УДК 681.5.075

К.В. Колоколова

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ИЗОЛИРОВАННЫХ ПОЛЮСОВ НА СВОЙСТВА УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ МНОГОМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ

Целью данной статьи является установление связи свойств управляемости, наблюдаемости и полноты многомерных объектов управления с наличием у них изолированных полюсов. В работе исследуется влияние изолирующих нулей и изолированных полюсов на возможность придания синтезируемой многомерной системе управления требуемых свойств. Приводятся определения нулей в случае одномерного и многомерного объекта, а также классификация нулей многомерного объекта, вводится понятие изолирующих нулей. Показано определение изолирующих нулей с помощью матрицы Розенброка. Дается обоснование связи свойств многомерного объекта с наличием у него изолирующих нулей. Показано влияние изолирующих нулей на свойства полноты и устойчивости многомерной системы управления. Приводится численный пример синтеза многомерной системы автоматического управления для двумерного объекта, имеющего изолирующие нули. Показано, что наличие изолирующих нулей обуславливает свойство неполноты объекта управления. Доказательство этой связи проведено на основе матриц управляемости и наблюдаемости объекта управления и матрицы Розенброка. Для синтеза многомерных систем управления удобно применять метод динамической декомпозиции многомерных объектов на ряд одномерных, позволяющий получить многомерное устройство управления по передаточной матрице многомерного объекта. В работе приведены основные этапы этого метода синтеза, в частности, расчет диагонализирующей матрицы и построение желаемых передаточных функций каналов синтезируемой многомерной системы. Если в процессе синтеза неполная, неустойчивая часть, обусловленная изолирующими нулями, не учитывается, то, как показано в статье, расчетная, полученная в результате синтеза передаточная матрица замкнутой системы окажется устойчивой. Реальная же замкнутая система, фактически, будет неустойчивой. Таким образом, изолирующие (развязанные по Розенброку) нули могут оказывать существенное влияние на качество замкнутых многомерных систем управления. Это приводит к необходимости определения изолирующих нулей и изучения характера изолированных полюсов многомерных объектов управления в процессе синтеза многомерных систем управления методом динамической декомпозиции.

Многомерный объект, многомерная система управления, изолированные полюса, изолирующие нули, метод динамической декомпозиции.

K.V. Kolokolova

RESEARCH OF THE INFLUENCE OF ISOLATED POLES ON THE CONTROLLABILITY AND OBSERVABILITY OF MULTIVARIABLE PLANTS

The purpose of this paper is to establish the connection between the properties of controllability, observability and completeness of multivariable plants with the presence of isolated poles. The aim of the paper is to study the effect of isolating zeros and isolated poles on the opportunity to give the system the desired properties. The definition of zero in the case of one-variable and multivariable plant is given. The classification of the zeros of the multivariable plant is given and the concept of isolating zeros is introduced. The definition of isolating zeros using the Rosenbrock matrix is shown. There is justified the connection between the properties of multivariable plant and the presence of isolated poles. The influence of the isolating zeros on properties of the completeness and stability of multivariable control systems is shown. There is given a numerical example of the synthesis of multivariable automatic control system to control a two-variable plant, the transfer matrix of which contains isolating zeros. It is shown that the presence of the isolating zeros causes the property of the incompleteness of the plant. To prove this statement the matrix of controllability and observability of the control object and the matrix Rosenbrock are given. For *the synthesis of multivariable control system there is convenient to use the method of dynamic decomposition of multivariable plant for a number of one-variable ones. This method allows to synthesize multivariable control for the transfer matrix of the plant. The paper presents the key synthesis steps, in particular calculation of diagonalizing matrix and building of the desired transfer functions of the channels of the closed multivariable system. If in the process of synthesis an incomplete unstable part of the multivariable plant caused by the isolating zeros is not considered so as it's shown calculated closed-loop system transfer matrix resulting synthesis seems to be stable. But actually real closed-loop system will be unstable. Thereby isolating (decoupling by Rosenbrock) zeros have a significant impact on the properties of closed-loop multivariable control systems. This makes it necessary to calculate the isolating zeros and research the multivariable plants poles character during the synthesis by the method of dynamic decomposition.*

Multivariable plant, multivariable control system, isolated poles, decoupling zeros, the method of dynamic decomposition.

Введение. Современные технические объекты характеризуются значительной сложностью, наличием нескольких взаимосвязанных каналов и регулируемых переменных. Многосвязность каналов обуславливает некоторые трудности синтеза многомерных систем автоматического управления (МСАУ) такими объектами. Эти трудности связаны, прежде всего, с устранением взаимовлияния или обеспечением необходимой связности каналов МСАУ, с определением структуры регулятора минимальной сложности, придающего системе управления устойчивость и требуемые динамические свойства [1].

В процессе разработки и исследования эффективных МСАУ необходимо учитывать свойства отдельных каналов многомерного объекта, которые определяются, в первую очередь, спектрами его нулей и полюсов [2–4]. Как в одномерном, так и в многомерном случаях эти спектры определяют такие свойства динамического объекта, как управляемость и наблюдаемость [5, 6].

От характера расположения нулей, а также от взаимного расположения нулей и полюсов динамического объекта на комплексной плоскости зависит возможность применимости того или иного метода синтеза системы управления. В частности, при наличии у многомерного объекта «правых» нулей в передаточных функциях перекрестных каналов становится невозможным введение компенсаторов перекрестных связей [7], передаточные функции которых являются обратными по отношению к соответствующим передаточным функциям объекта. Кроме того, для неминимально-фазовых объектов характерно явление отрицательного перерегулирования и возникновение так называемых «нулевых» режимов работы, когда на определенной частоте отсутствует реакция системы на изменение входного сигнала [8, 9].

Как известно, в некоторых случаях, некоторые нули и полюса одномерного объекта совпадают по значению, т.е. числитель и знаменатель его передаточной функции имеют общий множитель – полином степени m [6]. Корни этого полинома будем называть изолированными полюсами объекта. В этих случаях невозможно применение модального управления с наблюдателем состояния, которое обеспечивает произвольно заданное распределение всех полюсов системы на комплексной плоскости, поскольку не выполняется условие полноты объекта [10]. Более того, использование методов синтеза систем управления по передаточным функциям или по частотным характеристикам сопряжено с опасностью потери общего множителя и неявного получения неустойчивой системы. Эти же особенности характерны и в случае многомерных объектов.

Таким образом, при проектировании качественных систем управления как одномерными, так и многомерными динамическими объектами необходимо проводить предварительный анализ спектра их нулей [11].

Постановка задачи. Понятие нуля многомерной системы является обобщением на многомерный случай классического понятия нуля скалярной системы.

Пусть линейный, одномерный объект с входом $u(t)$ и выходом $y(t)$ описывается передаточной функцией $W_{yu}(p)$:

$$y(p) = W_{yu}(p)u(p) = \frac{B(p)}{A(p)}u(p) \cdot \tag{1}$$

Как известно, корни p_i^A, $i = \overline{1,n}$ полинома $A(p)$ называются полюсами объекта (1), а корни p_j^B, $j = \overline{1,m}$, $m < n$ полинома $B(p)$ – его нулями [6].

В классическом случае нуль скалярной передаточной функции линейного одномерного объекта соответствует такому значению комплексной частоты[1] входного сигнала, при котором сигнал на выходе объекта тождественно равен нулю. Другими словами, если один из нулей объекта имеет значение $p_i^B = j\omega_u$, т.е. $B(j\omega_u) = 0$, то при подаче на вход объекта воздействия $u(t) = u_0 e^{j\omega_u t}$, его выход будет равен нулю, так как:

$$y(j\omega) = W_{yu}(j\omega_u)u(j\omega_u) = \frac{B(j\omega_u)}{A(j\omega_u)}u_0 e^{j\omega_u t} \equiv 0,$$

при этом, естественно, $A(j\omega_u) \neq 0$.

Рассмотрим многомерный динамический объект, описываемый уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \tag{2}$$

где $\mathbf{x}$ – n-вектор состояния, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{y}$ – q- векторы управлений и управляемых переменных, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ – числовые матрицы соответствующих размерностей. Полином $A(p) = \det(p\mathbf{E}_n - \mathbf{A})$ является характеристическим полиномом объекта (2).

Передаточная матрица размерности $q \times q$ объекта (2) определяется следующим выражением:

$$\mathbf{W}_{yu}(p) = A^{-1}(p)\mathbf{C}(p) \cdot \tag{3}$$

где $\mathbf{C}(p) = \mathbf{C}\,\mathrm{adj}(p\mathbf{E}_n - \mathbf{A})\mathbf{B}$ – $q \times q$ -полиномиальная матрица.

Полюса объекта (2) определяются как собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ или как корни характеристического полинома $A(p) = \det(p\mathbf{E} - \mathbf{A})$ [6].

Аналогично одномерному случаю, нулем линейного многомерного объекта с несколькими входами и выходами называется такое значение комплексной частоты сигнала на i-том входе, при котором отсутствует передача воздействия $u(t) = u_0 e^{j\omega_u t}$ от этого входа к соответствующему i-тому выходу объекта, т.е. при $u_0 \neq 0$ и нулевых начальных условиях установившийся i-тый выход тождественно равен нулю [12, 13].

Множество нулей многомерного объекта включает в себя передаточные и изолирующие нули [12]. Множество передаточных нулей состоит из тех значений комплексной переменной $p_i = p_i^C$, при которых уменьшается ранг передаточной матрицы $\mathbf{W}_{yu}(p)$, т.е.

$$\mathrm{rank}\ \mathbf{W}_{yu}(p)\Big|_{p=p_i^C} < q,$$

тогда как при произвольных значениях переменной p $\mathrm{rank}\mathbf{W}_{yu}(p) = q$.

[1] Здесь и далее под комплексной частотой сигнала понимается значение $p = j\omega$.

Понятие *изолирующих* нулей, или развязанных по Розенброку [12], введено для ситуации, когда несколько свободных модальных составляющих вектора состояний, обусловленных соответствующими полюсами объекта, *изолированы*, или развязаны, от его входа и/или выхода. Множество изолирующих нулей обычно определяется с использованием матрицы Розенброка [12, 14]

$$\mathbf{P}(p)=\begin{bmatrix} p\mathbf{E}_n-\mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{O} \end{bmatrix}.$$

Нули, развязанные по входу, определяются как множество комплексных чисел $p=p^{C}_{\text{вх},i}$, при которых уменьшается строчный ранг матрицы

$$\mathbf{P}_{\text{вх}}(p)=[p\mathbf{E}_n-\mathbf{A} \quad -\mathbf{B}].$$

Нули, развязанные по выходу, определяются как множество комплексных чисел $p=p^{C}_{\text{вых},i}$, при которых уменьшается столбцовый ранг матрицы

$$\mathbf{P}_{\text{вых}}(p)=\begin{bmatrix} p\mathbf{E}_n-\mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}.$$

В случае если существуют значения нулей, при которых уменьшается ранг обеих матриц $\mathbf{P}_{\text{вх}}(p)$ и $\mathbf{P}_{\text{вых}}(p)$, то такие нули, по Розенброку, называются развязанными по входу-выходу.

Поставим задачу исследования связи свойств управляемости и наблюдаемости многомерных объектов управления с наличием изолированных полюсов, а также возможности придания многомерной системе управления объектом с изолированными полюсами требуемых свойств.

Синтез многомерной системы управления объектом с развязанными нулями. Согласно [12], развязанные нули обладают следующим свойством: развязанные по входу нули совпадают с неуправляемыми полюсами многомерного объекта (2), а развязанные по выходу нули совпадают с его ненаблюдаемыми полюсами. При этом полюса многомерного объекта оказываются изолированными от входа или от выхода объекта, соответственно. Указанное свойство развязанных по входу-выходу нулей многомерного объекта приводит к тому, что полученная в результате синтеза многомерная система управления является неполной.

Поясним указанное свойство на примере многомерного объекта с передаточной матрицей (3):

$$\mathbf{y}=\mathbf{W}_{yu}(p)\mathbf{u}, \tag{4}$$

причем полиномы матрицы $\mathbf{C}(p)$ и характеристический полином $A(p)$ объекта имеют общий множитель $\theta(p)\neq const$, корни которого являются изолирующими нулями и совпадают с изолированными полюсами полинома $A(p)$:

$$\mathbf{C}(p)=\theta(p)\tilde{\mathbf{C}}(p),\ A(p)=\theta(p)\tilde{A}(p). \tag{5}$$

Для синтеза многомерной системы управления этим объектом воспользуемся методом динамической декомпозиции многомерного объекта на ряд одномерных [15, 16]. Многомерное устройство управления, получаемое с помощью указанного метода, описывается уравнением

$$\mathbf{u}=\mathbf{\Pi}_{yu}(p)\mathbf{R}^{-1}(p)\big[\mathbf{Q}(p)\mathbf{g}-\mathbf{L}(p)\mathbf{y}\big],\ q\geq 2, \tag{6}$$

где $\mathbf{\Pi}_{yu}(p)=A^{2-q}(p)\mathrm{adj}\mathbf{C}(p)$ – диагонализирующая матрица; $\mathbf{R}(p)$ и $\mathbf{L}(p)$ – произвольные диагональные полиномиальные $q\times q$-матрицы, $\mathbf{Q}(p)$ – $q\times q$-матрица общего вида.

Уравнение «вход-выход» замкнутой системы управления многомерным объектом (4) и управлением (6) принимает следующий вид:

$$\mathbf{y} = A^{-1}(p)\mathbf{C}(p)\mathbf{\Pi}_{yu}(p)\mathbf{R}^{-1}(p)\left[\mathbf{Q}(p)\mathbf{g} - \mathbf{L}(p)\mathbf{y}\right].$$

С учетом равенства $\mathbf{C}(p)\mathbf{\Pi}_{yu}(p) = A(p)B_{yu}(p)\mathbf{E}_q$, доказанного в [15], после упрощения получим следующее выражение:

$$A(p)\mathbf{D}(p)\mathbf{y} = A(p)B_{yu}(p)\mathbf{Q}(p)\mathbf{g},\ \mathbf{D}(p) = \mathbf{R}(p) + B_{yu}(p)\mathbf{L}(p), \qquad (7)$$

где полином $B_{yu}(p)$ определяется из выражения $\det \mathbf{C}(p) = A^{q-1}(p)B_{yu}(p)$ и с учетом выражений (5) принимает следующее значение:

$$B_{yu}(p) = \theta(p)\tilde{A}^{1-q}(p)\det \tilde{\mathbf{C}}(p).$$

При этом имеет место равенство:

$$\det \mathbf{W}_{yu}(p) = \frac{B_{yu}(p)}{A(p)} = \frac{\theta(p)\tilde{B}_{yu}(p)}{\theta(p)\tilde{A}(p)}. \qquad (8)$$

Из выражений (5) и (8) следует, что если $\theta(p) \neq const$, то передаточная матрица $\mathbf{W}_{yu}(p)$ многомерного объекта может не содержать множителя $\theta(p)$. Поэтому в случае, если объект задан только матрицей $\mathbf{W}_{yu}(p)$, а полином $\theta(p)$ не является гурвицевым, в результате синтеза можно неявно получить неустойчивую МСАУ, так как, по выражению (7), характеристический полином $A(p)$ многомерного объекта является множителем характеристического полинома замкнутой системы.

Пример. На примере покажем влияние изолирующих (развязанных) нулей многомерного объекта управления на свойства полноты и устойчивости замкнутой многомерной системы управления. Рассмотрим многомерный объект с двумя входами и двумя выходами, уравнения в переменных состояния которого имеют вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{u},\quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}. \qquad (9)$$

Объект управления (9) имеет следующие матрицы управляемости U и наблюдаемости N:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -4 & 3 & 12 & -9 & -36 \end{bmatrix},\quad N^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -3 & -9 & 9 \end{bmatrix}.$$

Так как $\operatorname{rang} U = 3$ и $\operatorname{rang} N = 2$, объект (9) является вполне управляемым, но ненаблюдаемым и, следовательно, неполным.

Передаточная матрица многомерного объекта (9) имеет вид (3), где

$$A(p) = p^3 + 3p^2 - p - 3,\quad \mathbf{C}(p) = \begin{bmatrix} 2p^2 + 2p - 4 & 6p^2 + 4p - 10 \\ -3p^2 - 4p + 7 & -8p^2 - 8p + 16 \end{bmatrix}.$$

Корни характеристического полинома многомерного объекта имеют значения: $p_1 = -3$, $p_2 = -1$, $p_3 = 1$. Нули z_{ij}^k, $i, j, k = \overline{1,2}$ многомерного объекта, вычисленные как корни полиномов $c_{ij}(p)$ матрицы $\mathbf{C}(p)$ принимают следующие значения: $z_{11}^1 = -2$, $z_{11}^2 = 1$; $z_{12}^1 = -1{,}67$, $z_{12}^2 = 1$; $z_{21}^1 = -2{,}33$, $z_{21}^2 = 1$; $z_{22}^1 = -2$, $z_{22}^2 = 1$.

Как видно, характеристический полином объекта имеет один положительный корень, что говорит о неустойчивости многомерного объекта, а все полиномы $C_{ij}(p)$ матрицы $\mathbf{C}(p)$ имеют нуль $z_{ij}^2 = 1$. Очевидно, положительные нули $z_{ij}^2 = 1$, $i, j = \overline{1, 2}$ совпадают с положительным корнем $p_3 = 1$, т.е. полиномы $A(p)$ и $C_{ij}(p)$ $i, j = 1, 2$ имеют общий множитель $\theta(p) = p - 1$.

Покажем, что при $p = z_{ij}^2 = 1$ уменьшается столбцовый ранг матрицы $\mathbf{P}_{\text{вых}}(p)$:

$$\mathbf{P}_{\text{вых}}(p) = \left.\begin{bmatrix} p-1 & 0 & 0 \\ 0 & p+1 & 0 \\ 0 & 0 & p+3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right|_{p=1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы $\mathbf{P}_{\text{вых}}(p)$ при $p = z_{ij}^2 = 1$, очевидно *уменьшился* до 2. При этом строчный ранг матрицы $\mathbf{P}_{\text{вх}}(p)$ не изменяется:

$$\mathbf{P}_{\text{вх}}(p) = \left.\begin{bmatrix} p-1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & p+1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & p+3 & 1 & 4 \end{bmatrix}\right|_{p=1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, нуль $z_{ij}^2 = 1$, $i, j = \overline{1, 2}$ является развязанным по выходу нулем, так как совпадает с корнем p_3 характеристического полинома многомерного объекта. Отметим, что этот корень $p_3 = 1$ является корнем характеристического полинома $\theta(p)$ ненаблюдаемой, неустойчивой части объекта (9).

Покажем, что в силу этого, синтезированная многомерная система управления объектом (9) окажется неустойчивой. Для синтеза воспользуемся методом динамической декомпозиции многомерного объекта [15–20].

С этой целью найдем определитель передаточной матрицы объекта (9):

$$\det \mathbf{W}_{yu}(p) = \frac{B_{yu}(p)}{A(p)} = \frac{2p-2}{p^3 + 3p^2 - p - 3} = \frac{2}{(p^2 + 4p + 3)}.$$

Подчеркнем, что общий множитель $\theta(p) = p - 1$ полиномов $B_{yu}(p)$ и $A(p)$ здесь сократился. Это и свидетельствует о том, что это полином неполной части объекта.

Не будем пока обращать на этот факт внимания, и в соответствии с указанным выше методом найдем многомерное устройство управления по входам и выходам с относительным порядком $\mu_{\text{yy}}^* = 0$ так, чтобы замкнутая система была автономной, астатической, время регулирования $t_{\text{р}}$ не превышало 7 с, а перерегулирование было не более 5 %.

Диагонализирующая матрица для объекта (9) имеет [15] вид:

$$\mathbf{\Pi}_{yu}(p) = \operatorname{adj} \mathbf{C}(p) = \begin{bmatrix} -8p^2 - 8p + 16 & -6p^2 - 4p + 10 \\ 3p^2 + 4p - 7 & 2p^2 + 3p - 4 \end{bmatrix}.$$

С учетом требуемых показателей качества, найдем с помощью таблиц стандартных передаточных функций следующие выражения для желаемых ПФ:

$$W_{11}^{*}(p)=\frac{0,49}{p^2+0,57p+0,49},\quad W_{22}^{*}(p)=\frac{0,71}{p^2+0,69p+0,71},$$

$$W_{ij}^{*}(p)=0,\quad i,j=1,2,\quad i\neq j. \tag{10}$$

Уравнения многомерного устройства управления в результате синтеза принимают следующий вид:

$$\mathbf{u}(p)=\mathbf{\Pi}_{yu}(p)\begin{bmatrix}\dfrac{-0,25}{p^2+1,07p} & 0\\ 0 & \dfrac{-0,36}{p^2+1,40p}\end{bmatrix}(\mathbf{g}-\mathbf{y}),\quad \mathbf{\Pi}_{yu}(p)=\operatorname{adj}\mathbf{C}(p).$$

В данном случае многомерное устройство управления описывается уравнением вход-выход $\mathbf{u}(p)=\mathbf{W}_{u\varepsilon}(p)\boldsymbol{\varepsilon}(p)$, где

$$\mathbf{W}_{u\varepsilon}(p)=\begin{bmatrix}\dfrac{-2p^2+2p+4}{p^2+1,07p} & \dfrac{2,16p^2+1,44p-3,60}{p^2+1,40p}\\ \dfrac{-0,75p^2-p+1,75}{p^2+1,07p} & \dfrac{-0,72p^2-1,08p+1,44}{p^2+1,40p}\end{bmatrix}. \tag{11}$$

Не трудно убедится, что передаточная матрица замкнутой системы (9), (11) является диагональной, причем её диагональные элементы совпадают с передаточными функциями (10), т.е. $W_{ij}(p)=W_{ij}^{*}(p)\ \ i,j=1,2$. Очевидно, судя по этим передаточным функциям, система является устойчивой.

Однако в переменных состояния полученная замкнутая многомерная система управления описывается уравнениями вида

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}_{sys}\mathbf{x}+\mathbf{B}_{sys}\mathbf{u},\quad \mathbf{y}=\mathbf{C}_{sys}\mathbf{x}.$$

где матрица $\mathbf{A}_{sys}$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{A}_{sys}=\begin{bmatrix}1 & -2,97 & -0,13 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -0,07 & 0,22 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & -0,43 & -2,72 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -4\\ 0 & 2,06 & -1,73 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 6,31 & 1,08 & 1 & 0 & -1,49 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2,99 & 1,43 & 0 & 1 & -2,47 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -0,62 & 0,90 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2,00 & -0,27 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1,49\\ 0 & -0,77 & -0,48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2,47\end{bmatrix}.$$

Корни характеристического полинома $A_{sys}(p)$ этой матрицы имеют следующие значения:

$$p_1^{sys}=-3,\ p_2^{sys}=-1,40,\ p_3^{sys}=-1,07,\ p_4^{sys}=-1,$$
$$p_{5,6}^{sys}=-0,34\pm 0,77i,\ p_{7,8}^{sys}=-0,28\pm 0,64i,\ p_9^{sys}=1.$$

Как видно, характеристический полином замкнутой системы имеет положительный корень $p_9^{sys}=1$, равный корню полинома $\theta(p)$. Таким образом, наличие изолирующего положительного нуля неявно привело к синтезу неустойчивой замкнутой системы управления.

Подобная ситуация возникает и при наличии у многомерного объекта управления изолирующего, развязанного по входу нуля. Методы синтеза систем управления на основе передаточных функций объекта, как метод динамической декомпозиции, рассмотренный выше, или методы ПИД-регулирования позволяют сформировать управления в виде передаточных функций, являющихся множителями передаточных функций объекта, поэтому полином $\theta(p)$ присутствует в характеристическом полиноме замкнутой системы и избавиться от него нельзя. Если корни этого полинома имеют положительные вещественные части, то указанные управления не смогут обеспечить устойчивость замкнутой системы.

Заключение. Таким образом, если объект управления является неполным, т.е. неуправляемым или (и) ненаблюдаемым, то знаменатели и числители его передаточных функций прямых и перекрестных каналов, а также определителя его передаточной матрицы имеют общие множители, корни которых являются изолированными полюсами и изолирующими (по Розенброку – развязанными по входу или (и) по выходу) нулями, соответственно. Эти множители будут присутствовать и в характеристическом полиноме замкнутой системы. Поэтому синтез систем по передаточным функциям при неполном многомерном объекте управления может приводить к неустойчивой системе управления, хотя общий знаменатель элементов её передаточной матрицы и будет устойчивым.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ивановский Р.И., Нестеров А.В.* Синтез многомерных систем управления. Проблема устойчивости // Гироскопия и навигация. – 2011. – № 1 (72). – С. 90-94.
2. *Rosenbrock H.H.* State-space and multivariable theory. – N.Y.: Wiley, 1970. – 286 p.
3. *Буков В.Н., Максименко И.М., Рябченко В.Н.* Регулирование многосвязных систем // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 6. – С. 97-110.
4. *Asanov A.Z., Dem'yanov D.N.* Synthesis of Input/Output Matrixes for a Multi-Input Multi-Output Dynamical System by Given Zeros of Transfer Matrix // Journal of Coimputer and Systems Sciences International. – 2008. – Vol. 47, No. 6. – P. 841-850.
5. *Гайдук А.Р.* Непрерывные и дискретные динамические системы. – 2-е изд. перераб. – М.: Учебно-методический и издательский центр «Учебная литература», 2004. – 252 с.
6. *Дроздов В.Н., Абдуллин А.А.* Проблемы управления объектами с нулями передаточной функции // Труды СПИИРАН. – 2016. – № 1 (44). – С. 114-132.
7. *Кижаев С.А.* Синтез регуляторов каналов для многомерной САУ бумагомассного агрегата // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2005. – № 11. – С. 16-18.
8. *Асанов А.З., Демьянов Д.Н.* Конструирование входных/выходных матриц модели многосвязной динамической системы с заданием некоторых инвариантов // Идентификация систем и задачи управления SCIPRO’09: Труды VIII Международной конференции. – М.: ИПУ РАН, 2009. – С. 1390-1421.
9. *Асанов А.З., Демьянов Д.Н.* Аналитическое конструирование систем управления многосвязными динамическими объектами с учётом передаточных нулей // Труды XV Международной конференции «Проблемы управления и моделирования в сложных системах» (ПУМСС-2013, Самара). – Самара: Самарский научный центр РАН, 2010. – С. 218-223.
10. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-ти т. – 2-е изд. Т. 3: Синтез регуляторов систем автоматического управления / под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2004. – 616 с.
11. *Асанов А.З., Демьянов Д.Н.* Использование технологии канонизации матриц для формирования спектра системных нулей методами модального управления // Проблемы управления и моделирования в сложных системах: Труды XIII Международной конференции. – Самара: СНЦ РАН, 2011. – С. 171-176.
12. *Смагина Е.М.* Вопросы анализа линейных многомерных объектов с использованием понятия нуля системы. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1990. – 160 с.
13. *Смагина Е.М.* Нули линейных многомерных систем. Определения, классификация, применение (обзор) // Автоматика и телемеханика. – 1985. – № 12. – С. 5-33.

14. *MacFarlane A. G., Kouvaritakis B.* Geometric approach to analysis and synthesis of system zeros. Pt. 1. Square systems. Pt. 2. Non-square systems // Int. J. Control. – 1976. – Vol. 23, No. 2. – P. 149-181.
15. *Гайдук А.Р.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (Полиномиальный подход). – М.: Физматлит, 2011.
16. *Гайдук А.Р.* Синтез многомерных систем автоматического управления // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 6. – С. 5-14.
17. *Gaiduk A.R. Synthesis of Control Systems of Multivariable Objects //* Journal of Computer and Systems Sciences International. – 1998. – Vol. 37, No. 1. – P. 5-13.
18. *Gaiduk A.R., Vershinin Y.A., Jawaid A.* A *Method of Synthesis of a Multivariable System with Decoupled and Interconnected Channels //* IEEE International Symposium on Intelligent Control – Proceedings PROCEEDINGS of the 2003 IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM on INTELLIGENT CONTROL. Houston, TX, 2003. – P. 548-552.
19. *Gaiduk A.R., Plaksienko E.A., Besklubova K.V. Analytical Design of Multivariable Control Systems by Dynamical Decomposition Method //* Journal of Applied Nonlinear Dynamics. – 2014. – No. 3 (4). – P. 325-332.
20. *Гайдук А.Р., Бесклубова К.В*. Синтез автономной многомерной системы управления // Материалы Седьмой Всероссийской научно-практической конференции «Перспективные системы и задачи управления». – Таганрог, 2012. – С. 233-238.

REFERENCES

1. *Ivanovskiy R.I., Nesterov A.V.* Sintez mnogomernykh sistem upravleniya. Problema ustoychivosti [Synthesis of multivariable control systems. The problem of stability], *Giroskopiya i navigatsiya* [Gyroscopy and Navigation], 2011. No 1(72), pp. 90–94.
2. *Rosenbrock H.H.* State-space and multivariable theory. N.Y.: Wiley, 1970, 286 p.
3. *Bukov V.N., Maksimenko I.M., Ryabchenko V.N.* Regulirovanie mnogosvyaznykh system [Multidimentional systems control], *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1998, No. 6, pp. 97-110.
4. *Asanov A.Z., Dem'yanov D.N.* Synthesis of Input/Output Matrixes for a Multi-Input Multi-Output Dynamical System by Given Zeros of Transfer Matrix, *Journal of Coumputer and Systems Sciences International*, 2008, Vol. 47, No. 6, pp. 841-850.
5. *Gayduk A.R.* Nepreryvnye i diskretnye dinamicheskie sistemy [Continuous and discrete dynamical systems]. Moscow: Uchebno-metodicheskiy i izdatel'skiy tsentr «Uchebnaya literatura», 2004, 252 p.
6. *Drozdov V.N., Abdullin A.A.* Problemy upravlenija ob’ektami s nuljami peredatochnoj funkcii [Control Problems of Objects with Zeros of the Transfer Function], *Trudy SPIIRAN* [SPIIRAS Proceedings], 2016, Issue 1 (44), pp. 114-132.
7. *Kizhaev S.A.* Sintez regulyatorov kanalov dlya mnogomernoy SAU bumagomassnogo agregata [Synthesis of channels regulators for multivariable ACS of papermass unit], *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol', diagnostika* [Devices and systems. Management, monitoring, diagnostics], 2005, No. 11, pp. 16-18.
8. *Asanov A.Z., Dem'yanov D.N.* Konstruirovanie vkhodnykh/vykhodnykh matrits modeli mnogosvyaznoy dinamicheskoy sistemy s zadaniem nekotorykh invariantov [Construction of the input/output matrix of a dynamic multiply system model with the task of certain invariants], *Identifikatsiya sistem i zadachi upravleniya SCIPRO’09: Trudy VIII Mezhdunarodnoy konferentsii* [System Control and Identification Problems SCIPRO’09: Proceeding of the VIII International Conference]. Moscow: IPU RAN, 2009, pp. 1390-1421.
9. *Asanov A.Z., Dem'yanov D.N.* Analiticheskoe konstruirovanie sistem upravleniya mnogosvyaznymi dinamicheskimi ob"ektami s uchetom peredatochnykh nuley [Analytical design of multivariable dynamic object management systems, taking into account the transmission zeros], *Trudy XV Mezhdunarodnoy konferentsii «Problemy upravleniya i modelirovaniya v slozhnykh sistemakh» (PUMSS-2013, Samara)* [Proceeding of the XV International Conference “Problems of management and simulation of complex systems”]. Samara: Samarskiy nauchnyy tsentr RAN, 2010, pp. 218-223.
10. Metody klassicheskoy i sovremennoy teorii avtomaticheskogo upravleniya: Uchebnik v 5-ti t. 2-e izd. T. 3: Sintez regulyatorov sistem avtomaticheskogo upravleniya [Methods of classical and modern control theory: textbook in 5 vol. Vol. 3: Synthesis of regulators of automatic control systems], ed. by K.A. Pupkova and N.D. Egupova. Moscow, Izdatel'stvo MGTU im. N.E. Baumana. 2004, 616 p.

11. *Asanov A.Z., Dem'janov D.N.* Ispol'zovanie tehnologii kanonizacii matric dlya formirovanija spektra sistemnykh nuley metodami modal'nogo upravlenija [Using the canonization matrix technology for the formation of the spectrum of the system zeros modal control techniques], Problemy upravleniya i modelirovaniya v slozhnyh sistemah: trudy XIII Mezhdunarodnoy konferencii [Problems of management and simulation of complex systems: Proceedings of XIII International conference]. Samara: SSCRAS, 2011, pp. 171-176.
12. *Smagina E.M.* Voprosy analiza lineynykh mnogomernykh ob"ektov s ispol'zovaniem ponyatiya nulya sistemy [Problems of linear multivariate objects analysis using the concept of system's zero]. Tomsk: Izd-vo Tomskogo un-ta, 1990, 160 p.
13. *Smagina E.M.* Nuli lineynykh mnogomernykh sistem. Opredeleniya, klassifikatsiya, primenenie (obzor) [Zeros of linear multivariable systems. Definitions, classification, application (review)], *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1985, No 1, pp. 5-33.
14. *MacFarlane A. G., Kouvaritakis B.* Geometric approach to analysis and synthesis of system zeros. Pt 1. Square systems. Pt 2. Non-square systems, *Int. J. Control,* 1976, Vol. 23, No. 2, pp. 149-181.
15. *Gayduk A.R.* Teoriya i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomatiche-skogo upravleniya (Polinomial'nyy podkhod) [The theory and methods of analytical synthesis of automatic control systems (polynomial approach)], Moscow, Fizmatlit, 2011.
16. *Gayduk A.R.* Sintez mnogomernykh sistem avtomaticheskogo upravleniya [Synthesis of multivariable automatic control systems], *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1995, No 6, pp. 5-14.
17. *Gaiduk A.R.* Synthesis of Control Systems of Multivariable Objects, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 1998, Vol. 37, No. 1, pp. 5-13.
18. *Gaiduk A.R., Vershinin Y.A., Jawaid A.* A Method of Synthesis of a Multivariable System with Decoupled and Interconnected Channels, *IEEE International Symposium on Intelligent Control - Proceedings Proceedings of the 2003 IEEE International Symposium on Intelligent Control. Houston, TX, 2003*, pp. 548-552.
19. *Gaiduk A.R., Plaksienko E.A., Besklubova K.V.* Analytical Design of Multivariable Control Systems by Dynamical Decomposition Method, *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, 2014, No 3 (4), pp. 325-332.
20. *Gayduk A.R., Besklubova K.V.* Sintez avtonomnoy mnogomernoy sistemy upravleniya [Synthesis of autonomous multivariable control system], *Materialy Sed'moy Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Perspektivnye sistemy i zadachi upravleniya»* [Proceedings of the Seventh All-Russian scientific-practical conference "Advanced system management tasks."]. Taganrog, 2012, pp. 233-238.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Р.А. Нейдорф.

Колоколова Ксения Валериевна – Южный федеральный университет; e-mail: kbesklubova@mail.ru; 347900, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 89518201773; кафедра систем автоматического управления; аспирант.

Kolokolova Ksenia Valerievna – Southern Federal University; e-mail: kbesklubova@mail.ru; 44, Nekrasovsky lane, Taganrog, 347900, Russia; phone: +79518201773; the department of automatic control systems; postgraduate student.