УДК 519.61

В.Н. Лутай, Н.Ш. Хусаинов

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОПЕРАЦИИ ОТСЕЧЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ НОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается способ повышения устойчивости решения систем нормальных уравнений. Такие системы линейных алгебраических уравнений широко применяются при обработке экспериментальных результатов для вычисления коэффициентов регрессии, оценивания и идентификации параметров систем управления. Наиболее распространенным способом их решения является метод квадратных корней (метод Холецкого), который преобразует квадратную симметричную матрицу системы уравнений к произведению двух треугольных матриц. Он относится к прямым алгоритмам решения СЛАУ и является наиболее экономичным среди них. Вместе с тем существуют системы нормальных уравнений, для решения которых метод квадратных корней использован быть не может. Это системы с плохо обусловленной матрицей коэффициентов, т.е. такие, в которых небольшое изменение свободных коэффициентов приводит к значительным изменениям решения. При их решении возможен срыв вычислений вследствие появления отрицательного подкоренного выражения. Это обстоятельство сужает область применения метода Холецкого и вынуждает использовать другие прямые и итеративные алгоритмы с большей трудоемкостью. В качестве способа предотвращения такого явления в работе предлагается использовать при вычислении подкоренного выражения операцию отсечения младших разрядов произведения (квадрата) двух чисел. Введение операции, нестандартной для вычислительной схемы, приводит к появлению ошибок разложения матрицы на треугольные сомножители. Полученное решение является приближенным решением исходной системы или, что то же самое, точным решением системы, в которой некоторые диагональные члены исходной матрицы увеличены. Величины ошибок разложения могут быть определены по ходу вычислений и использованы для получения точного решения исходной системы, для чего требуется некоторое количество дополнительных операций. В работе приведены результаты экспериментов с известной матрицей Гильберта, которая часто используется в качестве тестовой при проверке эффективности вычислительных процедур.

Нормальные уравнения; метод квадратных корней; плохо обусловленные системы уравнений; отсечение младших разрядов произведения.

V.N. Lutay, N.S. Khusainov

THE USE OF CLIPPING OPERATIONS WHEN SOLVING NORMAL SYSTEMS OF EQUATIONS

The paper considers a method for increasing the stability of solutions of systems of normal equations. Such systems of linear algebraic equations are widely used in processing experimental results for calculating regression coefficients, estimating and identifying control system parameters and in other applied problems in which the method of least squares is used. The most common method for solving them is the method of square roots (the Cholesky method), which transforms the square symmetric matrix of the system of equations to the product of two triangular matrices. It refers to direct algorithms for solving SLAE and is the most economical among them. At the same time, there are systems of normal equations for which the square root method can not be used. These are systems with an ill-conditioned matrix of coefficients, i.e. such in which a small change in the free coefficients leads to significant changes in the solution. When solving them, the calculation can fail because of the appearance of a negative subordinate expression. This circumstance narrows down the scope of the method of Cholesky and compels us to use other direct and iterative algorithms with greater laboriousness. As a way to prevent the process of computation from disrupting the work, it is proposed to use the operation of clipping the least significant digits of the product (square) of two numbers in the calculation of the radicand expression. The introduction of an operation that is non-standard for a computational scheme leads to the appearance of errors in the expansion of the matrix into triangular factors. The solution obtained is an approximate solution of the original system or, what is the same, the exact solution of the system in which some of the diagonal terms of the original matrix are increased. The values of the expansion errors can be determined in the course of the calculations and used to obtain an exact solution of the *original system, for which a number of additional operations are required. The paper presents the results of experiments with the known Hilbert matrix, which is often used as a test in testing the effectiveness of computational procedures.*

Normal equations; Cholesky method; ill-conditioned system of equations; clipping of the least significant bits.

Введение. Нормальные системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b \tag{1}$$

широко используются в прикладных задачах, использующих метод наименьших квадратов [1–6].

Матрица системы квадратная, плотная, симметричная и положительно определенная; ее норма невелика и сравнима с ее порядком n; матрица может быть плохо обусловленной: ее строки (столбцы) близки к линейной зависимости. Основной метод решения нормальных систем – метод квадратных корней (метод Холецкого). Результатом вычислений является формирование треугольной матрицы такой, что

$$A = L_A {L_A}^T, \tag{2}$$

где L_A – нижняя треугольная матрица, ${L_A}^T$ – матрица, транспонированная к ней.

Схема вычисления элементов треугольной матрицы [7] приведена ниже.

$$\begin{gathered} l_{A11} = {a_{11}}^{1/2}, \qquad l_{Aj1} = a_{j1}/l_{11},\ j > i, \\ l_{Aii} = \left(a_{ii} - \textstyle\sum_{k=1}^{i-1} l_{Aik}^2\right)^{1/2},\ i > 1, \\ l_{Aji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{Aik} l_{Akj}\right) \Big/ l_{Aii},\ \ j > i. \end{gathered} \tag{3}$$

После получения элементов L_A решаются две системы с треугольными матрицами

$$L_A z = b, L_A^T z = x\,. \tag{4}$$

Метод Холецкого является самым экономичным и точным среди прямых методов решения линейных систем. Количество операций для (3) и (4) оценивается как $\frac{n^3}{3}$ и n^2 соответственно, между тем как метод LU-разложения (Гаусса) требует для получения треугольных матриц $\frac{2n^3}{3}$ операций.

Основной вычислительной операцией при разложении матрицы является вычисление скалярного произведения двух n-мерных векторов. При этом в обычном режиме умножение двух чисел с плавающей точкой, имеющих t-разрядную мантиссу, сопровождается отсечением (возможно, с округлением) t младших разрядов $2t$-разрядного произведения. При этом сумма произведений подсчитывается с относительной погрешностью, пропорциональной n. Для ее уменьшения предусматривается выполнение скалярного произведения с накоплением: n произведений двух t-разрядных чисел накапливаются в $2t$-разрядном регистре и полученная сумма округляется до t разрядов только при выполнении следующей после скалярного произведения операции. Такой режим вычисления скалярного произведения является общепринятым в вычислительных методах и обозначается fl_2.

Недостатком метода Холецкого является возможное появление при вычислении очередного значения l_{Aii} в (3) отрицательного подкоренного выражения, вследствие чего вычислительный процесс прерывается. Теоретически при положительно определенной матрице A такого явления происходить не должно. Однако при большом числе обусловленности матрицы A вследствие накопления ошибок подкоренное выражение может стать отрицательным. Это обстоятельство ограничивает использование метода только случаями систем уравнений с хорошо обусловленными матрицами [8]. В [10] высказано предположение, что для плохо обусловленных матриц ошибки округления, накапливающиеся в процессе вычислений, играют меньшую роль, чем ошибки представления коэффициентов матрицы. Поэтому режим накопления и, вообще, применение арифметики длинных чисел [11] не может служить панацеей от появления отрицательного значения под корнем.

Этот обстоятельство приводит к тому, что вместо метода Холецкого в задачах с использованием метода наименьших квадратов из-за опасения плохой обусловленности матрицы СЛАУ применяют алгоритмы ортогональных разложений, в частности, QR-алгоритм, несмотря на то, что трудоемкость его в 4 раза выше [9].

Одним из способов, увеличивающих эффективность существующих алгоритмов решения СЛАУ, является предобуславливание исходной матрицы, т.е. выполнение таких процедур, которые уменьшают число обусловленности исходной матрицы или изменяют ее структуру для экономии машинной памяти [12–15]. К таким способам относится увеличение диагональных членов исходной матрицы. В [16] это единственный способ получить решение с минимальной невязкой и минимальной нормой, если матрица A или очень плохо обусловлена или особенная (имеет множество решений). В библиотеке вычислительных алгоритмов MKL PARDISO [17] делают т.н. диагональный сдвиг, прибавляя небольшое число ко всем диагональным членам матрицы. При этом ясно, что любое искажение исходной матрицы приводит к неточному ответу и чем больше таких искажений, тем больше дополнительных операций нужно выполнить для получения точного решения (если оно вообще существует). В частности, необходимо выполнять итерационное уточнение полученного решения.

В настоящей работе предлагается ввести в стандартную схему вычисления операцию отсечения младших разрядов произведения, следствием которой является увеличение диагональных членов треугольной матрицы L в процессе вычисления и предотвращение срыва вычислительного процесса. Полученная матрица отличается от матрицы L_A так, как будто диагональные члены исходной матрицы увеличены на некоторое значение. При этом отсечения выполняются только в том случае, когда подкоренное выражение или близко к переходу через 0, или уже стало отрицательным.

Метод. Формально операцию отсечения определим следующим образом. Положим, что результат выражения xy, где x, y числа с плавающей точкой, имеет некоторое количество значащих цифр p при количестве разрядов мантиссы, равном t. Введем целое положительное число τ такое, что $0 \le \tau \le t$. Обозначим $fl_\tau(xy)$ результат этого выражения, в котором отсечены τ младших десятичных разрядов. Тогда

$$fl_\tau(xy) = xy \ \text{ при } p \le t - \tau \ \text{ и } \ |fl_\tau(xy)| < |xy| \ \text{ при } p > t - \tau,$$
$$p = 1,2,\dots,t$$

и выражение для вычисления i-го диагонального элемента с отсечением примет следующий вид:

$$l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} fl_\tau(l_{ik}^2)\right)^{1/2}.$$

Так как все диагональные члены исходной матрицы a_{ii} положительны, то значения l_{ii} при количестве значащих цифр, превышающем значение τ, увеличиваются.

Отсечение реализуется программным путем; по сложности ее можно сравнить с накоплением. Но действует она ровно наоборот, не увеличивая, а уменьшая разрядность произведения. Необходимое для нее условие превышения количества значащих разрядов $p > \tau$ выполняется естественным образом при выполнении операций возведения в квадрат и деления чисел со значащими десятичными разрядами.

Введение дополнительной операции, не предусмотренной схемой (3), приводит к тому, что разложение Холецкого оказывается неполным и в (2) , записанном как

$$M = LL^T = A + N,$$

выражения для членов матриц M и N выглядят следующим образом

$$m_{ij} = a_{ij}, \qquad i \neq j$$
$$n_{ii} = \sum_{k=1}^{i-1}({l_{ik}}^2 - fl_\tau({l_{ik}}^2)), \tag{5}$$
$$m_{ii} = a_{ii} + n_{ii}, \qquad i > 1.$$

Матрица M так же, как и матрица A, симметричная и положительно определенная; ее норма практически совпадает с нормой A. Матрица N диагональная с нулевым первым диагональным членом. Значения n_{ii} уменьшаются с уменьшением количества отсеченных разрядов. При $\tau = 0$ все $n_{ii} = 0$, а M, L совпадают с матрицами A, L_A. Значения n_{ii}, необходимые для последующей корректировки решения, можно получить после окончания неполного разложения вычитанием из M матрицы A, но целесообразно запоминать их в процессе разложения в дополнительном векторе.

Решение СЛАУ с матрицей M

$$M\tilde{x} = b,$$

дает приближенное решение системы (1). Степень приближения к точному решению зависит от количества отсекаемых разрядов: чем меньше τ, тем меньше невязка решения и наоборот. При τ =0 решение системы является точным.

Нетрудно показать, что $\tau > 0$ точное решение можно получить из следующего выражения:

$$M^{-1}(M - N)x = M^{-1}b$$
$$x = (I - M^{-1}N)^{-1}M^{-1}b, \tag{6}$$

где I – единичная матрица.

Из сравнения (6) и выражения $x = A^{-1}b$ следует, что

$$A^{-1} = (I - M^{-1}N)^{-1}M^{-1},$$

т.е. обратную матрицу системы (1) можно представить как произведение двух матриц.

Так как

$$\left|\left|A^{-1}\right|\right| \leq \left|\left|(I - M^{-1}N)^{-1}\right|\right|.\left|\left|M^{-1}\right|\right|, \tag{7}$$

то нормы обратных матриц в правой части могут быть меньше нормы матрицы A^{-1}. Норма матрицы M практически совпадает с нормой матрицы A, поэтому это же можно сказать и о числах обусловленности матриц; к тому же известно, что увеличение диагональных членов симметричной положительно определенной матрицы приводит к уменьшению числа ее обусловленности, т.е. число обусловленности матрицы M точно меньше числа обусловленности матрицы A.

Оценим количество вычислительных операций для получения точного решения системы (1) согласно (6), для чего перепишем его следующим образом:

$$(I - M^{-1}N)x = \tilde{x}$$

или

$$Zx = \tilde{x}. \tag{8}$$

Для получения вектора $\hat{x}$ в правой части (8) выполняется такое же количество операций, как и в стандартном методе квадратных корней. Матрица $M^{-1}N$ имеет столько ненулевых столбцов, сколько имеется ненулевых членов в матрице N, при этом индекс диагонального члена n_{ii} соответствуют номеру ненулевого столбца в $M^{-1}N$. Для вычисления элементов матрицы нет необходимости обращать матрицу M, а, имея k элементов на диагонали матрицы N, решить k систем с матрицей M и вектором с единственным ненулевым элементом в правой части:

$$My^i = n_{ii}, i \in 1, k.$$

Так как треугольное разложение матрицы M уже выполнено, то один столбец y^i вычисляется согласно (4) за n^2 операций.

Матрица Z кроме единиц на главной диагонали имеет k плотных столбцов. Решить систему (8) можно двумя способами: непосредственным обращением матрицы Z или использованием метода исключения Гаусса. (Матрица Z несимметричная, поэтому метод квадратных корней использовать нельзя). Выберем первый:

$$x = Z^{-1}\tilde{x}. \qquad (9)$$

Исходя из верхней оценки количества операций для обращения плотной матрицы n^3, трудоемкость обращения матрицы Z примем равной nk^2. Умножение матрицы на вектор в (9) даст нам еще nk операций. Общее количество дополнительных операций после получения треугольного разложения составит $kn(n + k + 1)$. Таким образом, трудоемкость вычисления точного решения при неполном разложении по сравнению со стандартным определяется количеством диагональных членов, к которым применяется отсечение.

Из выражения для членов матрицы M в (5) следует, что такую матрицу можно сформировать, добавив какие-либо значения к диагональным элементам исходной матрицы, воспользоваться стандартным разложением, а затем получить точное решение. Однако при этом возникают два вопроса. Первый: зачем выполнять дополнительные операции, если исходная матрица хорошо обусловлена. Второй: если известно, что матрица плохо обусловлена, то какое минимальное количество диагональных членов надо увеличить, чтобы стабилизировать решение. На эти вопросы априорно ответить затруднительно.

С другой стороны, режим отсечения может быть задействован в процессе вычисления треугольной матрицы L для произвольного одного или нескольких ее диагональных членов. Признаком необходимости отсечения может являться последовательное уменьшение диагональных членов матрицы L, наблюдаемое в процессе ее вычисления и характерное для плохо обусловленных матриц. Помимо этого, при обнаружении отрицательного подкоренного выражения можно вернуться к предыдущему диагональному члену и пересчитать его с помощью отсечения (см. табл. 1). Поэтому процедуру решения СЛАУ, включающую стандартные операции метода Холецкого и операцию отсечения, можно назвать адаптивной к вычислительному контексту.

Результаты. Вычислительные эксперименты, результаты которых приведены ниже, выполнялись с известной матрицей Гильберта, которая является симметричной, положительно определенной и очень плохо обусловленной, причем число обусловленности резко возрастает при увеличении n [18–20]. Из-за такой плохой обусловленности матрицы Гильберта часто используют в качестве тестов для вычислительных процедур. Причиной большого числа обусловленности является почти линейная зависимость строк (столбцов) матрицы.

Вычисления проводились без режима накопления в формате double с 17-ю разрядной мантиссой. Результаты экспериментов со срывом вычислительного процесса для порядка матрицы $n = 8$ и n=10 приведены в первых трех столбцах таблицы 1. В ней отмечены индексы диагональных членов, вычисление которых срывается из-за отрицательного подкоренного выражения.

Рассмотрим срыв для n=8 подробно. Вычисление l_{88} прекращается, потому что подкоренное выражение меньше нуля. Формула для вычисления этого элемента следующая:

$$l_{88}^2 = a_{88} - \sum_{j=1}^{7} l_{8j}^2. \quad (10)$$

Согласно (3) при вычислении l_{8j} соответствующие выражения делятся на l_{77}. При увеличении последнего с помощью отсечения правая часть (10) увеличивается. Вычислительный процесс завершается нормально, если $\tau \geq 13$. При этом в матрице N появляется единственный ненулевой элемент n_{77}, из чего следует, что величина погрешности из-за неточного представления исходной матрицы и ошибок округления, которая накопилась к моменту вычисления l_{77}, не превышает n_{77}. (Более точно погрешность можно оценить, если при отсечении оперировать не десятичными, а двоичными разрядами.) Заметим, что элемент l_{77} увеличивается и при введении отсечения для l_{66}.

Для n=10 срыв вычислительного процесса происходит при вычислении l_{88}, а после его стабилизации для $l_{10,10}$. Поэтому для нормального завершения процесса в этом случае можно делать отсечения для l_{77} и l_{99}.

При решении уравнений свободные члены системы были подобраны так, что решением является единичный вектор. В последнем столбце таблицы 1 приведены значения максимального отклонения полученного решения от идеального. При этом надо учитывать, что количество значащих цифр элементов матрицы и свободных членов для n=8 и n=10 было 8 и 10 соответственно.

В 5-м и 6-м столбцах матрицы приведены евклидовы нормы треугольной матриц L и Z.

Как следует из оценки дополнительных операций, приведенной выше, их количество для n=8 равно 80, а для n=10 – 260, т.е. не превосходит $\frac{n^3}{3}$. Таким образом, сохраняется оценка трудоемкости разложения Холецкого как минимальной среди известных прямых методов решения СЛАУ.

Таблица 1

Срыв вычислительного процесса для матрицы Гильберта

n	$\|\|A^{-1}\|\|$	Сорванный элемент	Отсечение на	$\|\|L^{-1}\|\|$	$\|\|Z^{-1}\|\|$	$n_{i,i}$	ε
8	$1{,}27_{10}8$	l_{88}	l_{77}	$2{,}2_{10}4$	$1{,}4_{10}3$	$1{,}56_{10}$-5,i=7	$1{,}0_{10}$-8
10	$2{,}0_{10}12$	$l_{88}, l_{10,10}$	l_{77}, l_{99}	$2{,}7_{10}4$	$1{,}4_{10}5$	$1{,}6_{10}$-3,i=7; $2{,}2_{10}$-3,i=9;	$1{,}0_{10}$-6

Заключение. Приведенные рассуждения и результаты экспериментов показывают, что введение операции отсечения в метод Холецкого может служить эффективным средством повышения устойчивости вычислительного процесса при решении систем нормальных уравнений без существенного увеличения количества операций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кабанов С.А.* Оптимизация динамики систем при действии возмущений. – М.: Физматлит, 2008. – 200 с.
2. *Шебшаевич В.С., Дмитриев П.П., Иванцевич Н.В. и др.* Сетевые спутниковые радионавигационные системы / под ред. В.С. Шебшаевича. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1993. – 408 с.
3. *Азарсков В.Н., Житецкий Л.С.* Параметрическая идентификация многосвязного статического объекта в замкнутом контуре управления: специальный случай // Труды XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-201. Москва 16-19 июня 2014 г. – С. 2764-2776.
4. *Губанов В.С.* Обобщенный метод наименьших квадратов: монография. – СПб.: Наука, 1997. – 318 с.

5. *Дорф Р., Бишоп Р.* Современные системы управления. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.
6. *Гайдышев И.* Анализ и обработка данных. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2001. – 750 с.
7. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. − М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 320 с.
8. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления: пер. с англ. – М.: Мир, 1999. – 548 с.
9. *Горбаченко В.И.* Вычислительная линейная алгебра с примерами на MATLAB. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 320 с.
10. *Уилкинсон Дж.* Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Изд-во Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1970. – 565 с.
11. *Кнут Д.Э.* Искусство программирования. Т. 2. Получисленные алгоритмы – The Art of Computer Programming. – М.: Вильямс, 2001.
12. *Баландин М.Ю., Шурыгина Э.П.* Методы решения СЛАУ большой размерности. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. – 70 с.
13. *Ильин В.П.* Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. – М.: Физматлит, 1995. – 284 с.
14. *Saad Y.* Iterative Methods for Sparse Linear Systems. – New York: PWS Publ., 1996.
15. *Stone H.L.* Iterative Solution of Implicit Approximations of Multidimensional Partial Differential Equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1968. – No. 5 (3). – P. 530-558.
16. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 285 с.
17. Intel MKL PARDISO solver. – Режим доступа: https://software.intel.com/en-us/mkl-developer-reference-fortran-intel-mkl-pardiso-parallel-direct-sparse-solver-interface (дата обращения: 09.11.2017).
18. *Lutay V.N., Khusainov N.S.* Compensation of the computation errors in solving equation in navigation systems // International journal of applied engineering research. – 2016. – Vol. 11. – P. 11555-11559. – ISSN 0073-4562.
19. *Форсайт Дж., Моллер К.* Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. – М.: Мир, 1969. – 164 с.
20. *Майстренко А.В., Светлаков А.А., Черепанов А.А.* Исследование свойств матрицы Гильберта и причин ее плохой обусловленности // Омский научный вестник. – 2011. – № 3 (103). – С. 265-269.

REFERENCES

1. *Kabanov S.A.* Optimizatsiya dinamiki sistem pri deystvii vozmushcheniy [Optimization of system dynamics under the action of disturbances]. Moscow: Fizmatlit, 2008, 200 p.
2. *Shebshaevich V.S., Dmitriev P.P., Ivantsevich N.V. i dr.* Setevye sputnikovye radionavigatsionnye sistemy [Network satellite navigation system], ed. by V.S. Shebshaevicha. 2nd ed. Moscow: Radio i svyaz', 1993, 408 p.
3. *Azarskov V.N., Zhitetskiy L.S.* Parametricheskaya identifikatsiya mnogosvyaznogo staticheskogo ob"ekta v zamknutom konture upravleniya: spetsial'nyy sluchay [Parametric identification of multivariable static object in a closed control loop: special case], *Trudy XII Vserossiyskoe soveshchanie po problemam upravleniya VSPU-201. Moskva 16-19 iyunya 2014 g.* [Proceedings of XII all-Russian meeting on control problems VCPU-201. Moscow, 16-19 June, 2014], pp. 2764-2776.
4. *Gubanov V.S.* Obobshchennyy metod naimen'shikh kvadratov: monografiya [The generalized least squares method: monograph]. Saint Petersburg: Nauka, 1997, 318 p.
5. *Dorf R., Bishop R.* Sovremennye sistemy upravleniya [Modern control system]. Moscow: Laboratoriya bazovykh znaniy, 2002, 832 p.
6. *Gaydyshev I.* Analiz i obrabotka dannykh. Spetsial'nyy spravochnik [Analysis and data processing. A special Handbook]. Saint Petersburg: Piter, 2001, 750 p.
7. *Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A.* Matritsy i vychisleniya [Matrix and calculations]. Moscow: Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1984, 320 p.
8. *Golub Dzh., Van Loun Ch.* Matrichnye vychisleniya [Matrix calculations]: translation from english. Moscow: Mir, 1999, 548 p.

9. *Gorbachenko V.I.* Vychislitel'naya lineynaya algebra s primerami na MATLAB [Computational linear algebra with examples in MATLAB]. Saint Petersburg: BKhV-Peterburg, 2011, 320 p.
10. *Uilkinson Dzh.* Algebraicheskaya problema sobstvennykh znacheniy [The algebraic problem of eigenvalues]. Moscow: Izd-vo Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1970, 565 p.
11. *Knut D.E.* Iskusstvo programmirovaniya. T. 2. Poluchislennye algoritmy – The Art of Computer Programming [The art of computer programming. Vol. 2. Polycycline algorithms The Art of Computer Programming]. Moscow: Vil'yams, 2001.
12. *Balandin M.Yu., Shurygina E.P.* Metody resheniya SLAU bol'shoy razmernosti [Methods of solving systems of linear equations of large dimension.]. Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2000, 70 p.
13. *Il'in V.P.* Metody nepolnoy faktorizatsii dlya resheniya algebraicheskikh system [Methods of incomplete factorization for the solution of algebraic systems]. Moscow: Fizmatlit, 1995, 284 p.
14. *Saad Y.* Iterative Methods for Sparse Linear Systems. New York: PWS Publ., 1996.
15. *Stone H.L.* Iterative Solution of Implicit Approximations of Multidimensional Partial Differential Equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1968, No. 5 (3), pp. 530-558.
16. *Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya.* Metody resheniya nekorrektnykh zadach [Methods of solving ill-posed problems]. Moscow: Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1979, 285 p.
17. Intel MKL PARDISO solver. Available at: https://software.intel.com/en-us/mkl-developer-reference-fortran-intel-mkl-pardiso-parallel-direct-sparse-solver-interface (accessed 09 November 2017).
18. *Lutay V.N., Khusainov N.S.* Compensation of the computation errors in solving equation in navigation systems, *International journal of applied engineering research,* 2016, Vol. 11, pp. 11555-11559. ISSN 0073-4562.
19. *Forsayt Dzh., Moller K.* Chislennoe reshenie sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy [Numerical solution of systems of linear algebraic equations]. Moscow: Mir, 1969, 164 p.
20. *Maystrenko A.V., Svetlakov A.A., Cherepanov A.A.* Issledovanie svoystv matritsy Gil'berta i prichin ee plokhoy obuslovlennosti [The study of the properties of the matrix Hilbert, and the reasons for its poor conditioning], *Omskiy nauchnyy vestnik* [Omsk scientific Bulletin], 2011, No. 3 (103), pp. 265-269.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.П. Карелин.

Лутай Владимир Николаевич – Южный федеральный университет; e-mail vnlutay@sfedu.ru; 347928, г. Таганрог, ул. Энгельса, 1; тел.: 89282276002; кафедра МОП ЭВМ; доцент.

Хусаинов Наиль Шавкятович – e-mail: khusainov@sfedu.ru; тел.: 88634393545; кафедра МОП ЭВМ; зав. кафедрой.

Lutay Vladimir Nikolaevich – Southern Federal University; e-mail: vnlutay@sfedu.ru; 1, Engel'sa street, Taganrog, 347928, Russia; phone: +79282276002; the department of software engineering; associate professor.

Khusainov Nail' Shavkyatovich – e-mail: khusainov@sfedu.ru; phone: +78634393545; the department of software engineering; head the department.