_k)$

или в матричной форме

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^T(\mathbf{u} + \delta\mathbf{A}^T\mathbf{x}) \text{ или } (\mathbf{E} - \delta\mathbf{A}^T\mathbf{A}^T)\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{u}. \quad (4)$$

Модель может быть также представлена в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{u} + \delta(\mathbf{A}^T)^3\mathbf{u} + \delta^2(\mathbf{A}^T)^5\mathbf{u} + \dots + \delta^k(\mathbf{A}^T)^{2k+1}\mathbf{u} + \dots$$

в случае абсолютной сходимости получающегося ряда.

Постановка задачи (3) принимает вид

$$R = \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{u}\|^2} = \frac{((\mathbf{E} - \delta\mathbf{A}^T\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{u}, (\mathbf{E} - \delta\mathbf{A}^T\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{u})}{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} = \frac{(\mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{u})}{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \rightarrow \max, \quad (5)$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{E} - \delta\mathbf{A}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{E} - \delta\mathbf{A}^T\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{A}^T$ – симметричная положительно определённая (полуопределённая) матрица; $\mathbf{Z} = \mathbf{E} - \delta\mathbf{A}\mathbf{A}$. Матрица \mathbf{B} определяется как произведение $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{F}$, а $\mathbf{F} = (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{A}^T$ находится из решений СЛАУ с единой матрицей $(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})$, но разными правыми частями: j -й столбец матрицы \mathbf{F} является решением СЛАУ с правой частью – j -й строкой матрицы смежности \mathbf{A} . Данная СЛАУ разрешается при помощи LU-разложения, как и остальные СЛАУ с несимметричными матрицами. Такой выбор сделан потому, что учитывающее симметрию матрицы разложение Холецкого (Cholesky decomposition), содержит вычисления квадратных корней, что сводится к нескольким итерациям, содержащим операцию деления. В итоге меньшее число операций (извлечения корня) в разложении Холецкого по сравнению с числом операций (деления) в LU-разложении практически не означает более быстрого решения задачи, в то время как накопление ошибок округления при извлечении квадратного корня оказывается большим, чем при операции деления.

Если решение задачи не ограничено никакими условиями, то она эквивалентна задаче поиска максимального собственного числа $R_{max} = \lambda_{max}$ и соответствующего ему собственного вектора $\mathbf{u} = \mathbf{e}_{max}$ симметричной вещественной положительно (полу) определённой матрицы \mathbf{B} . При помощи функции EVCSF() раздела MATH библиотеки IMSL могут быть найдены все собственные числа и все собственные векторы вещественной симметричной матрицы [17–19].

Если компоненты управлений ограничены какими-либо условиями, то вместо решения задачи нахождения собственных векторов и собственных чисел для определения $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$ и R_1, R_2, \dots придётся решать соответствующую задачу условной оптимизации. При этом для дальнейшего анализа дополнительно к имеющимся ограничениям может потребоваться взаимная ортогональность различных управлений \mathbf{u}_i и \mathbf{u}_j (собственные векторы вещественной симметричной матрицы ортогональными являются).

Предполагается, что интерес будут представлять немногие первые наиболее эффективные управления $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_i$. Решение принимается пользователем. Для поддержки принимаемого решения по величинам R_1, R_2, \dots, R_k , ($R_1 \geq R_2 \geq \dots \geq R_k$) вычисляются величины (s_2, s_3, \dots, s_{k-1}):

$$s_i = -R_{i-1} + 2R_i - R_{i+1}.$$

Смена знака в последовательности s_i указывает границу l : $s_{l-1} < 0, s_l > 0, s_{l+1} < 0$. Могут быть использованы и другие критерии.

Для нахождения \mathbf{u}_i из решения СЛАУ (4) определяем \mathbf{x}_i .

Для каждой компоненты каждого отобранного управления \mathbf{u}_i определяется индекс обеспечения управляемости для j -ой вершины:

$$v_{i,j}^2 = \frac{u_{i,j}^2}{u_{i,1}^2 + u_{i,2}^2 + \dots + u_{i,n}^2}, \quad (6)$$

а для компонент соответствующего решения \mathbf{x}_i – индекс результативности для j -ой вершины:

$$r_{i,j}^2 = \frac{x_{i,j}^2}{x_{i,1}^2 + x_{i,2}^2 + \dots + x_{i,n}^2}, \quad (7)$$

которые затем упорядочиваются по убыванию. Решение об отборе результативных компонент принимается пользователем. Для поддержки принимаемого решения может использоваться вышеописанный или иной критерий.

Перечисленные действия реализует следующий алгоритм нахождения результирующих компонент эффективных управлений:

- 1) Ввод матрицы \mathbf{A} и декремента затухания δ .
- 2) Формирование матрицы $\mathbf{Z} = \mathbf{E} - \delta\mathbf{A}\mathbf{A}$.
- 3) Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $\mathbf{F} = (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{A}^T$.
- 4) Формирование матрицы квадратичной формы $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{F}$.
- 5) Вычисление (нескольких первых) собственных чисел и соответствующих им собственных векторов матрицы \mathbf{B} , $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n, R_1, R_2, \dots, R_n$.
- 6) Отбор значимых управлений $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_l$.
- 7) Вычисление векторов роста показателей, связанных с вершинами $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_l$, (СЛАУ (4)).
- 8) Для каждого значимого управления \mathbf{u}_i и вектора \mathbf{x}_i :
 - а) вычисление долей результативности $v_{i,j}^2$ и $r_{i,j}^2$ их компонент;
 - б) сортировка по убыванию долей результативности $v_{i,j}^2$ и $r_{i,j}^2$ их компонент;
 - в) отбор его результирующих компонент \mathbf{u}_i и \mathbf{x}_i .
- 9) Представление результатов $u_{i,j}, x_{i,q}, 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq k_u(i), 1 \leq q \leq k_x(i)$.

Метрики вершин на основе теории эффективных управлений

На базе описанного выше алгоритма рассмотрим предлагаемые метрики вершин, характеризующие меру эффективного управления.

Определение 1: $Ir_{i,j}$ – Индекс роста – показатель роста фактора модели, соответствующего j -ой вершине графа при воздействии вектора управления \mathbf{Ia}_i в целом.

Индекс роста $Ir_{i,j}$ j -ой вершины при i -м воздействии определяется как решение СЛАУ (4): $(\mathbf{E} - \delta\mathbf{A}^T\mathbf{A}^T)\mathbf{I}r_{i,j} = \mathbf{A}^T\mathbf{Ia}_{i,j}$, где δ – декремент затухания, \mathbf{A} – матрица смежности графа G , $\mathbf{Ia}_{i,j}$ – вектор индекса управления.

Определение 2: $Ia_{i,j}$ – Индекс управления – коэффициент, с которым показатель j -ой вершины графа участвует в директивном управлении.

Индекс управления $Ia_{i,j}$ находится как результат решения оптимизационной задачи (5):

$$R = \frac{\|\mathbf{I}r_{i,j}\|^2}{\|\mathbf{Ia}_{i,j}\|^2} = \frac{((\mathbf{E} - \delta\mathbf{A}^T\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Ia}_{i,j}, (\mathbf{E} - \delta\mathbf{A}^T\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Ia}_{i,j})}{(\mathbf{Ia}_{i,j}, \mathbf{Ia}_{i,j})} = \frac{(\mathbf{B}\mathbf{Ia}_{i,j}, \mathbf{Ia}_{i,j})}{(\mathbf{Ia}_{i,j}, \mathbf{Ia}_{i,j})} \rightarrow \max,$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{E} - \delta\mathbf{A}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{E} - \delta\mathbf{A}^T\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{A}^T$ – симметричная положительно определённая (полуопределённая) матрица; $\mathbf{Z} = \mathbf{E} - \delta\mathbf{A}\mathbf{A}$.

Определение 3. $r_{i,j}^2$ – Индекс результативности – доля обеспечения соподправленности направлению вектора роста \mathbf{x}_i отобранной компонентой соответствующей j -ой вершине.

Индекс результативности вычисляется по формуле (7) как отношение квадрата j -ой компоненты вектора роста \mathbf{x}_i к сумме квадратов всех компонент вектора роста \mathbf{x}_i : $r_{i,j}^2 = \frac{x_{i,j}^2}{x_{i,1}^2 + x_{i,2}^2 + \dots + x_{i,n}^2}$.

Определение 4. $v_{i,j}^2$ – Индекс обеспечения управляемости – доля обеспечения соподправленности вектору управления \mathbf{u}_i за счет показателя j -ой вершины.

Индекс обеспечения управляемости вычисляется по формуле (6) как отношение квадрата j -ой компоненты вектора управления \mathbf{u}_i к сумме квадратов всех компонент вектора управления \mathbf{u}_i : $v_{i,j}^2 = \frac{u_{i,j}^2}{u_{i,1}^2 + u_{i,2}^2 + \dots + u_{i,n}^2}$.

4. Эксперимент. Рассмотрим процедуру нахождения результативных компонент эффективных управлений на примере когнитивной модели в виде ориентированного взвешенного графа с причинно-следственными связями, представленного матрицей смежности размерностью 75×75 с 411 дугами общим весом 216.5 [20, 21].

Попытка кластеризации на основе минимизации квадратичного функционала приводила к результату – все вершины образуют один кластер. Попытка выявить на графе отношение порядка, и поставить вопрос об исключении дуг, образующих циклы, приводила к необходимости исключения около четверти дуг, что не могло не исказить информационную сущность графа. Стремление рассчитать взаимные влияния вершин друг на друга в условиях существования множественных циклов приводит к необходимости введения декремента затухания, а влияния будут определяться из решения СЛАУ.

СЛАУ оказывается плохо обусловленной, но разрешимой и при значении декремента затухания $\delta = 1$.

Было также установлено, что резонансные свойства матрицы СЛАУ (2) таковы, что собственные числа и собственные векторы являются комплексными. Но благодаря тому, что элементы матрицы и правой части СЛАУ являются действительными числами, собственные числа и собственные векторы матрицы образуют комплексно-сопряжённые пары. Тем не менее, интерпретация экономических показателей, выраженных комплексными числами, является затруднительной. Поэтому рассматривается задача оптимизации, имеющая вещественное решение.

Решение задачи (5) не составляет проблемы, за исключением того, что число обусловленности матрицы 75×75 составляет $\sim 10^{15}$. Результаты вычисления компонент собственного вектора \mathbf{u}_1 матрицы \mathbf{B} (п.5 Алгоритма), представлены в табл. 1 (отсортировано по убыванию).

Таблица 1

Значения компонент вектора \mathbf{u}_1 , соответствующих вершинам v_i

v_n	u_{1j}	v_n	u_{1j}	v_n	u_{1j}	v_n	u_{1j}
5	0,25280380	9	0,08566853	17	0,009989827	40	-0,05052563
12	0,25260910	41	0,08098736	8	0,007004421	65	-0,06068351
39	0,21015280	67	0,07589548	21	0,000000000	72	-0,07647701
34	0,20993520	18	0,07455603	28	0,000000000	4	-0,08341967
11	0,20086750	58	0,07391990	51	0,000000000	23	-0,08357380
2	0,18766960	62	0,06634766	70	-0,002065489	15	-0,09434044
75	0,16573760	29	0,05987265	71	-0,002968655	31	-0,10695960
38	0,15818400	14	0,05542509	74	-0,004202652	7	-0,11952150
1	0,15476910	43	0,05301107	61	-0,007046627	30	-0,12233330
54	0,14757010	13	0,04879709	33	-0,025302960	46	-0,12529720
25	0,14479730	32	0,04752683	73	-0,030733830	48	-0,14022210
6	0,14248520	44	0,04523298	53	-0,034081150	42	-0,18313980
50	0,11954390	27	0,03099309	16	-0,034362010	22	-0,19191310
55	0,11183400	59	0,02701188	35	-0,034479890	19	-0,19352650
20	0,09923731	56	0,02440797	36	-0,039833460	3	-0,19513590
47	0,09516039	63	0,01614966	64	-0,041552790	66	-0,22060600
37	0,09359980	60	0,01389593	68	-0,042540570	49	-0,22697270
45	0,09050892	26	0,01282121	52	-0,042601340	24	-0,26914270
69	0,08868004	57	0,01074903	10	-0,049238520		

Решение СЛАУ (4) (п.7 Алгоритма) представлено в табл. 2 (сортировка по убыванию).

Таблица 2

Значения векторов x_1, x_2, \dots, x_l

v_n	x_j	v_n	x_j	v_n	x_j	v_n	x_{j_i}	v_n	x_{j_i}
37	208,0518	40	21,58144	24	1,916675	16	-1,98022	44	-38,3505
47	183,2326	57	14,47225	56	1,110261	9	-3,08709	35	-38,5159
51	163,3114	11	12,33464	20	0,548213	33	-3,47675	6	-39,4433
41	148,3645	68	11,62518	66	0,083993	69	-6,55189	21	-39,5259
26	102,8048	5	10,83454	72	0,028935	55	-7,77439	18	-39,5922
25	94,21774	10	10,48386	61	0,02748	28	-10,2296	15	-40,2072
30	91,09594	62	10,04127	65	0,022907	70	-10,8209	17	-47,0725
75	86,72815	59	9,481671	64	0,01561	22	-11,8735	54	-52,3909
52	78,78956	2	7,127377	73	0,011676	32	-12,0834	53	-53,2926
50	67,93214	19	6,409531	74	0,001598	48	-12,721	46	-67,0565
27	66,40107	34	5,794519	71	0,000984	3	-15,9206	60	-73,45
39	48,42215	14	5,574492	63	-0,00615	49	-17,279	4	-73,7708
36	44,63304	12	4,614484	13	-0,01818	7	-18,1356	58	-80,345
1	32,46423	8	4,193422	29	-0,02245	23	-23,5826	43	-87,569
31	27,01683	42	2,408943	67	-0,0286	38	-27,4331	45	-120,328

После определения первого главного направления u_i было решено определить вклад каждого отдельного показателя, соответствующего вершине графа, в каждую отдельную компоненту вектора рассчитанных показателей x_i , т.е. решено было получить элементы обратной матрицы. Оказалось, что полученная матрица с очень высокой точностью совпадает с диадным произведением двух векторов для СЛАУ (4):

$$(E - \delta A^T A^T)^{-1} A \approx x \cdot u^T. \quad (8)$$

Для оптимизационной задачи (5):

$$B \approx (u \cdot x^T) \cdot (x \cdot u^T) = u \cdot R_{\max} \cdot u^T.$$

То есть строки матрицы отличаются друг от друга только множителем, связанным со строкой, и столбцы матрицы также отличаются друг от друга только множителем, связанным со столбцом. Если изобразить элементы строк или элементы столбцов графически, то они будут представлять семейства ломаных с одинаковым и масштабным положением узлов и пучностей. Более наглядное представление получается, если предварительно упорядочить элементы строк или столбцов (заметим, что благодаря сильной коллинеарности они приобретают одинаковую упорядоченность) (рис. 1).

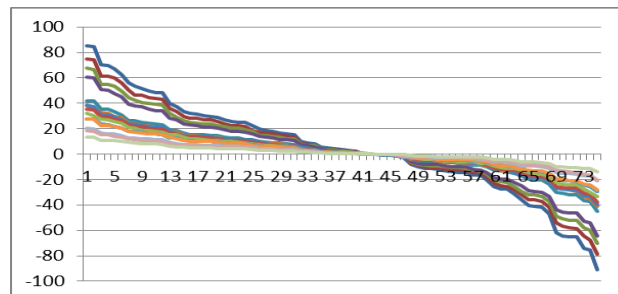


Рис. 1. Коллинеарность векторов, выраженных упорядоченными компонентами строк матрицы диадного произведения

На рис. 1 представлена соответствующая картина упорядочения по убыванию для строки диадного произведения (для столбцов картина аналогичная), причём она совпадает с упорядоченными по убыванию компонентами решения (рис. 2). После этого было решено определить последующие собственные числа.

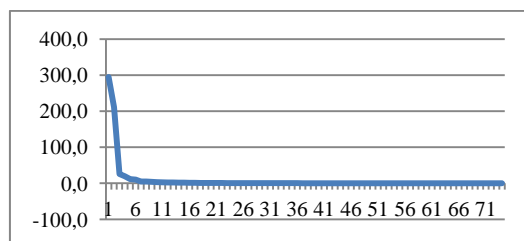


Рис. 2. Сортировка значений R_1, R_2, \dots, R_n (без учета максимального собственного числа)

Оказалось, что если интерпретировать матрицу квадратичной формы как ковариационную матрицу, то функционирование системы определяется одним ведущим направлением развития, очень сильно преобладающим над остальными. Это объясняет, почему в графе не выделялись сообщества на основе минимизации квадратичного функционала.

Сортировка полученных значений R_1, R_2, \dots, R_n показывает значительный разрыв значений первого вектора от второго ($3 \cdot 10^3$). Из структуры матрицы (8) следует, что в силу сильной взаимосвязи показателей воздействие на любой из них приводит к одинаковому вектору роста, но с различными масштабами. Тогда достаточно взять один управляемый показатель (максимальный). Для более эффективного управления принято решение отобрать три, находящихся в заметном отрыве от остальных (рис. 4,а, табл. 3). На рис. 4,б показан эффект накопления индекса обеспечения управляемости $v_{i,j}^2$.

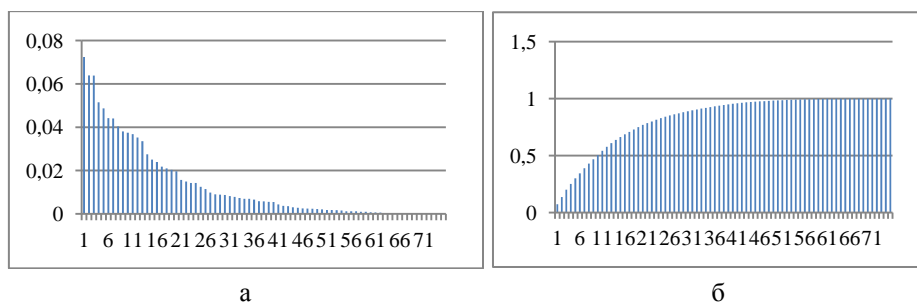


Рис. 4. Индекс обеспечения управляемости $v_{i,j}^2$: а – упорядочение индекса управляемости; б – интегральное представление индекса обеспечения управляемости (с нарастающим итогом)

Таблица 3

Отобранные вершины и соответствующие им компоненты индекса обеспечения управляемости

x_l	$v_{i,j}^2$	Интегральное $v_{i,j}^2$
x_{37}	0,072438	0,072438
x_{47}	0,06391	0,136348
x_{51}	0,063811	0,200159

Упорядочение компоненты вектора роста показателя x_i представлены на рис. 5.

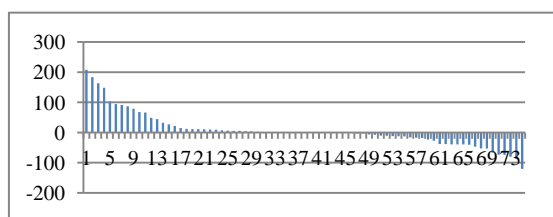


Рис. 5. Упорядочение компоненты вектора x_i роста показателей

К данному вектору роста, но со своим масштабом, приводит воздействие на любой показатель (вершину).

На рис. 6,а представлены соответствующие индексы результативности, а на рис. 6,б – их интегральное представление.

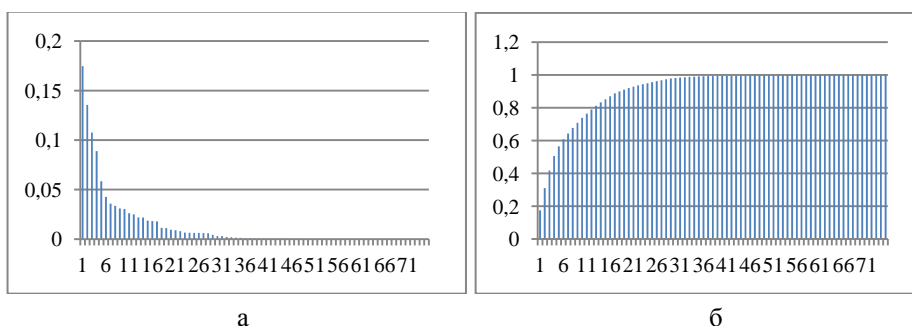


Рис. 6. Индекс результативности $r_{i,j}^2$: а – упорядочение индекса результативности; б – интегральное представление индекса результативности (с нарастающим итогом)

Первые четыре компоненты обеспечивают более 50 % максимального роста (табл. 4).

Таблица 4

Отобранные вершины и соответствующие им компоненты индекса результативности

x_l	$r_{i,j}^2$	Интегральное $r_{i,j}^2$
x_{37}	0,174729	0,174729
x_{47}	0,135527	0,310256
x_{51}	0,107660	0,417916
x_{41}	0,088855	0,506771

Таким образом, представленный результат выражает выбор эффективного управления для социально-экономической системы, представленной когнитивной моделью.

5. Обсуждение результатов. Для оценки нашего подхода имеются пять различных критериев:

1) Применимость для предметной области.

Проведенные исследования показали применимость данного подхода, основанного на теории систем для анализа ориентированных взвешенных графов с причинно-следственными связями, представляющих когнитивные модели в социальных и экономических системах.

2) Реализуемость.

Задачи решения СЛАУ однозначно разрешимы, поскольку матрица $(Z^T Z)$ является положительно полуопределенной по построению, а за счет выбора декремента δ может сделана строго положительно определенной и, следовательно, невырожденной.

Реализуемость решения оптимизационной задачи для отношения квадратов норм следует из сходимости соответствующих итерационных процессов. Невырожденность матрицы СЛАУ(4) обеспечивается также выбором декремента δ .

3) Формат результатов.

В результате применения алгоритма осуществляется отбор результативных компонент и соответствующих эффективных значимых воздействий, представляющих ключевые вершины, отображающие заданный эквивалент системы в целом.

Количество полученных вершин сведено к разумному количеству вершин и связей, которое позволяет достичь приемлемого уровня информативности полученной графовой модели для ЛПР (эксперта).

4) Сложность и комплексность полученного решения.

Время решения алгоритма составляет доли секунды. Вычислительная сложность алгоритма составляет $O(n^3)$ арифметических операций.

5) Качество.

Качество получаемых результатов обеспечивается возможностью сведения решаемых задач к системам с симметричными матрицами, для которых доказываются сходимость соответствующих итерационных процессов.

Выводы. Таким образом, в статье представлен новый метод выделения эффективных управлений, который основан на транзитивной передаче силы влияния между вершинами в ориентированных взвешенных графах с причинно-следственными связями. Для определения и отбора эффективных управлений в статье дается развитие теории эффективных управлений, вводятся и описаны метрики вершин, оценивающие меру и способность эффективного управления. Теоретические исследования реализованы в виде алгоритма нахождения результативных компонент эффективных управлений. Приведены результаты вычислительного эксперимента, подтверждающие реализуемость и применимость предложенного метода.

Новизна подхода заключается в адаптации модели управления традиционных технических систем к изменяющимся условиям существования экономических и социальных систем на основе когнитивного моделирования.

В отличие от известных подходов, предложенный метод применим для ориентированных взвешенных графов с причинно-следственными связями, не накладывает требований к графам быть отношениям порядка, иметь матрицу специального вида и не требует выполнения условий устойчивости.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Kosko B. Fuzzy cognitive maps // Int. Journal man-machine Studies. – 1986. – No. 24. – P. 65-75.
2. Glykas, M. (ed.) Fuzzy Cognitive Maps: Advances in Theory, Methodologies, Tools and Applications. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Vol. 247. – Springer: Berlin, 2010.
3. Eden C. Analyzing cognitive maps to help structure issues or problems // European Journal of Operational Research. – 2004. – No. 159. – P. 673-686.
4. Робертс Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам: пер. с англ. А.М. Раппопорта, С.И. Травкина / под ред. А.И. Теймана. – М.: Наука, 1986. – 496 с.
5. Кузнецов О.П., Кулинич А.А., Марковский А.В. Анализ влияний при управлении слабоструктурированными ситуациями на основе когнитивных карт: В кн. «Человеческий фактор в управлении» / под ред. Н.А. Абрамовой, К.С. Гинсберга, Д.А. Новикова. – М.: КомКнига, 2006. – С. 313-344.
6. Силов В.Б. Принятие стратегически решений в нечеткой обстановке. – М.: ИНПРО-РЕС, 1995. – 228 с.
7. Zhang J.Y., Liu Z.-Q., Zhou S. Quotient FCMs – A Decomposition Theory for Fuzzy Cognitive Maps // IEEE Transactions on fuzzy systems. October 2006. – Vol. 11, No. 5. – P. 593-604.

8. *Karlis A.D., Kottas T.L., Boutalis Y.S.* A novel maximum power point tracking method for PV systems using fuzzy cognitive networks (FCN) // *Electric Power Systems Research*. – 2007. – No. 77. – P. 315-327.
9. *Miao Y., Liu Z.Q.* On causal inference in fuzzy cognitive maps // *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* Feb. 2000. – 2000. – Vol. 8. – P. 107-119.
10. *Albert R., & Barabasi A.L.* Statistical mechanics of complex networks // *Reviews of Modern Physics*. – 2002. – No. 74 (1). – P. 47-97.
11. *Newman M.E.J.* The structure and function of complex networks. *Siam Review*. X 2003. – 45(2). – P. 167-25.
12. *Newman M.E.J.* *Networks: An Introduction*. – Oxford: Oxford University Press., 2010.
13. *Scott J.* *Social network analysis: A handbook*. – London: Sage Publications, 2000.
14. *Star X.Zh., Fred Y.Ye.* Exploring the directed h-degree in directed weighted networks // *Journal of Informetrics*. – 2012. – № 6. – P. 619-630.
15. *Романенко В.Д., Милявский Ю.Л.* Обеспечение устойчивости импульсных процессов в когнитивных картах на основе моделей в пространстве состояний // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2014. – № 1. – С. 26-42.
16. *Liu L.; Chen X.; Liu M.; Jia Y.; Zhong J.; Gao R. & Zhao Y.* An influence power-based clustering approach with PageRank-like model // *Applied Soft Computing*. – 2016. – Vol. 40. – P. 17-32.
17. *Parlett B.N.* *The Symmetric Eigenvalue Problem*. – 1980. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
18. *Smith B.T., Boyle J.M., Dongarra J.J., Garbow B.S., Ikebe Y., Klema V.C., and Matrix C.B.* *Eigensystem routines. EISPACK Guide / Moler. Lecture Notes in Computer Science*. – 2nd ed. – New York: Springer-Verlag, 1976.
19. *Hanson R.J., Lehoucq R., Stolle J., and Belmonte A.* Improved performance of certain matrix eigenvalue computations for the IMSL/MATH Library, IMSL Technical Report 9007, IMSL. – Houston, 1990.
20. *Tselykh A., Vasilev V., Tselykh L.* Fuzzy graphs clustering with quality relations functionals in cognitive models // *Proceedings of the First International Scientific Conference “Intelligent Information Technologies for Industry” (ITI’16)*; series “Advances in Intelligent Systems and Computing”, Series. Vol. 450. – 2016. – Vol. 1. – P. 349-360.
21. *Цельх А.Н., Цельх Л.А.* Методология сравнительного когнитивного моделирования на основе анализа нечетких целевых и управляющих факторов // *Известия ЮФУ. Технические науки*. – 2015. – № 7 (168). – С. 101-115.

REFERENCES

1. *Kosko B.* Fuzzy cognitive maps, *Int. Journal man-machine Studies*, 1986, No. 24, pp. 65-75.
2. *Glykas, M.* (ed.) *Fuzzy Cognitive Maps: Advances in Theory, Methodologies, Tools and Applications*. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Vol. 247. Springer: Berlin, 2010.
3. *Eden C.* Analyzing cognitive maps to help structure issues or problems, *European Journal of Operational Research*, 2004, No. 159, pp. 673-686.
4. *Roberts F.S.* *Diskretnye matematicheskie modeli s prilozheniyami k sotsial'nym, biologicheskim i ekologicheskim zadacham* [Discrete mathematical models with applications to social, biological and environmental problems]: translation from English A.M. Rappoport, S.I. Travkina, ed. by A.I. Teymana. Moscow: Nauka, 1986, 496 p.
5. *Kuznetsov O.P., Kulinich A.A., Markovskiy A.V.* Analiz vliyaniy pri upravlenii slabostrukturirovannymi situatsiyami na osnove kognitivnykh kart [Analysis of effects in the management of weakly structured situations based on cognitive maps]: *In the book «Chelovecheskiy faktor v upravlenii»* ["The human factor in management], ed. by N.A. Abramovoy, K.S. Ginsberga, D.A. Novikova. Moscow: KomKniga, 2006, pp. 313-344.
6. *Silov V.B.* Prinyatie strategicheskikh resheniy v nechetkoy obstanovke [Make strategically decisions in a fuzzy environment]. Moscow: INPRO-RES, 1995, 228 p.
7. *Zhang J.Y., Liu Z.-Q., Zhou S.* Quotient FCMs – A Decomposition Theory for Fuzzy Cognitive Maps, *IEEE Transactions on fuzzy systems*, October 2006, Vol. 11, No. 5, pp. 593-604.
8. *Karlis A.D., Kottas T.L., Boutalis Y.S.* A novel maximum power point tracking method for PV systems using fuzzy cognitive networks (FCN), *Electric Power Systems Research*, 2007, No. 77, pp. 315-327.
9. *Miao Y., Liu Z.Q.* On causal inference in fuzzy cognitive maps, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* Feb. 2000, 2000, Vol. 8, pp. 107-119.

10. Albert R., & Barabasi A.L. Statistical mechanics of complex networks, *Reviews of Modern Physics*, 2002, No. 74 (1), pp. 47-97.
11. Newman M.E.J. The structure and function of complex networks. *Siam Review*. X 2003, 45 (2), pp. 167-25.
12. Newman M.E.J. *Networks: An Introduction*. Oxford: Oxford University Press, 2010.
13. Scott J. *Social network analysis: A handbook*. London: Sage Publications, 2000.
14. Star X.Zh., Fred Y.Ye. Exploring the directed h-degree in directed weighted networks, *Journal of Informetrics*, 2012, No. 6, pp. 619-630.
15. Romanenko V.D., Milyavskiy Yu.L. Obespechenie ustoychivosti impul'snykh protsessov v kognitivnykh kartakh na osnove modeley v prostranstve sostoyaniy [Sustainability of pulse processes in the cognitive maps based on models in state space], *Sistemni doslidzhennya ta informatsiyi tekhnologii* [Systemn dozen informatin technology], 2014, No. 1, pp. 26-42.
16. Liu L.; Chen X.; Liu M.; Jia Y.; Zhong J.; Gao R. & Zhao Y. An influence power-based clustering approach with PageRank-like model, *Applied Soft Computing*, 2016, Vol. 40, pp. 17-32.
17. Parlett B.N. *The Symmetric Eigenvalue Problem*. 1980. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
18. Smith B.T., Boyle J.M., Dongarra J.J., Garbow B.S., Ikebe Y., Klema V.C., and Matrix C.B. *Eigensystem routines. EISPACK Guide, Moler. Lecture Notes in Computer Science*. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1976.
19. Hanson R.J., Lehoucq R., Stolle J., and Belmonte A. Improved performance of certain matrix eigenvalue computations for the IMSL/MATH Library, IMSL Technical Report 9007, IMSL. Houston, 1990.
20. Tselykh A., Vasilev V., Tselykh L. Fuzzy graphs clustering with quality relations functionals in cognitive models, *Proceedings of the First International Scientific Conference "Intelligent Information Technologies for Industry" (ITI'16); series "Advances in Intelligent Systems and Computing"*, Series. Vol. 450, 2016, Vol. 1, pp. 349-360.
21. Tselykh A.N., Tselykh L.A. Metodologiya sravnitel'nogo kognitivnogo modelirovaniya na osnove analiza nechetkikh tselevykh i upravlyayushchikh faktorov [Methodology for comparative cognitive modeling based on the analysis of fuzzy target and control factors], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2015, № 7 (168), pp. 101-115.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.П. Карелин.

Целых Александр Николаевич – Южный федеральный университет; e-mail: ant@sfedu.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: +79185562047; кафедра ИАСБ; д.т.н.; профессор.

Васильев Владислав Сергеевич – e-mail: vsvasilev@sfedu.ru; тел.: +79185983647; кафедра ИАСБ; к.т.н.; доцент.

Барковский Симон Антонович – e-mail: kharitonov.simon@yandex.ru; тел.: +79188522964; кафедра ИАСБ; аспирант.

Целых Лариса Анатольевна – Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (РИНХ); e-mail: larisa@tgn.sfedu.ru; 347936, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48; тел.: +79897207928; кафедра менеджмента; к.э.н.; доцент.

Tselykh Alexander Nikolaevich – Southern Federal University; e-mail: ant@sfedu.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +79185562047; the department IASB; dr. of eng. sc.; professor.

Vasilev Vladislav Sergeevich – e-mail: vsvasilev@sfedu.ru; phone: +79185983647; the department IASB; cand. of eng. sc.; associate professor.

Barkovskii Simon Antonovich – e-mail: kharitonov.simon@yandex.ru; phone: +79188522964; the department IASB; postgraduate student.

Tselykh Larisa Anatolievna – Chekhov Taganrog Institute (branch) of Rostov State University of Economics; e-mail: larisa@tgn.sfedu.ru; 48, Initsiativnaya, Taganrog, 347936, Russia; phone: +79897207928; the department of management; cand. of ec. sc.; associate professor.