

Шаповалов Виталий Александрович – ФГБУ «Высокогорный геофизический институт» (Росгидромет); e-mail: vet555_83@mail.ru; Кабардино-Балкарская Респ., 360030, Нальчик, проспект Ленина, 2; тел.: 89280758034; к.ф.-м.н.; с.н.с.

Аджиева Аида Анатольевна – ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный аграрный университет им. В.М. Кокова»; e-mail: aida-adzhieva@mail.ru; Кабардино-Балкарская Респ., 360030, г Нальчик, ул. Ватутино, 4, кв. 41; тел.: 89604279686; профессор; д.ф.-м.н.; доцент ВАК.

Shapovalov Vitalie Aleksandrovich – FSBI High - Mountain Geophysical Institute (Roshydromet); e-mail: vet555_83@mail.ru; 2, Lenina av., Nalchik, KBR, 360030, Russia; phone: +79280758034; cand. of phys. and math.; sc.; senior researcher.

Adzhieva Aida Anatolievna – FGBEU HE "Kabardino-Balkarian State Agrarian University named after V. Kokova"; e-mail: aida-adzhieva@mail.ru; 4, ap. 41, Vatutino, Nalchik, 360030, KBR, Russia; phone: +79604279686; dr. of phys. and math, sc.; associate professor.

УДК 519.7, 004.9

DOI 10.23683/2311-3103-2018-3-22-33

А.М. Макаров, С.С. Постовалов**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИ-
ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
МЕЛЛИНА И ИХ ЦИФРОВАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ**

Рассмотрены возможности применения преобразования Меллина для различных задач. Отмечена недостаточная исследованность преобразования для построения универсальных цифровых моделей преобразования и поставлена задача проанализировать граничные параметры и построить обобщенную модель преобразования для цифровой обработки. Выделена базисная функция преобразования Меллина, удовлетворяющая равенству Парсеваля, или закону сохранения энергии. Определены основные трудности при генерации базисных функций – неравномерность распределения опорных точек функции и их смещение, проблема выбора шага дискретизации. В процессе работы эти трудности частично разрешены. Продемонстрированы закономерности базисных функций, из них определены прямые и рекурсивные формулы для нахождения опорных точек – нулей и экстремумов базисной функции Меллина, продемонстрирована сравнительная эффективность двух методов вычисления в рамках цифровой модели. Так же обозначены наиболее удобные опорные точки – начало отсчета для простого определения остальных опорных точек и нули функции как не подверженные смещению из-за согласования с равенством Парсеваля. Частично разрешена проблема выбора шага дискретизации в силу непостоянной длины периодов базисных функций через постоянную корректировку шага дискретизации либо через выбор шага, исходящего из свойств функции.

Преобразование Меллина; базисная функция Меллина; математика; информационные технологии.

A.M. Makarov, S.S. Postovalov**MATHEMATICAL MODEL OF TRIGONOMETRIC-LOGARITHMIC BASIS
FUNCTIONS OF MELLIN TRANSFORM AND THEIR DIGITAL
IMPLEMENTATION**

Possibilities of application of the Mellin transform for different tasks are discussed. Marked is the lack of research of transformations for building universal transformation digital models and the task to perform boundary options and build a generalized model conversion for digital processing is set. Selected is the basis function of the Mellin transform that satisfies the equality Parseval, or the law of conservation of energy. The main difficulties in the generation of basic function are the uneven distribution of the function control points and their displacement, the problem of selection of the sampling step. These difficulties are partially resolved in the process of work. Demonstrated are the regularities of the basis functions,

direct and recursive formulas for finding the reference points, zeros and extremes of the basis Mellin function, the comparative efficiency of the two methods of calculation within the framework of the digital model is demonstrated. The most convenient reference points are also indicated, the beginning of the reference for the simple determination of the remaining reference points and the zeros of the function as not subjected to displacement due to the agreement with the Parseval equality. Partially resolved is the problem of choosing the sampling rate due to irregular lengths of basis function periods via a constant adjustment of the sampling rate or the choice of a step coming from the properties of the function.

Mellin transform; Mellin basis function; mathematics; IT.

Введение. Наряду с преобразованием Фурье (ПФ) в конце 19 века и по наши дни получает широкое распространение в математике: справочники по математическим приложениям теоретических результатов интегрального преобразования Меллина (ИПМ) [1–5] в теории дельта-функций в базисе ИПМ [6] решения полиномиальных уравнений [7, 8] в теории анализа вероятностных характеристик случайных процессов [9–11]; в технических приложениях: исследование сверток процессов Леви [12], разработка инвариантных методов на основе последовательного двойного преобразования Фурье-Меллина [13, 14] классификация кораблей инвариантно к их ракурсу [15], инвариантные к неизвестной корреляционной функции алгоритмы обнаружения сложных сигналов [16]. Рассматривается подход к применению ПМ в теории вероятностей, где свертка, порождающая мультипликативную характеристическую функцию; успешно используется при решении определенного вида интегральных уравнений. Также в технических приложениях широко используется свойство инвариантности модуля интегрального ПМ для решения задачи синтеза обнаружителей сигналов в условиях априорной неопределенности к их масштабу.

Постановка задачи. В настоящее время стоит задача разработки эффективных цифровых алгоритмов для моделирования инвариантно-масштабных преобразований [17–20]. Но в силу нетривиальных особенностей базисных функций ПМ [21] его математическая модель и ее цифровая реализация недостаточно исследована, что приводит к трудностям практической реализации алгоритмов на основе интегрального преобразования Меллина.

Цель работы состоит в анализе граничных условий, накладываемых на пределы изменения базисных функций ПМ и построения на их основе обобщенной модели ПМ для ее практических применений в решении задач математики, теории статистического обнаружения сигналов и в области остальных методов обработки информации.

Построение обобщенной модели ПМ. Интегральное ПМ в виде прямого и обратного преобразования имеет вид:

прямое ПМ

$$M(S) = \int_0^{\infty} f(t)t^{S-1}dt, \quad (1)$$

где $s = \sigma + ju; \sigma = 1/2; u \in (-\infty, \infty)$,

обратное ПМ

$$f(t) = \frac{1}{\pi j} \int_{1/2-ju}^{1/2+ju} M(S)t^{-S}ds, \quad (2)$$

где $j = \sqrt{-1}$

Базисные ядра K_{er} ПМ равны

$$K_{er} = t^{S-1} = t^{1/2+ju-1} = t^{-1/2}t^{ju} = \frac{e^{ju \ln(t)}}{\sqrt{t}},$$

или

$$K_{er} = \frac{\cos(u) \ln(t)}{\sqrt{t}} + j \frac{\sin(u) \ln(t)}{\sqrt{t}}. \quad (3)$$

Соответственно модуль ядра

$$|K_{er}| = \sqrt{\frac{\cos^2(u \ln(t)) + \sin^2(u \ln(t))}{t^2}} = \frac{1}{t}.$$

Аргумент $arg = -arctan \frac{\sin(uln(t))}{\cos(uln(t))} = -arctan(\tan(uln(t))) = -uln(t)$

Равенство Парсеваля

$$\int_a^b |M(S)|^2 ds = \int_a^b |f(t)|^2 dt \quad (4)$$

выполняется при реальной части S равной $\frac{1}{2}$ [6]

Для дальнейшего анализа запишем (1) в виде

$$M(u) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \cos(uln(t)) dt + j \int_0^\infty \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \sin(uln(t)) dt. \quad (5)$$

Из (5), по определению, модуль $|M(u)|$ равен

$$|M(u)| = \sqrt{\left[\int_0^\infty \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \cos(uln(t)) dt \right]^2 + \left[\int_0^\infty \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \sin(uln(t)) dt \right]^2}, \quad (6)$$

а аргумент

$$\Psi(u) = -arctan \frac{\int_0^\infty \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \cos(uln(t)) dt}{\int_0^\infty \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \sin(uln(t)) dt}. \quad (7)$$

Для дискретной модели ПМ имеем модуль $|M(u)|$ или амплитудный спектр

$$|M(u)| = \sqrt{\left[\Delta t \sum_{i=1}^N \frac{f(i\Delta t)}{\sqrt{i\Delta t}} \sin(u(i\Delta t)) \right]^2 + \left[\Delta t \sum_{i=1}^N \frac{f(i\Delta t)}{\sqrt{i\Delta t}} \cos(u(i\Delta t)) \right]^2}, \quad (8)$$

где $N = T/\Delta t$, T — длительность финитной функции $f(t)$.

Как показали исследования, проведенные авторами работы, основную трудность модели представляет создание генератора базисных функций вида

$$\varphi(t) = \frac{\sin(uln(t))}{\sqrt{t}}.$$

Определим два предела:

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sin(uln(t))}{\sqrt{t}} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(uln(t))}{\sqrt{t}} = 0$$

Исследуем нули функции $\varphi(t)$

$$\sin(uln(t)) = 0$$

$$uln(t) = n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$t_0 = e^{\frac{\pi n}{u}}, \text{ если } t > 1$$

$$t_0 = e^{-\frac{\pi n}{u}}, \text{ если } t < 1$$

Рассмотрим рисунок, изображающий один период $\varphi(t)$, при $t < 1$

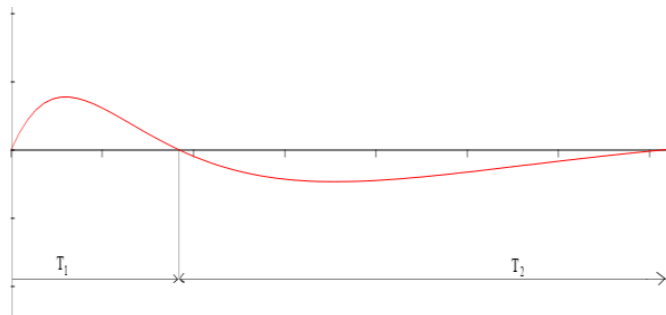


Рис. 1. период функции $\varphi(t)$

Теорема 1. Для функции $\frac{\sin(ulnt)}{\sqrt{t}}$, при $t > 0, u \in (u_{max}, u_{min})$ при любом конечном u все полупериоды функции будут сдвинуты на постоянную величину $e^{m\pi/u}, m = 1, 2, 3, \dots M$.

Доказательство.

Из рис. 1 видно, что полный период будет равен

$$T_{01} = T_1 + T_2.$$

С другой стороны, для предыдущего полупериода запишем

$$T_1 = e^{\frac{\pi n}{u}} - e^{\frac{(n-1)\pi}{u}}$$

$$T_2 = e^{\frac{(n-1)\pi}{u}} - e^{\frac{(n-2)\pi}{u}},$$

тогда отношение T_2/T_1 получим

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{e^{\frac{(n-1)\pi}{u}} - e^{\frac{(n-2)\pi}{u}}}{e^{\frac{\pi n}{u}} - e^{\frac{(n-1)\pi}{u}}} = e^{\frac{\pi}{u}}$$

или $T_2 = T_1 e^{\frac{\pi}{u}}$, тогда для T_{01} имеем

$$T_{01} = T_1 + T_1 e^{\frac{\pi}{u}} = T_1 \left(1 + e^{\frac{\pi}{u}}\right)$$

Аналогично для отношения T_3/T_2 получим

$$\frac{T_3}{T_2} = e^{\frac{\pi}{u}},$$

$$T_{02} = T_3 + T_4 = T_1 e^{\frac{2\pi}{u}} + T_1 e^{\frac{3\pi}{u}} = T_1 e^{\frac{2\pi}{u}} \left(1 + e^{\frac{\pi}{u}}\right) = T_{01} e^{\frac{2\pi}{u}}$$

$$T_{0m} = T_{01} e^{\frac{m\pi}{u}}$$

ч.т.д.

Выразим $e^{\frac{m\pi}{u}}$ через рекурсию

$$U[m] = \rho U[m - 1],$$

Примем $\rho = e^{\pi/u}$ за эталон, тогда

$$e^{\frac{m\pi}{u}} = e^{\frac{\pi}{u}} e^{\frac{(m-1)\pi}{u}}$$

При

$$m = 1 e^{\frac{\pi}{u}} = e^{\frac{\pi}{u}} e^0 = \rho$$

$$m = 2 e^{\frac{2\pi}{u}} = e^{\frac{\pi}{u}} e^{\frac{\pi}{u}} = \rho \rho = \rho^2$$

$$m = 3 e^{\frac{3\pi}{u}} = e^{\frac{\pi}{u}} e^{\frac{2\pi}{u}} = \rho \rho^2 = \rho^3$$

.....

$$m = e \rho^l, l = 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом для генератора базисных функций необходимо вычислить одно значение $\rho = e^{\frac{\pi}{u}}$ для заданного u , а затем последовательным умножением вычислить все координаты нулей u -той гармоники.

В табл. 1 приведено сравнение вычисления нулей по приведенным формулам: прямой метод и рекурсивный метод. С точностью до 25 знака после запятой эти методы дают одинаковый результат. Для практических целей целесообразно использовать, как следует из результатов таблицы, рекуррентный, как наиболее экономичный.

Таблица 1

Координаты нулей функции $\varphi(t) < 1$ с точностью 25 знаков, вычисленные разными методами при $u=1$

n	Рекурсивное вычисление нулей $\prod_{j=-1}^n \frac{1}{\rho}$	Прямое вычисление нулей ρ^n
-1	0.0432139182637722497744177372	0.0432139182637722497744177372
-2	0.0018674427317079888144302129	0.0018674427317079888144302129
-3	0.000080699517570304599239205	0.000080699517570304599239205
-4	0.0000034873423562089954917753	0.0000034873423562089954917753
-5	0.0000001507017275390064610748	0.0000001507017275390064610748
-6	0.0000000065124121360799007282	0.0000000065124121360799007282
-7	0.0000000002814268457485552721	0.0000000002814268457485552721
-8	0.0000000000121615567094093084	0.0000000000121615567094093084
-8	0.000000000005255485176006449	0.000000000005255485176006449
-9	0.0000000000000227110106832409	0.0000000000000227110106832409
-10	0.000000000000009814317593532	0.000000000000009814317593532
-11	0.000000000000000424115118302	0.000000000000000424115118302
-12	0.000000000000000018327676057	0.000000000000000018327676057
-13	0.00000000000000000792010695	0.00000000000000000792010695
-14	0.00000000000000000034225885	0.00000000000000000034225885
-15	0.00000000000000000001479035	0.00000000000000000001479035
-16	0.00000000000000000000063915	0.00000000000000000000063915
-17	0.00000000000000000000000005	0.00000000000000000000000005

Рассмотрим экстремумы функции.

Первая производная функции $\varphi(t)$ выглядит следующим образом:

$$\frac{\sin ulnt'}{\sqrt{t}} = \frac{ucos(ulnt)}{t^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sin(ulnt)}{2t^{\frac{3}{2}}}$$

Из чего следует, что экстремум будет находиться в точке с такой координатой t , для которой выполняется данное уравнение:

$$\frac{ucos(ulnt)}{t^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin(ulnt)}{2t^{\frac{3}{2}}}$$

Получение метода вычисления координат экстремумов диктует следующие преобразования:

$$\frac{ucos(ulnt)}{t^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin(ulnt)}{2t^{\frac{3}{2}}}$$

$$2ucos(ulnt) = \sin(ulnt)$$

$$\frac{\sin(ulnt)}{\cos(ulnt)} = 2u$$

$$tg(ulnt) = 2u$$

$$ulnt = arctg(2u)$$

$$t = e^{arctg(2u)/u + n\pi/u} \text{ для } n = \begin{cases} -1, -3, -5..-\infty \text{ для } t < 1 \text{ и } \frac{\sin(ulnt)}{\sqrt{t}} < 0 \\ -2, -4, -6..-\infty \text{ для } t < 1 \text{ и } \frac{\sin(ulnt)}{\sqrt{t}} > 0 \\ 1, 3, 5.. \infty \text{ для } t > 1 \text{ и } \frac{\sin(ulnt)}{\sqrt{t}} > 0 \\ 2, 4, 6.. \infty \text{ для } t > 1 \text{ и } \frac{\sin(ulnt)}{\sqrt{t}} < 0 \end{cases}$$

В табл. 2 отражены минимумы и максимумы $\varphi(t) = \frac{\sin(u \ln(t))}{\sqrt{t}}$ для $u=10$

Таблица 2

Минимумы и максимумы $\varphi(t)$ на периоде (0.001,1)

Номер периода слева от единицы	минимум	максимум
1	0,850	0,621
2	0,454	0,331
3	0,242	0,177
4	0,129	0,094
5	0,069	0,050
6	0,037	0,027
7	0,020	0,014
8	0,010	0,008
9	0,006	0,004

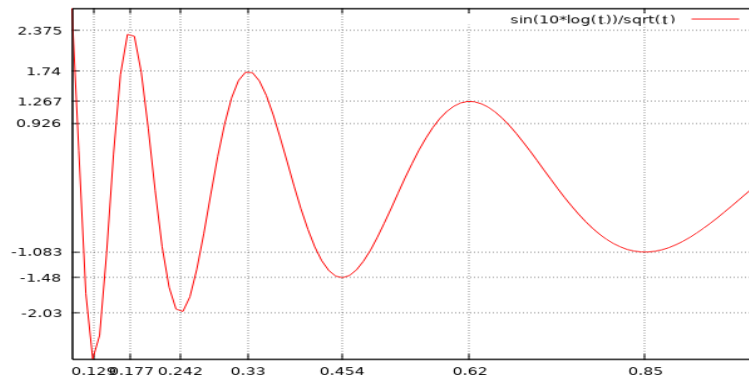


Рис. 2: График минимумов и максимумов $\varphi(t)$ на периоде (0.001,1)

Для оптимизации вычислений можно преобразовать вычисление экстремумов к рекурсивному виду:

$$t_{extn} = t^{\arctg(2u)/u + n\pi/u} = e^{\arctg(2u)/u} \cdot e^{n\pi/u} = e^{\arctg(2u)/u} \cdot \rho^n$$

$$t_{extn+m} = t_{extn} \cdot e^{m\pi/u} = t_{extn} \cdot \rho^m$$

$$t_{extn-m} = t_{extn} \cdot e^{-m\pi/u} = \frac{t_{extn}}{\rho^m}$$

Или же, с соблюдением четности:

$$t_{maxn} = t_{maxn-1} \cdot e^{-2\pi/u} = \frac{t_{maxn-1}}{\rho^2}$$

Так же, имея координату t , при которой $\varphi(t)$ обращается в ноль, можно получить координаты точки экстремума справа от нее:

$$x_{extn} = x_{0n} \cdot e^{\frac{\arctg 2u}{u}}$$

В табл. 3 приведено сравнение вычисления нулей по приведенным формулам: прямой метод и рекурсивный метод. С точностью до 25 знака после запятой эти методы дают одинаковый результат. Для практических целей целесообразно использовать, как следует из результатов таблицы, рекуррентный, как наиболее экономичный.

Таблица 3

Координаты экстремумов функции $\varphi(t) < 1$ с точностью 25 знаков, вычисленные разными методами при $u=10$; n — порядковый номер экстремума, $n=0$ при координате $x=1$

n	Рекурсивное вычисление экстремумов $e^{\frac{\operatorname{arctg} 2u}{u}} \prod_{j=-1}^n \frac{1}{\rho}$	Прямое вычисление экстремумов $e^{\frac{\operatorname{arctg} 2u}{u}} \rho^n$
-1	0.850377022249623007165095626748	0.850377022249623007165095626748
-2	0.62111766545705862788824958958	0.62111766545705862788824958958
-3	0.453666014307688015014264038838	0.453666014307688015014264038838
-4	0.331358877687648688552999893043	0.331358877687648688552999893043
-5	0.242025415965917614604905271841	0.242025415965917614604905271841
-6	0.17677601512367406419807975046	0.17677601512367406419807975046
-7	0.12911767715918761154049847415	0.12911767715918761154049847415
-8	0.0943078988590208751229019656147	0.0943078988590208751229019656146
-8	0.0688827431137723421650505536578	0.0688827431137723421650505536578
-9	0.0503121409371118809960752023056	0.0503121409371118809960752023056
-10	0.0367481231328852444777990041919	0.0367481231328852444777990041919
-11	0.0268409280272463680589978351312	0.0268409280272463680589978351312
-12	0.0196046860613437618905412289472	0.0196046860613437618905412289472
-13	0.0143193154563693566903340823841	0.0143193154563693566903340823841
-14	0.0104588665433066430642113503385	0.0104588665433066430642113503385
-15	0.00763918426854981808431055676863	0.00763918426854981808431055676864
-16	0.00557968074716526658165282142453	0.00557968074716526658165282142453

Таким образом определены опорные точки для генерации базисных функций и описаны способы их получения. Из свойств функции следует, что удобней всего рассматривать в качестве опорных точек нули функции, поскольку их расположение четко определено и не подвержено смещению, как экстремумы, особенно удобна точка с координатой $t=1$, поскольку независимо от аргумента u значение функции всегда будет равно 0 для функции $\frac{\sin(uln(t))}{\sqrt{t}}$ и 1 для $\frac{\cos(uln(t))}{\sqrt{t}}$.

Следующее, что может представлять проблему при генерации базисной функции это выбор шага дискретизации. В силу того, что длина одного периода $\varphi(t)$ отличается от длин смежных периодов в ρ раз, то на каждый период придется неравномерное число отсчетов, большее либо меньшее, чем требуется.

Это значит, что каждый период должен иметь свой шаг дискретизации dt .

Пусть имеется следующая функция:

$$D(n, m) = \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{m},$$
 где m – требуемое количество отсчетов на период, n – номер нуля, с которого начинается n -й период.

Тогда множество результирующих координаты отсчетов $\varphi(t)$ будет иметь вид:

$$\begin{aligned} M = & \rho_0, \rho_0 + D(\rho_0, m), \rho_0 + 2D(\rho_0, m), \dots \\ & \dots, \rho_1, \rho_1 + D(\rho_1, m), \rho_1 + 2D(\rho_1, m), \dots, \\ & \dots, \rho_k, \rho_k + D(\rho_k, m), \rho_k + 2D(\rho_k, m) \end{aligned}$$

где ρ_0 – начальная координата генерации, такая, что $\varphi(\rho_0) = 0$.

Такой выбор шага дискретизации влияет на представление функции, поскольку отсчеты равномерно распределены по периоду, однако скорость изменения значения $\varphi(t)$ в пределах периода неравномерна, что отражено в рис. 3:

Однако разработан и другой подход к выбору шага дискретизации, основанный на свойствах самой функции – можно использовать то, что в $\varphi(t)$ все точки жестко связаны через число ϵ , а операции в пространстве этой функции имеют свои аналоги, выражаемые через это число.

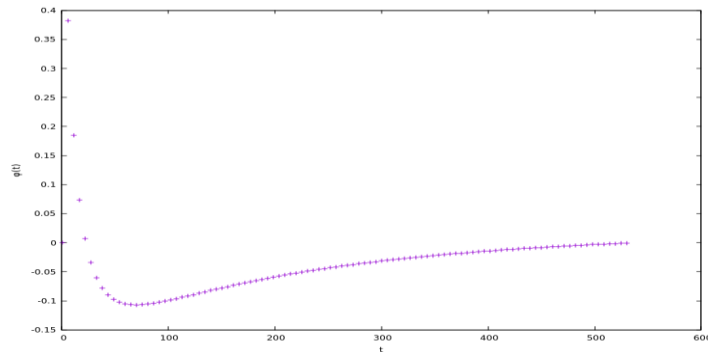


Рис. 3. 100 равномерно распределенных отсчетов одного периода $\varphi(t)$

Исходя из того, что умножив точку нуля либо экстремума функции $\varphi(t)$ на ρ , мы получим аналогичную точку для следующего полупериода и это будет аналогично операции сложения для периодических функций; экстраполируем это правило на все точки функции $\varphi(t)$, и определим шаг дискретизации функции как $dt = e^{\frac{\pi}{\omega \cdot k/2}} = \rho^{\frac{2}{k}} = \sqrt[k]{\rho^2}$, где k — требуемое количество точек на период. В формуле используется $k/2$ в силу того, что умножение на ρ дает координату не в следующем периоде, а в следующем полупериоде, что означает, что количество отсчетов k нужно распределить по двум полупериодам и для этого разделить на 2.

Таким образом, dt есть саморегулирующийся шаг дискретизации функции $\varphi(t)$, позволяющий непрерывно генерировать ее(функцию) с требуемым количеством отсчетов на один период следующим образом:

$$dt = \sqrt[k]{\rho^2}$$

$$t_n = t_{n-1} \cdot dt$$

Что позволяет не рассчитывать шаг дискретизации для каждого отдельного периода и получить распределение отсчетов по периоду, учитывающее скорость изменения функции $\varphi(t)$, что отражено в рис. 4.

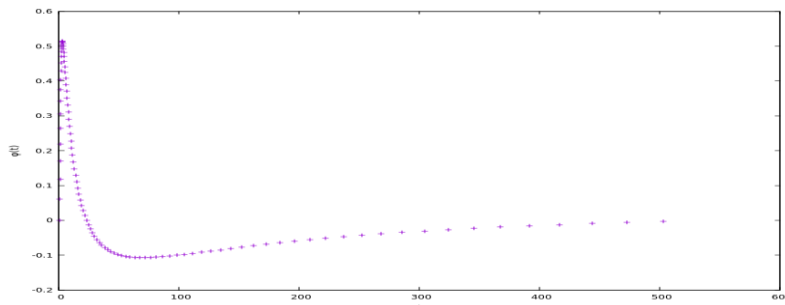


Рис. 4. 100 отсчетов одного периода $\varphi(t)$ с автоматическим шагом дискретизации

Таким образом, обозначена проблема выбора шага дискретизации и предложено 2 подхода к ее решению.

Описанная модель имеет широкое потенциальное поле применения в обработке изображений и цифровых сигналов, поскольку позволяет получить отражение объекта в мультипликативном пространстве, инвариантное к форме входящего сигнала и его масштабу, по следующему алгоритму:

- 1) Получить множество значений дискретного сигнала (ДС);
- 2) Определить множество точек U , на которые будет отображаться сигнал;
- 3) Для каждого $u \in U$ получить базисную функцию Меллина (M_u);
- 4) Для выбранного (первого) u вычислить сумму произведения каждого значения M_u на одно значение ДС и на dt ;
- 5) Выполнить шаг 4 для каждого значения ДС;
- 6) Просуммировать значения, полученные на шаге 5;
- 7) Повторять с шага 4 для каждого $u \in U$.

Структурная схема процесса получения значений выглядит следующим образом:

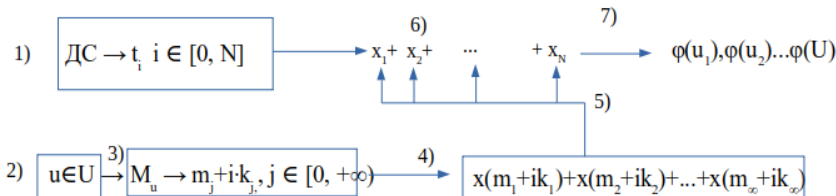


Рис. 5. Структурная схема алгоритма преобразования

Заключение. Таким образом, в данной работе была проанализирована и получена обобщенная модель базисных функций преобразования Меллина, обозначены важные при работе с ними моменты и предложены методы работы с ними при построении цифровой реализации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Филипп Флайолет, Ксавье Гурдон, Филипп Дуллас. Преобразование Меллина и асимптотика: гармонические суммы // Theoretical Computer Science. – 1995. – № 144. – С. 3-38.
2. Бертран Ж., Бертран П., Оварлез Дж. Преобразования Меллина. Справочник по преобразованиям и приложениям. – 2-е изд. Эд. Александр Дмитриевич Пуларикас. Boca Raton: CRC Press LLC, 2000.
3. Маричев О.И. Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). – Минск: Наука и техника, 1978. – 311 с.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – М.: Наука, 1969. – 344 с.
5. Фриц Оберхеттингер. Таблицы преобразований Меллина. – Springer-Verlag. Берлин, Гейдельберг, Нью-Йорк, 1974.
6. Норберт Суллонол, Героль Бауманн. О преобразованиях Меллина Дельта-функции дирака, функции размерности Хаусдорфа и теореме Меллина // Прикладной анализ дробного исчисления. – 2004. – Т. 7.
7. Зыкова Т.В. Об интегральном представлении типа Меллина–Барнса решения системы полиномиальных уравнений специального вида // Вестник СибГАУ. – 2015. – Т. 16, № 2. – С. 310-316.
8. Антипова И.А. Обращения многомерных преобразований Меллина // УМН. – 2007. – Т. 62. – Вып. 5 (377). – С. 147-148. DOI: <https://doi.org/10.4213/rm5580>.
9. Макаров А.М., Постовалов С.А. Моделирование нормально распределенных полей с заданной корреляционной функцией // Всероссийская научная конференция молодых ученых, аспирантов и студентов «Теоретические и методические проблемы эффективного функционирования радиотехнических систем» («системотехника-2016»). – С. 74-83.

10. Макаров А.М., Мулкиджанян П.П., Постовалов С.С. Управление распределенными интегрированными системами охраны важных объектов // VIII Всероссийская научная конференция «Системный синтез и прикладная синергетика»: Сб. научных трудов. – Ростов-на-Дону; Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2017. – С. 346-350.
11. Mitchell R.L. Permanence of the Log-Normal Distribution // Journal of the Optical Society of America. – 1968. – Vol. 58. – P. 1267-1272.
12. Джанни Паньини, Ян Кван Чен. Свертка Меллина для фильтрации сигналов и ее применение к Гауссианизации шума Льюи. Труды ASME 2011 // Международные проектно-технические конференции и компьютеры и информация в области проектирования Conference IDETC / CIE 2011, 26-31 августа 2011, Вашингтон, США.
13. Шенг И., Асенолт Х. Эксперименты по распознаванию образов с использованием инвариантных дескрипторов Фурье-Меллина // J. Opt. Soc. Am. – 1986. – № 3 (6). – С. 885-887.
14. Деррид С. Надежная и эффективная аппроксимация преобразования Фурье-Меллина для реконструкции черно-белых изображений и полного описания инвариант / С. Derrode, Ф. Ghorbel // Computer Vision and Image Understanding. – 2001. – Том. Восемьдесят три.
15. Филлип Звидч Е. Новая реализация радиолокационной классификации судов // IEEE Trans. of Pattern analysis and machine Intellecenzy. – Март 1983. – Т. PAMI-5, № 2.
16. Макаров А.М., Ермаков А.С. Оптимальный согласованный фильтр для обнаружения сигнала на фоне шума с неизвестной корреляционной функцией // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2015. – № 11 (172). – С. 42-54.
17. Оварлез Ю. Автономное присоединение расчета время-частотных распределений с помощью быстрого Меллина // Proc IEEE-ICASSP. – 1992.
18. Макаров А.М., Мальцев Ф.А., Евдокимов О.Ю. Цифровой алгоритм преобразования Меллина с экспоненциальной выборкой по частоте // Известия ТРТУ. – 1997. – № 1 (4). – С. 20-22.
19. Редди С., Чарлетти Б. Техника на основе преобразования Фурье для преобразования, вращения и масштабирования инвариантного изображения Регистрация // IEEE Trans. об обработке изображений. – 1996. –Т. 5. – П. 1266-127.
20. Макаров А.М., Крутихин В.В. Численные методы вычисления спектров в базе интегрального преобразования Меллина // Известия ТРТУ. – 1999. – № 2 (12). – С. 9-10.
21. Иванов И.В., Довлатян А.Р., Макаров А.М. Основные соотношения для тригонометрически-логарифмических функций в пространстве интегрального преобразования Меллина // Научное обозрение. – 2015. – № 11. – С. 132-136.

REFERENCES

1. Filipp Flayolet, Ksav'e Gurdon, Filipp Dullas. Preobrazovanie Mellina i asimptotika: garmonicheskie summy [Mellin transform and asymptotics: harmonic sums], *Theoretical Computer Science*, 1995, No. 144, pp. 3-38.
2. Bertran Zh., Bertran P., Ovarlez Dzh. Preobrazovaniya Mellina. Spravochnik po preobrazovaniyam i prilozheniyam [The Mellin Transform. Handbook of transformations and applications]. 2nd ed. Ehd. Aleksandr Dmitrievich Pularikas. Boca Raton: CRC Press LLC, 2000.
3. Marichev O.I. Metod vychisleniya integralov ot special'nykh funkciy (teoriya i tablicy formul) [The method of calculating integrals of special functions (theory and tables of formulas)]. Minsk: Nauka i tekhnika, 1978, 311 p.
4. Beytmen G., Ehrdeyi A. Tablicy integral'nykh preobrazovaniy [Таблицы интегральных преобразований]. Vol. 1. Preobrazovaniya Fur'e, Laplasy, Mellina [Fourier, Laplace, Mellin Transformations]. Moscow: Nauka, 1969, 344 p.
5. Fric Oberhettinger. Tablicy preobrazovaniy Mellina [Таблицы преобразований Меллина]. Springer-Verlag. Berlin, Gejdel'berg, N'yu-Jork, 1974.
6. Norbert Sullonol, Gerol' Baumann. O preobrazovaniyakh Mellina Del'ta-funkcii diraka, funkcii razmernosti Hausdorfa i teoreme Mellina [On the Mellin transformations of the Dirac Delta function, the Hausdorff dimension function and the Mellin theorem], *Prikladnoy analiz drobnogo ischisleniya* [Applied fractional calculus analysis], 2004, Vol. 7.
7. Zykova T.V. Ob integral'nom predstavlenii tipa Mellina–Barnsa resheniya sistemy polinomial'nykh uravneniy special'nogo vida [On integral representation of Mellin-Barnes type for solving a system of polynomial equations of a special type], *Vestnik SibGAU* [Vestnik SibSAU], 2015, Vol. 16, No. 2, pp. 310-316.

8. Antipova I.A. Obrashcheniya mnogomernykh preobrazovaniy Mellina [Treatment of the multi-dimensional Mellin transformation], *UMN* [Russian Mathematical Surveys], 2007, Vol. 62, Issue 5 (377), pp. 147-148. DOI: <https://doi.org/10.4213/rm5580>.
9. Makarov A.M., Postovalov S.A. Modelirovanie normal'no raspredelennykh poley s zadannoy korrelyatsionnoy funktsiey [Modeling of normally distributed fields with a given correlation function], *Vserossiyskaya nauchnaya konferentsiya molodykh uchenykh, aspirantov i studentov «Teoreticheskie i metodicheskie problemy effektivnogo funkcionirovaniya radiotekhnicheskikh sistem» («sistemotekhnika-2016»)* [All-Russian scientific conference of young scientists, graduate students and students "Theoretical and methodological problems of effective functioning of radio systems" ("system engineering-2016")], pp. 74-83.
10. Makarov A.M., Mulkidzhanyan P.P., Postovalov S.S. Upravlenie raspredelennymi integrirovannymi sistemami okhrany vazhnykh ob"ektov [Management of distributed integrated systems of protection of important objects], *VIII Vserossiyskaya nauchnaya konferentsiya «Sistemnyy sintez i prikladnaya sinergetika»: Sb. nauchnykh trudov* [VIII all-Russian scientific conference "System synthesis and applied synergetics": Collection of scientific works]. Rostov-on-Don; Taganrog: Izd-vo YUFU, 2017, pp. 346-350.
11. Mitchell R.L. Permanence of the Log-Normal Distribution, *Journal of the Optical Society of America*, 1968, Vol. 58, pp. 1267-1272.
12. Dzhanni Pan'ini, Yan Kvan Chen. Svertka Mellina dlya fil'tracii signalov i ee primeneniye k Gaussianizatsii shuma L'yui. Trudy ASME 2011 [Mellin convolution for signal filtering and its application to Louie's noise Gaussianization. Proceedings of ASME 2011], *Mezhdunarodnye proektno-tekhnicheskie konferentsii i komp'yutery i informatsiya v oblasti proektirovaniya Confernce IDETC / CIE 2011, 26-31 avgusta 2011, Vashington, SSHA* [International design conferences and computers and information in the field of design Confernce IDETC / CIE 2011, 26-31 August 2011, Washington, USA].
13. Sheng I., Asenolt H. Eksperimenty po raspoznavaniyu obrazov s ispol'zovaniem invariantnykh deskriptorov Fur'e-Mellina [Experiments on pattern recognition using invariant Fourier-Mellin descriptors], *J. Opt. Soc. Am.*, 1986, No. 3 (6), pp. 885-887.
14. Derrid S. Nadezhnaya i effektivnaya approksimatsiya preobrazovaniya Fur'e-Mellina dlya rekonstruktsii cherno-belykh izobrazheniy i polnogo opisaniya invariant [Reliable and efficient approximation of the Fourier-Mellin transform for reconstruction of black-and-white images and complete description of the invariant], *S. Derrode, F. Ghorbel, Computer Vision and Image Understanding* [Computer Vision and Image Understanding], 2001, Vol. Eighty-three.
15. Filipp Zvidch E. Novaya realizatsiya radiolokatsionnoy klassifikatsii sudov [New implementation of radar classification of vessels], *IEEE Trans. of Pattern analysis and machine Intellectenzy*, Mart 1983, Vol. PAMI-5, No. 2.
16. Makarov A.M., Ermakov A.S. Optimal'nyy soglasovannyi fil'tr dlya obnaruzheniya signala na fone shuma s neizvestnoy korrelyatsionnoy funktsiey [Optimal matched filter for signal detection against noise background with unknown correlation function], *Izvestiya YUFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2015, No. 11 (172), pp. 42-54.
17. Ovarlez Yu. Avtonomnoe prisoedineniye rascheta vremya-chastotnykh raspredeleniy s pomoshch'yu bystrogo Mellina [Self-contained connection of time-frequency distributions calculation using fast Mellin], *Proc IEEE-ICASSP*, 1992.
18. Makarov A.M., Mal'cev F.A., Evdokimov O.Yu. Cifrovoy algoritm preobrazovaniya Mellina s eksponentsial'noy vyborkoy po chastote [Digital algorithm the Mellin transform with exponential sampling frequency], *Izvestiya TRTU* [Izvestiya TSURE], 1997, No. 1 (4), pp. 20-22.
19. Reddi S., Charletti B. Tekhnika na osnove preobrazovaniya Fur'e dlya preobrazovaniya, vrashcheniya i masshtabirovaniya invariantnogo izobrazheniya Registratsiya [A technique based on Fourier transform to transform, rotate and scale an invariant image Registration], *IEEE Trans. ob obrabotke izobrazheniy* [IEEE Trans. about image processing], 1996, Vol. 5, pp. 1266-127.
20. Makarov A.M., Krutikhin V.V. Chislennyye metody vychisleniya spektrov v bazise integral'nogo preobrazovaniya Mellina [Numerical methods for calculating spectra in the basis of the integral Mellin transformation] *Izvestiya TRTU* [Izvestiya TSURE], 1999, No. 2 (12), pp. 9-10.
21. Ivanov I.V., Dovlatyan A.R., Makarov A.M. Osnovnye sootnosheniya dlya trigonometricheskilogarifmicheskikh funktsiy v prostranstve integral'nogo preobrazovaniya Mellina [Basic relations for trigonometric-logarithmic functions in the space of the integral Mellin transform], *Nauchnoye obozreniye* [Scientific review], 2015, No. 11, pp. 132-136.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н. А.Б. Чернышев.

Постовалов Степан Сергеевич – ООО "Сигма-Групп"; e-mail: poroh20100@yandex.ru; 357500, г. Пятигорск, ул. Адмиральского, д. 2, к. 2, кв. 813; тел.: 89064996162; ведущий разработчик; магистр.

Макаров Анатолий Михайлович – Пятигорский государственный лингвистический университет; e-mail: mellin_22@mail.ru; 357532, г. Пятигорск, пр. Калинина, 9; тел.: 89283746783; кафедра информационно-коммуникационных технологий, математики и информационной безопасности; профессор.

Postovalov Stepan Sergeevich – "Sigma Group" LLC; e-mail: poroh20100@yandex.ru; 357500, Pyatigorsk, Admiral'skogo ыекуе, 2, k. 2, room 813; phone: +79064996162; lead developer; master's.

Makarov Anatoliy Mikhaylovich – Pyatigorsk State Linguistic University; e-mail: mellin_22@mail.ru; 357532, Pyatigorsk, Kalinina Ave., 9; phone: +79283746783; the department of information and communication technologies, mathematics and information security; professor.

УДК 004.891.2

DOI 10.23683/2311-3103-2018-3-33-45

А.Н. Целых, В.С. Васильев, Л.А. Целых

КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ВЗВЕШЕННЫХ ЗНАКОВЫХ ГРАФОВ НА ОСНОВЕ ФУНКЦИОНАЛА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОГНИТИВНЫХ МОДЕЛЕЙ*

Предлагается новый подход к кластеризации на основе модели разделения вершин на группы по признаку более высокой потенциальной энергии ребер внутри групп, чем между ними. Этот метод реализуется посредством минимизации функционала потенциальной энергии упругой деформации для ориентированных взвешенных знаковых графов. Существующие структуры в матрице смежности графа выражаются в ее структурированности. Поиск наилучшего упорядочения вершин графа производится посредством процесса оптимизации в пространстве действительных чисел, что неизбежно отображается на множество перестановок индексов вершин. Метод разрабатывался для сетей, представляющих взаимоотношения в экономических системах. Эти взаимоотношения представлены разнородными факторами и причинно-следственными связями между ними. Система объектов и их взаимоотношения представлены в виде нечеткой когнитивной карты, которая, по сути, является ориентированным взвешенным знаковым графом. К этому графу и применяются методы кластеризации. Новизна подхода заключается в том, что решение задачи кластеризации находится как решение задачи оптимизации функции многих переменных (функционалов). Предложенный метод использует механистическую аналогию, которая является частным случаем метрических представлений, что обеспечивает выпуклость задачи. Данный подход позволяет конструировать различные функционалы с понятной интерпретацией и предсказуемостью процесса минимизации. Работа алгоритма заключается в нахождении нумерации вершин графа, при которой достигается наименьшее значение функционала. На этой нумерации компоненты градиента функционала используются для определения границ кластеров. Критерием отнесения вершин к одному сообществу является близость индексов и одинаковые знаки градиента. Эти критерии являются четко формализуемыми. Предлагаемый алгоритм относит вершины к тому или иному кластеру и, одновременно, определяет порядок вершин в кластере. Этот порядок отражает степень распределение вершин по соотношению внутрикластерной энергии и внекластерной энергии связей. Иерархическая структура графа выявляется путем рекурсивного применения предлагаемого алгоритма внутри каждого кластера, игнорируя межкластерные связи. Применяемый в алгоритме кластеризации функ-

* Данная работа произведена при поддержке гранта РФФИ № 16-01-00098.