

УДК 519.87

Е.Я. Рубинович

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ-УКЛОНЕНИЯ ДВУХ ЦЕЛЕЙ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА РАЗВОРОТ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЯ\***

*Рассматриваемая в работе дифференциальная игра относится к классу дифференциальных игр преследования-уклонения, в которых преследователей меньше, чем целей. Цели обычно образуют коалицию, так что преследователям приходится иметь дело с групповой целью. Чтобы игра имела смысл, динамика преследователей в таких играх должна позволять реализовывать поимку (сближение, и т.п.) хотя бы одной цели. Этот класс тесно примыкает к играм, в которых, наоборот, целей меньше, чем преследователей. В таких играх, как правило, «неуклюжие» преследователи ловят «юрких» убегающих. Для корректной постановки в этих играх преследователи обычно снабжаются «зонами захвата», при попадании в которые убегающий считается пойманным. В последнее время особый интерес привлекается к играм трех игроков типа Атакующий-Цель-Защитник (Attacker-Target-Defender или Missile-Target-Defender, соответственно АТДилиМТДигры). В этих постановках атакующий игрок стремится поймать (поразить) убегающую цель, в то время как задача мобильного защитника – успеть перехватить атакующего игрока. В настоящей работе дается постановка и решение задачи из еще одного интересного класса дифференциальных игр – игр преследования-уклонения с ложной целью. А именно, на плоскости рассматривается дифференциальная игра одного преследователя против коалиции из двух согласованно уклоняющихся целей, одна из которых является ложной. Вероятности классификации целей заданы. Цели обладают простыми движениями. Преследователь имеет ограничение на минимально допустимый радиус разворота. Критерием служит математическое ожидание расстояния до истинной цели в терминальный момент времени, который заранее не фиксирован и выбирается преследователем в процессе преследования. Найдена седловая точка игры в программных и позиционных стратегиях. Приводятся иллюстрирующие примеры.*

*Игра преследования-уклонения; ложные цели.*

E.Ya. Rubinovich

**TWO TARGETS PURSUIT-EVASION DIFFERENTIAL GAME WITH A RESTRICTION ON THE REVERSAL OF PURSUER**

*The differential game considered in this paper belongs to the class of differential pursuit-evasion games in which the pursuers are less than the targets. Targets usually form a coalition, so pursuers have to deal with a group target. For the game to make sense, the dynamics of pursuers in such games should allow to realize capture (approaching, etc.) of at least one target. This class is closely adjacent to the games in which, on the contrary, targets are less than pursuers. In such games, as a rule, "clumsy" pursuers catch "brisk" escapers. For a statement to be correct in these games the pursuers, usually, are supplied with "areas of capture", and when being inside them the escapers are considered to be caught. Recently, a special interest is attracted to games with three players of such types as Attacker-Target-Defender or Missile-Target-Defender, respectively, ATD or MTD. In these statements, the attacking player seeks to catch (hit) the fleeing target, while the task of the mobile defender is to catch the attacking player. In this paper, we give a statement and a solution to the problem of another interesting class of differential games, namely a pursuit-evasion games with a false target. Namely, the differential game of one pursuer against a coalition of two coherently dodging targets, one of which is false, is considered on the plane. The probabilities of target classification are given. The targets have simple movements. The pursuer has a restriction on the minimum allowable turning radius. The main criterion is the mathematical expectation of the distance to the true target of the terminal point in time that is not fixed in advance and chosen by the pursuer in the process of a pursuit. The saddle point of the game in program and positional strategies was found. Illustrative examples are given.*

*Game of pursuit-evasion; false targets.*

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ, Грант № 16-08-01076.

**Введение.** Рассматриваемая постановка относится к классу дифференциальных игр преследования-уклонения с групповой целью. Специфика этих задач состоит в том, что преследователей меньше чем целей, причем среди целей могут быть и ложные. Эти задачи, в свою очередь, подразделяются на дифференциальные игры поочередного и совместного преследования. В первом классе, как правило, в задачу преследователя входит поочередная поимка всех целей или же всех истинных целей, если преследователь имеет возможность классифицировать цели с определенной дистанции или при непосредственном контакте. В случае совместного преследования в задачу преследователя входит сближение непосредственно с группой целей. При этом и в первом и во втором случаях могут использоваться критерии оптимизации процесса преследования-уклонения типа «Время» или типа «Промаш». Например, минимизация времени преследования всех целей или минимизация математического ожидания промаха до истинной цели и т.п. В простейшей постановке, т.е. при простых (безынерционных) движениях игроков, задачи совместного преследования двух целей рассматривались в [1]. Простейшие задачи поочередного преследования двух целей исследовались в [2–6]. В [7] решались задачи использования мобильной ложной цели для отвлечения преследователя в предположении известных законов наведения и круговой зоны захвата (обнаружения) у преследователя. В [11] ложная цель использовалась для перехвата всех опасных траекторий движения преследователя, снабженного зоной обнаружения секторного типа. В постановке предполагалось известным только начальный пеленг на преследователя. Его начальное положение и направление движения для истинной цели считаются не известными. Работы [11–20] относятся к новому и быстро развивающемуся направлению дифференциальных игр трех игроков типа Атакующий-Цель-Защитник (Attacker-Target-Defender или Missile-Target-Defender, соответственно ATD или MTD игры). В этих постановках атакующий игрок стремится поймать (поразить) убегающую цель, в то время как задача мобильного защитника – успеть перехватить атакующего игрока. Принципиальное отличие постановки задачи в [11] от [12–20] – неполнота априорной информации о преследователе. В рассматриваемой работе решается задача с неполной информацией о целях: преследователь с достоверностью не знает, какая именно цель является истинной.

**Постановка задачи.** В рассматриваемой постановке решается дифференциальная игра совместного преследования на плоскости одним преследователем  $P$  двух согласованно уклоняющихся целей  $E_1$  и  $E_2$ , одна из которых является ложной, с заданными вероятностями классификации  $p_1$  и  $p_2$ , где  $p_1 + p_2 = 1$ . Движения целей безынерционные, т.е. простые (согласно определению Айзекса [8]). Преследователь имеет ограничение на разворот (кривизну траектории). Критерием служит математическое ожидание промаха до истинной цели в момент  $T$  окончания преследования. Этот момент не задан и выбирается преследователем в процессе преследования. Математическая формализация задачи имеет следующий вид.

Уравнения движения игроков (здесь и далее  $i = 1, 2$ )

$$\dot{Z}_i(t) = v_i(t) - u(t)r[\varphi(t)], \quad Z_i(0) = Z_i^0, \quad (1)$$

$$\dot{\varphi}(t) = u(t)w(t), \quad \varphi(0) = \varphi^0, \quad (2)$$

где  $r[\varphi] = \{\cos \varphi, \sin \varphi\}$ ;  $Z_i(t)$  – двумерный вектор, направленный от  $P$  к цели  $E_i$  в текущий момент  $t$ ;  $v_i(t)$  – двумерный вектор скорости (управление) цели  $E_i$ ;  $u(t)$  и  $w(t)$  – модуль линейной скорости и кривизна траектории (управления) иг-

рока  $P$  соответственно;  $\varphi(t)$  — угол наклона единичного вектора  $r$  к оси  $OX$  некоторой выбранной неподвижной прямоугольной системы координат  $XOY$ , в которой все векторы понимаются как вектор-столбцы.

Ограничения на управления игроков:

цели  $E_i$

$$|v_i(t)| \leq \beta_i < 1, \quad (3)$$

преследователь  $P$

$$u(t) \in [0, 1], \quad w(t) \in [-1, 1]. \quad (4)$$

Критерий (плата)

$$G = p_1|Z_1(T)| + p_2|Z_2(T)|, \quad (5)$$

где  $p_i$  — вероятность того, что цель  $E_i$  является истинной.

Критерий (5) игрок  $P$  минимизирует, а цели  $E_i$  согласованно максимизируют.

**Решение задачи.** Для решения задачи применим принцип максимума для задач с игровой ситуацией [9, 10]. Для этого составляем гамильтониан (точка между векторами означает скалярное произведение в  $\mathbf{R}^2$ )

$$\mathcal{H} = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 - u(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot r[\varphi] + \mu w \rightarrow \max_{u,w} \min_{v_1,v_2}, \quad (6)$$

где  $\lambda_i = \lambda_i(t)$  и  $\mu = \mu(t)$  — сопряженные переменные, удовлетворяющие уравнениям

$$\dot{\lambda}_i(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Z_i} = 0, \text{ т.е. } \lambda_i \equiv \overrightarrow{\text{const}}, \quad (7)$$

$$\dot{\mu}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = u(t)(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot r_{\perp}[\varphi(t)], \quad (8)$$

где  $r_{\perp}[\varphi] = \{-\sin \varphi, \cos \varphi\}$ , а  $\overrightarrow{\text{const}}$  обозначает вектор-константу. Из (6) следует, что седловая точка гамильтониана  $\mathcal{H}$  (оптимальные управления и переменные им соответствующие отмечены верхним индексом \*)

$$\max_{u,w} \min_{v_1,v_2} \mathcal{H}(u, w, v_1, v_2) = \mathcal{H}(u^*, w^*, v_1^*, v_2^*) = \min_{v_1,v_2} \max_{u,w} \mathcal{H}(u, w, v_1, v_2)$$

достигается на управлениях (аргумент  $t$  опущен)

$$v_i^* = -\beta_i \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} \equiv \overrightarrow{\text{const}}, \quad (9)$$

$$w^* = \text{sign } \mu, \quad (10)$$

$$u^* = \begin{cases} 1, & \mu w - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot r[\varphi] \geq 0, \\ 0, & \mu w - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot r[\varphi] < 0. \end{cases} \quad (11)$$

Далее рассмотрим возможные терминальные исходы:

$$Z_1(T) \neq 0 \text{ и } Z_2(T) \neq 0 \text{ или } Z_1(T) = 0, \text{ а } Z_2(T) \neq 0 \text{ (} Z_2(T) = 0; Z_1(T) \neq 0).$$

Физическая интерпретация этих исходов будет дана ниже.

**Случай I.**  $Z_1(T) \neq 0$  и  $Z_2(T) \neq 0$ . Условия трансверсальности в момент  $T$  дают

$$[\delta G + \lambda_1 \cdot \delta Z_1 + \lambda_2 \cdot \delta Z_2 + \mu \delta \varphi - \mathcal{H} \delta t]_T = 0,$$

где  $\delta G = p_1 e_1 \cdot \delta Z_1 + p_2 e_2 \cdot \delta Z_2$ , а  $e_i = Z_i(T) |Z_i(T)|^{-1}$  – орт, направленный от  $P$  к цели  $E_i$  в момент  $T$  окончания преследования. Из произвольности вариаций  $\delta t$ ,  $\delta Z_i$  и  $\delta \varphi$  вытекает  $\mathcal{H}(T) = 0$ ,  $\lambda_i = -p_i e_i$  и  $\mu(T) = 0$ , а в силу автономности системы (1) – (5)  $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(T) = 0$ . Из этих соотношений и (9) следует

$$v_i^* = \beta_i e_i. \quad (12)$$

Иными словами, имеет место

**Утверждение 1.** Седловая точка реализуется на программных движениях целей по прямым с максимальными по модулю скоростями так, что векторы скоростей целей направлены от положения преследователя в терминальный момент  $T$  (точки  $P^T$ , которую назовем точкой прицеливания).

Перейдем к управлениям игрока  $P$ . Исследуем, прежде всего, возможность особых режимов (ОР) по  $u$  и  $w$ . Пусть  $u \neq 0$  тождественно, тогда ОР возможен:

а) по компонентам  $u$  и  $w$  при

$$\mu(t) = 0 \text{ и } (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot r[\varphi(t)] = 0, \quad (13)$$

$$\text{т.е. } (\lambda_1 + \lambda_2) \perp r[\varphi(t)] \text{ или } p_1 e_1 + p_2 e_2 \perp r[\varphi(t)]; \quad (14)$$

б) по компоненте  $w$  при

$$\mu(t) = 0; \quad (15)$$

в) по компоненте  $u$  при

$$\mu(t)w(t) - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot r[\varphi(t)] = 0. \quad (16)$$

Случаи а)–в) описываются леммами 1-3.

**Лемма 1.** Случай а) возникновения ОР одновременно по двум компонентам невозможен.

**Доказательство.** Дифференцируя систему (13) по  $t$  в силу уравнений (2), (7) и (8), находим

$$\dot{\mu}(t) = -u(t)(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot r_{\perp}[\varphi(t)] = 0 \text{ и} \quad (17)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot r_{\perp}[\varphi(t)] = 0.$$

Последнее уравнение противоречит (14). Лемма доказана.

**Лемма 2.** ОР по компоненте  $w$  характеризуется условиями:

1\*.  $w_{op}^*(t) = 0$ ;

2\*. ОР может иметь место лишь на конечном этапе движения, т.е. попав на ОР, движение уже не сойдет с него до конца процесса управления;

3\*.  $u^*(t) = 1$ , причем вектора  $(\lambda_1 + \lambda_2)$  и  $r[\varphi^*(t)]$  направлены противоположно.

**Доказательство.**

1. Дифференцирование (15) по  $t$  в силу уравнений (2), (7) и (8), дает равенство (17). Если игрок  $P$  движется, то  $u(t) \neq 0$ , остается

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot r_{\perp}[\varphi(t)] = 0. \quad (18)$$

Дифференцируя (18) по  $t$ , находим

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot r[\varphi(t)]\dot{\varphi}(t) = 0.$$

Поскольку  $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot r[\varphi(t)] \neq 0$  в силу (18), получаем  $\dot{\varphi}(t) = 0$ , т.е.  $\varphi(t) = \text{const}$ , что влечет  $w_{op}^*(t) \equiv 0$ .

2. Из (15) и  $\mu(T) = 0$  (условие трансверсальности) вытекает, что  $\mu(t) \equiv 0$  до конца процесса управления.

3. Если  $\mu(t) \equiv 0$ , максимум гамильтониана (6) достигается при  $u^*(t) = 1$  и направленных противоположно векторах  $(\lambda_1 + \lambda_2)$  и  $r[\varphi^*(t)]$ . Лемма доказана.

**Следствие 1.** Из (10) и Леммы 2 вытекает, что  $w^*(t) \in \{-1, 0, 1\}$ . Значения -1 и 1 отвечают правому или левому маневрам крутого разворота (МКР) игрока  $P$ , а 0 соответствует его движению по прямой. При  $w^*(t) \equiv 0$ , орт  $r = r[\varphi^*(t)]$ , совпадающий с вектором скорости игрока  $P$ , имеет постоянное направление (где  $\lambda_i = -p_i e_i$ , см. выше)

$$r = r[\varphi^*(t)] = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{|\lambda_1 + \lambda_2|} = \frac{p_1 e_1 + p_2 e_2}{|p_1 e_1 + p_2 e_2|} \equiv \overrightarrow{\text{const}}. \quad (19)$$

**Лемма 3.** Случай в) возникновения ОР по компоненте  $u$  невозможен.

**Доказательство.** В силу (10), равенство (16) принимает вид

$$|\mu(t)| + (-\lambda_1 + \lambda_2) \cdot r[\varphi(t)] = 0,$$

что невозможно ввиду положительности обоих слагаемых. Лемма доказана.

**Замечание 1.** При некоторых начальных условиях (НУ) возможно  $u^*(t) \equiv 0$ , что отвечает тривиальному факту:  $T = 0$ , т.е. НУ таковы, что никакими маневрами игрок  $P$  не сможет добиться сближения с системой целей.

Если игрок  $P$  успевает совершить МКР (за некоторое время  $\tau$ ), то с момента его движения по прямой (ОР) задача совпадает с простейшей [1]. В частности, из  $3^*$ ,  $\mathcal{H}(T) = 0$  и  $\lambda_i = -p_i e_i$  (условия трансверсальности) вытекает соотношение

$$\beta \triangleq p_1 \beta_1 + p_2 \beta_2 = |p_1 e_1 + p_2 e_2|, \quad (20)$$

которое иллюстрируется векторной диаграммой рис. 1 (здесь и далее знак  $\triangleq$  означает «равно по определению»). Обозначив углы разбегания целей  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (отсчет от направления движения игрока  $P$ ), из (19), (20) и рис. 1 находим

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{p_1}{p_2} \text{ и } p_1 \cos \alpha_1 + p_2 \cos \alpha_2 = \beta.$$

Откуда

$$\cos \alpha_1 = (\beta^2 + p_1 - p_2)/(2\beta p_1) \quad \text{и} \quad \cos \alpha_2 = (\beta^2 + p_2 - p_1)/(2\beta p_2). \quad (21)$$

Из ограничения  $|\cos \alpha_i| \leq 1$  следует, что (21) верно при  $p_i, \beta_i$  таких, что

$$\beta \geq \max\{p_1 - p_2, p_2 - p_1\}. \quad (22)$$

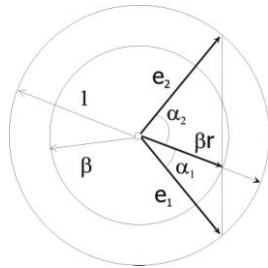


Рис. 1. Вектограмма скоростей при ОР

Пусть  $p_i, \beta_i$  таковы, что (22) имеет место (невыполнение (22) исследуется ниже).

Выберем неподвижную систему координат  $XOY$  с осью  $OY$ , проходящей через точки  $E_1^0, E_2^0$  (здесь и далее верхние индексы обозначают положения игроков в соответствующие моменты времени) и осью  $OX$ , проходящей через середину отрезка  $E_1^0 E_2^0$ . Направление оси  $OX$  выберем так, чтобы абсцисса точки  $P^0$  была отрицательна (рис. 2, 3).

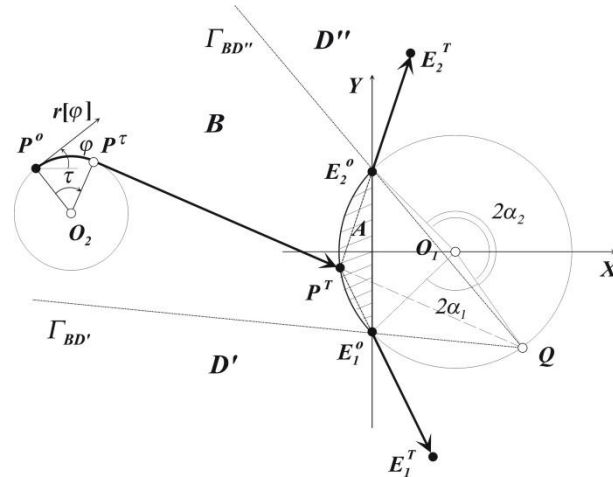


Рис. 2. Построение точки прицеливания  $P^T$  и разбиение области возможных начальных положений игрока  $P$  на зоны назначения маневров ( $\beta_{1,2} = 1/3$ ).  
Разбегание целей от точки прицеливания

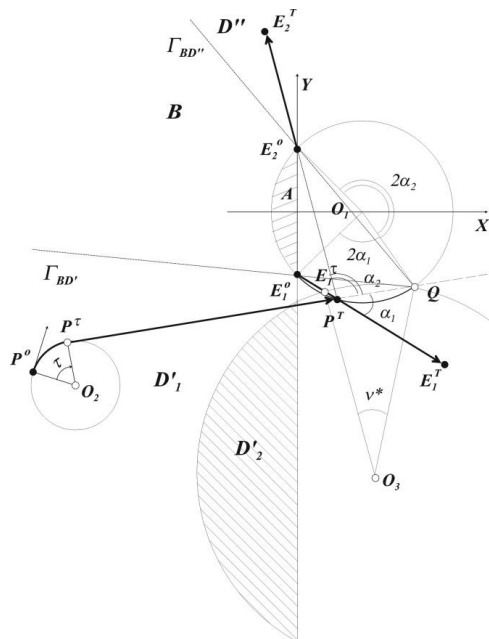


Рис. 3. Построение точки прицеливания  $P^T$  и разбиение области возможных начальных положений игрока  $P$  на зоны назначения маневров ( $\beta_{1,2} = 1/3$ ).  
Отвлекающий маневр цели  $E_1$

Во II и III квадрантах строим геометрическое место точек (ГМТ), из которых отрезок  $E_1^0 E_2^0$  виден под углом  $\alpha_1 + \alpha_2$ . Это дуга  $\smile E_1^0 E_2^0$  окружности  $O_1$  радиуса  $a/\sin(\alpha_1 + \alpha_2)$ , где  $a = OE_i^0$  (см. рис. 2, 3). От направления  $O_1 E_2^0$  откладываем угол  $2\alpha_2$  и соответствующую этому углу  $\smile E_2^0 Q$  (при этом  $\angle E_1^0 O_1 Q = 2\alpha_1$ ). Лучи  $QE_1^0, QE_2^0$  делят полуплоскость (п/п)  $X \leq 0$  на три зоны:  $D', B$  и  $D''$  (см. рис. 2, 3). Сегмент  $E_1^0 E_2^0$  (заштрихован) выделяет зону  $A$ , где сближение с системой невозможно.

**Случай II**  $Z_1(T) = 0; Z_2(T) \neq 0$  (аналогично  $Z_2(T) = 0; Z_1(T) \neq 0$ ) разбивается на два подслучая. Первый возникает при выполнении неравенства (22) (режим первого рода – P1), а второй – при нарушении (режим второго рода – P2). P1 может возникать лишь при некоторых  $P^0 \in D \triangleq D' \cup D''$ . P2 отвечает случаям  $Z_1(T) = 0$  при  $p_1 > p_2$  или  $Z_2(T) = 0$ , при  $p_2 > p_1$  и может возникать при любых  $P^0$ . Физически это означает, что на первое место выходят не геометрические, а вероятностные характеристики целей и встреча с целью  $E_i$  происходит вследствие того, что именно она является истинной.

При наличии ОР и отсутствии P1 и P2 точка  $P^T$  для зон  $D', B$  и  $D''$  строится на основании следующих лемм, доказательства которых следует из построения окружности  $O_1$ .

**Лемма 4** (о локализации точки прицеливания). Если в момент  $\tau$  выхода на ОР точка  $P^\tau \in B$ , то соответствующая ей точка  $P^T$  находится на дуге  $\smile E_1^0 E_2^0$  в п/п  $X \leq 0$ . Если  $P^\tau \in D' (D'')$ , то  $P^T \in \smile E_1^0 Q (\smile E_2^0 Q)$ .

**Лемма 5** (о направлении преследования). В условиях Леммы 4 направление преследования проходит через точку  $Q$ .

Итак, точка прицеливания  $P^T$  определяется пересечением с окружностью  $O_1$  касательной  $QH$  к окружности  $O_2$  крутого разворота игрока  $P$  ( $O_2 P^0 \triangleq 1$ ;  $QH$  проводится так, чтобы  $\angle P^0 O_2 H$  был минимальным). Если  $H \triangleq P^\tau \in B$ , то цели разбегаются от точки  $P^T$  (рис. 2).

Зоны  $D'$  и  $D''$ , по аналогии с простейшей задачей [1], разбиваются на подзоны  $D'_1, D'_2$  и  $D''_1, D''_2$ . Если  $H = P^\tau \in D'_1 (D''_1)$ , то цель  $E_1 (E_2)$  совершает отвлекающий маневр (рис. 3). В подзонах  $D'_2, D''_2$  возникает P1. В отличие от простейшей задачи [1] разбиение зон  $D'$  и  $D''$  зависит от ориентации вектора  $r[\varphi_0]$  и осуществляется следующим образом. Построив касательную  $QH$  и определив точку  $P^T$  (пусть  $H \in D'$ ), отметим на луче  $E_1^0 P^T$  точку  $E_1^\tau$ . Если  $E_1^\tau$  лежит вне отрезка  $E_1^0 P^T$  или же  $\beta_1 \beta \geq p_1$ , то  $D' = D'_1$ , т.е. P1 отсутствует. Если же  $E_1^\tau \in E_1^0 P^T$  и  $\beta_1 \beta < p_1$ , то строим ГМТ (окружность  $O_3$ ), из которых отрезок  $E_1^\tau Q$  виден под некоторым углом  $\nu$ , таким что

$$\sin \nu = (\beta_1 - \cos \alpha_1) / \sqrt{1 + \beta_1^2 - 2\beta \cos \alpha_1}.$$

Сегмент круга  $O_3$ , лежащий в левой п/п, образует подзону  $D'_2$  (см. рис. 3, заштрихован). Построение  $D''_2$  производится аналогично.

**Замечание 2.** Возможна ситуация, когда  $H \in A$  (рис. 4). В этом случае преследование имеет смысл, если

$$\beta < p_1 \cos \alpha_1(0) + p_2 \cos \alpha_2(0), \text{ где } \alpha_i(t) \triangleq r[\widehat{\varphi(t)}], \widehat{Z}_i(t)$$

и осуществляется путем МКР в сторону круга  $O_1$  до точки  $P^T$ , в которой  $\mathcal{H}(T) = 0$ , т.е.

$$\beta = p_1 \cos \alpha_1(T) + p_2 \cos \alpha_2(T) = (p_1 e_1 + p_2 e_2) \cdot r[\varphi(T)].$$

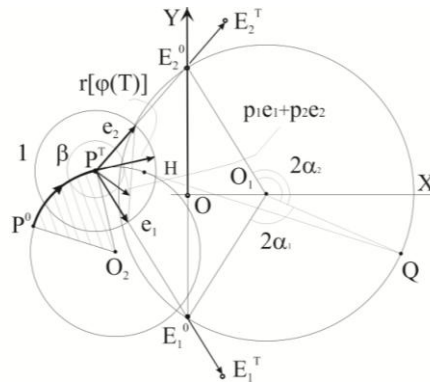


Рис. 4. Случай  $H \in A$

**Замечание 3.** В случае P1, из-за ограничения на разворот у игрока  $P$ , цель  $E_i$  может не допустить точечной встречи, так как при попадании цели  $E_i$  в круг радиуса  $\beta_i$  концентрический с кругом МКР игрока  $P$ , движение игроков  $P$  и  $E_i$  будет происходить с одинаковой угловой скоростью, равной единице (рис. 5). Однако при выполнении (22) противнику все же выгодно подставить эту цель под удар, так как за счет точечного сближения у дальней цели появится дополнительное время убежать подальше.

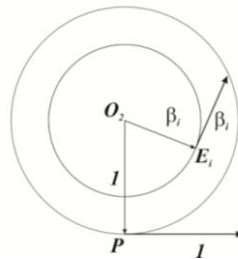


Рис. 5. Случай: цель  $E_i$  внутри круга МКР игрока  $P$

**Замечание 4.** При нарушении (22) возникает P2. Он, как отмечалось выше, характеризуется большой вероятностью того, что одна из целей (скажем  $E_1$ ) истинная. В этом случае противнику (коалиции  $E_1$  и  $E_2$ ) нет смысла допускать встречу  $P$  с  $E_1$  (игрок  $P$  может гарантировать сближение лишь до расстояния  $1 + \beta_1$ ). Поэтому терминальное условие  $|Z_1(T)| = 0$  заменяется на  $|Z_1(T)| = 1 + \beta_1$ , что эквивалентно введению у игрока  $P$  зоны захвата радиуса  $R = 1 + \beta_1$ . По этой причине после МКР игрока  $P$  игра с ограничением на разворот у преследователя становится эквивалентной игре с простыми движениями игроков, терминальным условием  $|Z_1(T)| = R = 1 + \beta_1$  и критерием  $G = |Z_2(T)|$ . Эта игра исследована в [6], где показано, что ГМТ  $R$ -встречи игроков  $P$  и  $E_1$  служит овал Декарта, полярное уравнение которого (в системе координат  $\{\varrho, \varphi\}$  с полюсом  $P^0$  и полярной осью, направленной вдоль вектора  $Z_1^0$ ), имеет вид

$$\varrho^2(1 - \beta_1^2) + 2\varrho(\beta_1 R - |Z_1^0| \cos \varphi) + |Z_1^0|^2 - (\beta_1 R)^2 = 0.$$

В игре с ограничением на разворот преследователя роль полюса  $P^0$  и вектора  $Z_1^0$  играют точка  $P^\tau$  и вектор  $Z_1(\tau)$  соответственно (рис. 6).



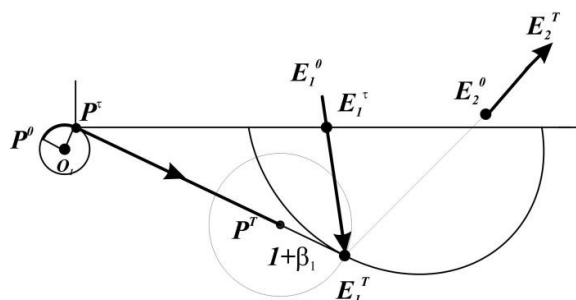


Рис. 6. R-встреча  $P$  и  $E_1$  в момент  $T$

**Замечание 5.** После построения точки  $P^T$  необходимо сравнение значений критерия (платы)

$$G(0) \triangleq p_1|Z_1^0| + p_2|Z_2^0| \quad \text{и} \quad G(T) \triangleq p_1|Z_1(T)| + p_2|Z_2(T)|.$$

Если окажется, что  $G(0) \leq G(T)$ , то преследование смысла не имеет. Физически это означает, что время  $\tau$  МКР занимает слишком большую часть от общего времени  $T$  и за время  $\tau$  цели успевают занять такие положения  $E_1^\tau$  и  $E_2^\tau$ , при которых сближение на участке  $P^\tau P^T$  не компенсирует увеличение значения критерия при развороте (рис. 7).

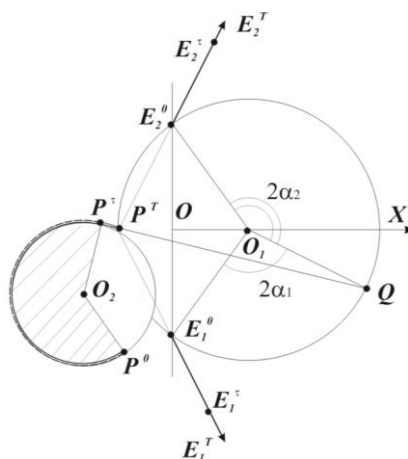


Рис. 7. Случай  $G(0) \leq G(T)$ . Преследование не имеет смысла

**Замечание 6.** Из структуры гамильтониана видно, что для построения позиционных стратегий игроков необходимо в каждый текущий момент времени решать исходную задачу, принимая текущий момент за начальный, а текущую позицию игроков – за начальную позицию.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Олышанский В.К., Рубинович Е.Я. Простейшие дифференциальные игры преследования системы из двух объектов // Автоматика и телемеханика. – 1974. – № 1. – С. 24-34.
2. Абрамянц Т.Г., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я. Простейшая дифференциальная игра поочередного преследования // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 8, – С. 5-15.
3. Рубинович Е.Я. Дифференциальная игра преследования «Лиса и зайцы» // Сб.: Проблемы управления в технике, экономике, биологии. – М.: Наука, 1981. – С. 29-37.

4. *Абрамянц Т.Г., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я., Шевченко И.И.* Дифференциальные игры с групповой целью // Сб.: Проблемы управления движением и навигации. – М.: Машиностроение, 1983. – № 13. – С. 157-173.
5. *Маслов Е.П., Рубинович Е.Я.* Дифференциальные игры с групповой целью на плоскости // Сб.: Итоги науки и техники. Серия: Техническая кибернетика. – М.: ВИНТИ, 1991. – Вып. 32.
6. *Breakwell J.V. and Hagedorn P.* Point Capture of Two Evaders in Succession // *Journal of Optimization Theory and Applications.* – 1979. – Vol. 27, No. 1.
7. *Иванов М.Н.* О двух методах преследования в игре с терминальной платой // Сб.: Управление в сложных нелинейных системах. – М.: Наука, 1984. – С. 30-34.
8. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. – М.: Мир, 1967. – 480 с.
9. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. – М.: Наука, 1969. – 359 с.
10. *Bryson A.E., Ho Yu-Chi.* Applied optimal control. – Toronto, London: Blaisdell Publishing Company, 1969. – 544 p.
11. *Железнов В.С., Кряковский Б.С., Маслов Е.П.* Об одной задаче перехвата // *Автоматика и телемеханика.* – 1996. – № 8. – С. 14-21.
12. *Eloy Garcia, David W Casbeer, Khanh Pham, and Meir Pachter.* Cooperative aircraft defense from an attacking missile // *In Decision and Control (CDC), 2014. IEEE 53rd Annual Conference on.* – P. 2926-2931.
13. *Meir Pachter, Eloy Garcia, and David W Casbeer.* Active target defense differential game // *In Communication, Control, and Computing (Allerton), 2014. 52nd Annual Allerton Conference on. IEEE, 2014.* – P. 46-53.
14. *Andrey Perelman, Tal Shima, and Ilan Rusnak.* Cooperative differential games strategies for active aircraft protection from a homing missile // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* – 2011. – Vol. 34 (3). – P. 761-773.
15. *Rusnak H. Weiss, and Hexner G.* Guidance laws in target-missile-defender scenario with an aggressive defender // *Proceedings of the 18th IFAC World Congress, Milano, Italy, 2011.*
16. *Rusnak Ilan.* The lady, the bandits and the body-guards - a two team dynamic game // *In Proceedings of the 16th IFAC World Congress, Prague, Czech Republic, 2005.*
17. *Shima T.* Optimal cooperative pursuit and evasion strategies against a homing missile // *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* – 2011. – Vol. 34 (2). – P. 414-425.
18. *Takeshi Yamasaki and Sivasubramanya N Balakrishnan.* Terminal intercept guidance and autopilot for aircraft defense against an attacking missile via 3d sliding mode approach // *In American Control Conference (ACC), 2012. IEEE, 2012.* – P. 4631-4636.
19. *Takeshi Yamasaki, SN Balakrishnan, and Hiroyuki Takano.* Modified command to line-of-sight intercept guidance for aircraft defense // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* – 2013. – Vol. 36 (3). – P. 898-902.
20. *Yanfang Liu, Naiming Qi, and Jinjun Shan.* Cooperative interception with doubleline-of-sight-measuring // *In AIAA Guidance, Navigation, and Control (GNC) Conference, Guidance, Navigation, and Control and Co-located Conferences. American Institute of Aeronautics and Astronautics, August 2013.*

## REFERENCES

1. *Ol'shanskiy V.K., Rubinovich E.Ya.* Prosteyshie differentsial'nye igry presledovaniya sistemy iz dvukh ob'ektov [Simple differential games of pursuit the system of two objects], *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1974, No. 1, pp. 24-34.
2. *Abramyants T.G., Maslov E.P., Rubinovich E.Ya.* Prosteyshaya differentsial'naya igra poocherednogo presledovaniya [The simplest differential game of alternate pursuit], *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1980, No. 8, pp. 5-15.
3. *Rubinovich E.Ya.* Differentsial'naya igra presledovaniya «Lisa i zaytsy» [Differential pursuit game "Fox and hares"], *Sb.: Problemy upravleniya v tekhnike, ekonomike, biologii* [Collection: problems of management in engineering, Economics, biology]. Moscow: Nauka, 1981, pp. 29-37.
4. *Abramyants T.G., Maslov E.P., Rubinovich E.Ya., Shevchenko I.I.* Differentsial'nye igry s gruppovoy tsel'yu [Differential games with a group goal], *Sb.: Problemy upravleniya dvizheniem i navigatsii* [Collection: Problems of motion control and navigation]. Moscow: Mashinostroenie, 1983, No. 13, pp. 157-173.

5. Maslov E.P., Rubinovich E.Ya. Differential'nye igry s gruppovoy tsel'yu na ploskosti [Differential game with group goal on a plane], *Sb.: Itogi nauki i tekhniki. Seriya: Tekhnicheskaya kibernetika* [Collection: Results of science and technology. Series: technical Cybernetics]. Moscow: VINITI, 1991, Issue 32.
6. Breakwell J.V. and Hagedorn P. Point Capture of Two Evaders in Succession, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1979, Vol. 27, No. 1.
7. Ivanov M.N. O dvukh metodakh presledovaniya v igre s terminal'noy platoy [About two methods of prosecution in the game with a terminal Board], *Sb.: Upravlenie v slozhnykh nelineynykh sistemakh* [Collection: Control in complex nonlinear systems]. Moscow: Nauka, 1984, pp. 30-34.
8. Ayzeks R. Differential'nye igry [Differential game]. Moscow: Mir, 1967, 480 p.
9. Letov A.M. Dinamika poleta i upravlenie [Flight dynamics and control]. Moscow: Nauka, 1969, 359 p.
10. Bryson A.E., Ho Yu-Chi. Applied optimal control. Toronto, London: Blaisdell Publishing Company, 1969, 544 p.
11. Zhelezov V.S., Kryakovskiy B.S., Maslov E.P. Ob odnoy zadache perekhvata [On a single interception problem], *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1996, No. 8, pp. 14-21.
12. Eloy Garcia, David W Casbeer, Khanh Pham, and Meir Pachter. Cooperative aircraft defense from an attacking missile, *In Decision and Control (CDC), 2014. IEEE 53rd Annual Conference on*, pp. 2926-2931.
13. Meir Pachter, Eloy Garcia, and David W Casbeer. Active target defense differential game, *In Communication, Control, and Computing (Allerton), 2014. 52nd Annual Allerton Conference on. IEEE, 2014*, pp. 46-53.
14. Andrey Perelman, Tal Shima, and Ilan Rusnak. Cooperative differential games strategies for active aircraft protection from a homing missile, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2011, Vol. 34 (3), pp. 761-773.
15. Rusnak H. Weiss, and Hexner G. Guidance laws in target-missile-defender scenario with an aggressive defender, *Proceedings of the 18th IFAC World Congress, Milano, Italy, 2011*.
16. Rusnak Ilan. The lady, the bandits and the body-guards - a two team dynamic game, *In Proceedings of the 16th IFAC World Congress, Prague, Czech Republic, 2005*.
17. Shima T. Optimal cooperative pursuit and evasion strategies against a homing missile, *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2011, Vol. 34 (2), pp. 414-425.
18. Takeshi Yamasaki and Sivasubramanya N Balakrishnan. Terminal intercept guidance and autopilot for aircraft defense against an attacking missile via 3d sliding mode approach, *In American Control Conference (ACC), 2012. IEEE, 2012*, pp. 4631-4636.
19. Takeshi Yamasaki, SN Balakrishnan, and Hiroyuki Takano. Modified command to line-of-sight intercept guidance for aircraft defense, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2013, Vol. 36 (3), pp. 898-902.
20. Yanfang Liu, Naiming Qi, and Jinjun Shan. Cooperative interception with doubleline-of-sight-measuring, *In AIAA Guidance, Navigation, and Control (GNC) Conference, Guidance, Navigation, and Control and Co-located Conferences. American Institute of Aeronautics and Astronautics, August 2013*.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор А.Р. Гайдук.

**Рубинович Евгений Яковлевич** – Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук; e-mail: rubinvch@ipu.rssi.ru; 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65; тел.: +74953303733; д.т.н.; профессор; г.н.с.

**Rubinovich Evgeny Yakovlevich** – Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences; e-mail: rubinvch@ipu.rssi.ru; Russia, 117997, Moscow, 65, Profsoyuznaya street; phone: +74953303733; dr. of eng. sc.; professor; chief researcher.