22. *Shchetkin V.S.* Issledovanie rabotosposobnosti trub frontovogo ekrana kotla BKZ-420-140 NGM Bobruyskoy TETS-2 [Investigation of the performance of pipes of the frontal screen of the boiler BKZ-420-140 NGM Bobruiskaya CHPP-2] *Teploenergetika* [Thermal Engineering],, 1985, No. 1.
23. *Tsvetkov F.F., Grigor'ev B.A.* Teplomassoobmen [Heat and Mass Transfer]. Moscow: Izd-vo MEI, 2005, 550 p.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор, А.Р. Бестугин.

**Ляшенко Александр Леонидович** – Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург; e-mail: akuna_matata_kmv@mail.ru; 190000, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67, лит. А; тел.: +79111049232; кафедра управления в технических системах; доцент.

**Liashenko Alexander Leonidovich** – Saint-Petersburg State university of aerospace instrumentation, Saint-Petersburg; e-mail: akuna_matata_kmv@mail.ru; 67, Bolshaya Morskaia str., Saint-Petersburg, 190000, Russia; phone: +79111049232; the department of control in technical systems; associate professor.

УДК 531.38, 575 DOI 10.23683/2311-3103-2018-5-110-119

**Д.В. Тимошенко, Г.В. Куповых, А.А. Илюхин**

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБЪЕКТОВ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

*Излагаются основы метода анализа геометрических конфигураций упругих одномерных объектов (гибких стержней), изготовленных из композитных материалов, обладающих многослойной внутренней структурой. Интерес к изучению процессов деформации стержней связан с тем, что стержни или объекты, близкие к ним по свойствам, являются конструктивными элементами большого количества технических систем. В качестве примеров здесь можно привести подвижные, соединительные и демпфирующие устройства и конструкции в транспорте и инженерных сооружениях. Кроме того, модель гибкого стержня находит свое применение в исследовании поведения и свойств молекул биологических полимеров и, в частности, ДНК. Необходимость разработки новых и развития существующих методов качественного и численного анализа динамики упругих элементов технических систем объясняется высокими требованиями к таким исследованиям, их прикладным характером. В то же время, отсутствие строгой континуальности с одновременным усложнением иерархичности структур для композитных материалов в случае значительных деформаций ведет к принципиальным трудностям описаниях этих явлений с помощью стандартных методов теории упругости. Создание в последнее время технологий микроструктурных исследований позволяет делать выводы о существенном влиянии структурных свойств вещества на динамику процессов деформации. Расширение области применения композитных материалов вызывает необходимость интенсификации исследований зависимостей между механическим свойствами композитов и их структурой, в том числе с точки зрения определения устойчивых форм равновесия деформированных упругих элементов. Описанный в работе метод перехода от структурных характеристик материала к пространственной геометрии объекта проиллюстрирован на примере состояния естественной закрученности стержня. Особое внимание уделено изучению условий образования замкнутых конфигураций, поскольку они соответствуют критическим случаям функционирования систем.*

*Упругие стержни; модели сплошной среды; композитные материалы.*

**D.V. Tymoshenko, G.V. Kupovykh, A.A. Ilyukhin**

## MODELING OF ONE-DIMENSIONAL COMPOSITE OBJECTS BEHAVIOR UNDER DYNAMIC LOADS

*In this paper, we present the fundamentals of the method for analyzing the geometric configurations of elastic one-dimensional objects (flexible rods) made of composite materials with a multi-layered internal structure. Interest in studying the deformation processes of rods is due to the fact that rods or objects close to them in terms of properties are constructive elements of a large number of technical systems. Examples include mobile, connecting and damping devices and structures in transport and engineering facilities. In addition, the flexible rod model finds its application in the study of the behavior and properties of biological polymers molecules and, in particular, DNA. The need to develop new and existing methods for the qualitative and numerical analysis of the dynamics of elastic elements in engineering systems is explained by the high requirements for such studies, their applied nature. At the same time, the absence of strict continuity with simultaneous complication of the hierarchy of structures for composite materials in the case of significant deformations leads to fundamental difficulties in describing these phenomena using standard methods of the theory of elasticity. The recent development of microstructural research allows one to draw conclusions about the significant influence of the structural properties of matter on the dynamics of deformation processes. Expansion of the field of composite materials application makes it necessary to intensify studies of the relationships between the mechanical properties of composites and their structure, including from the standpoint of determining stable forms of equilibrium in deformed elastic elements. The method of transition from the structural characteristics of the material to the spatial geometry of the object described in this work is illustrated by the example of the state of the rod's natural twist. Particular attention is paid to the study of the conditions for the formation of closed configurations, since they correspond to critical cases of the systems functioning.*

*Elastic rods; continuum models; composite materials.*

**Введение.** Упругие стержни, боковая поверхность которых в свободном состоянии обладает кручением, – естественно закрученные стержни – встречаются в качестве конструктивных элементов в различных технических системах, участвуют в процессах с интенсивной динамикой. Сказанное определяет актуальность исследований упругих деформаций таких стержней и влияние этих деформаций на геометрические характеристики стержней.

Качество этих исследований определяется корректностью моделей, описывающих динамику физических процессов, сопровождающих упругие деформации исследуемых объектов.

В то же время, для теории упругих стержней, как части механики сплошных сред и конструкций, в последние годы происходит расширение области применения, ее методы с различными модификациями начинают применяться на макро-, мезо-, микроуровнях [1–4, 19–21], а также на нано-уровне. Здесь следует выделить одну из ключевых на сегодняшний день технологических задач проектирования и производства нанокомпозитных материалов.

Особенностью нанокомпозитных материалов является многоуровневость их структуры, которая, как правило, состоит из матричной части, задача которой состоит в передаче взаимодействий между элементами, и каркасной части (так называемой арматуры), которая фактически выступает в роли скрепляющей части. Данное устройство приводит к наличию у нанокомпозитов особых физико-механических свойств по сравнению с обычными материалами.

При этом совместное использование материалов со значительно отличающимися механическими характеристиками, приводит к возникновению в рамках единой конструкции новых полезных свойств, недостижимых при использовании этих материалов по отдельности.

Исследование таких эффектов ведет к необходимости решения задач молекулярной динамики, что в свою очередь вызывает необходимость создания переходных математических моделей, объединяющих в себе идеи механики сплошных сред и молекулярной динамики.

Преимущества таких концепций состоит в том, что в силу малости взаимных смещений частиц вещества во внутренних участках материала, образующего стержень, можно пренебречь эффектами дисторсий, дислокаций и возникновения других дефектов, и как следствие, рассматривать только модели механики сплошной среды [5, 6]. В случаях, когда арматурой нанокомпозита выступает углеродная каркасная структура, ее рассматривают в качестве упругого стержня, в котором при взаимодействии с передающей матрицей внешнего слоя возникает состояние естественной закрученности [6]. Следует отметить, что даже в тех случаях, когда можно обоснованно пренебречь явлениями контактного взаимодействия или возникновения дислокаций в силу их малости, недопустимо пренебрегать эффектами, влияющими на пространственную геометрию объекта в целом. Одним из таких эффектов является кручение. Для композитных материалов вопрос геометрии арматурной составляющей может оказаться критическим, поскольку некорректная геометрия структуры может приводить к неучтенным эффектам, влияющим на свойства материала в целом. С точки зрения корректного описания поведения одномерного упругого тела и его геометрии необходимо построить уточненную математическую модель, которая бы учитывала эффект естественного кручения, возникающего в структуре композита. В качестве одной из таких моделей далее рассмотрим модель деформации так называемого естественно закрученного стержня, то есть стержня, ось которого в свободном (недеформированном) состоянии обладает ненулевым кручением. В случае композитного материала это означает, закрученное состояние арматурного основания будет приводить к изменению свойств матричной части, делать возможным смещение слоев, появление внутренних напряжений, изменению топологии боковой поверхности. Несмотря на то, что присутствие естественного кручения является достаточно простой гипотезой, учет этого фактора приводит к новым качественным эффектам, не наблюдаемым в рамках классической теории Кирхгофа–Клебша.

**Постановка задачи.** Построение моделей упругих деформаций гибких стержней на начальном этапе связано с записью трехмерных уравнений деформации сплошной среды. Это вызвано необходимостью получения дополнительных уравнений связи между основными переменными, входящими в систему уравнений Кирхгофа.

Система уравнений Кирхгофа, записанная в нормальной форме в обозначениях переменных, принятом в работе [14], имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dM_1}{ds} + \omega_2 M_3 - \omega_3 M_2 = 0, \\ \dfrac{dM_2}{ds} + \omega_3 M_1 - \omega_1 M_3 + P\gamma_3 = 0, \\ \dfrac{dM_3}{ds} + \omega_1 M_2 - \omega_2 M_1 - P\gamma_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\gamma_1}{ds} + \gamma_3\omega_2 - \gamma_2\omega_3 = 0, \\ \dfrac{d\gamma_2}{ds} + \gamma_1\omega_3 - \gamma_3\omega_1 = 0, \\ \dfrac{d\gamma_3}{ds} + \gamma_2\omega_1 - \gamma_1\omega_2 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

В теории стержней Кирхгофа–Клебша принимается, что в качестве уравнений связи между переменными $M_i$ $\omega_i$ можно использовать соотношения:

$$M_1 = B_1\omega_1, \quad M_2 = B_2\omega_2, \quad M_3 = B_3\omega_3, \tag{2}$$

где $B_i$ – ненулевые элементы матрицы жёсткостей стержня, расположенные на главной диагонали [7].

Недостатками уравнений связи в форме (2) является возникновение существенных отклонений при описания деформаций стержней нестандартной свободной конфигурации, а также стержней с близкими соотношениями между длиной и поперечным сечением [8–10]. В настоящее время сказанное получило новые подтверждения в связи с распространением методов теории стержней в область молекулярного дизайна – междисциплинарного подхода к исследованию и разработке сложных молекулярных соединений.

Применение модели упругого стержня, основанной на теории Кирхгофа–Клебша, для описания геометрии молекулярных объектов уже в простейших случаях приводит к расхождению с натурными экспериментами [13, 14].

Приведенные факты вызвали появление ряда работ, направленных на уточнение и обобщение уравнений связи (2), одними из первых работ в этой области стали работы А.И. Лурье и Г.Ю. Джанелидзе [9, 10]. Ими рассмотрен случай растяжимого, равномерно закрученного по длине, прямолинейного в свободном состоянии упругого стержня. Обозначим относительное удлинение при деформации через $\varepsilon$, полярный момент инерции сечения через $I_p$, естественное кручение через *r*, модуль юнга и площадь сечения соответственно через $E$ и $\Omega$ соответственно. Тогда уравнения связи Лурье – Джанелидзе записываются в виде [10]:

$$\begin{cases} M_1 = B_1(\omega_1 - r) + E(I_P - T)r\varepsilon \\ M_2 = B_2\omega_2 \\ M_3 = B_3\omega_3 \\ \gamma_1 = \dfrac{E\Omega}{P}\varepsilon + \dfrac{E}{P}(I_P - T)r(\omega_1 - r) \end{cases} \tag{3}$$

Для дальнейшего качественного анализа деформаций стержня необходимо получить одно или несколько решений системы уравнений (1). Используя для этого уравнения связи (3), можно оценить возникающие изменения по сравнению со случаем прямолинейного стержня.

Будем рассматривать случай равенства главных изгибных жесткостей:

$$B_2 = B_3. \tag{4}$$

В этом случае уравнения (1) – будут иметь следующие первые интегралы:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \tag{5}$$

$$M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2 + M_3\gamma_3 = K, \tag{6}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{M_1^2}{B_1} + \frac{1}{B_2}\left(M_2^2 + M_3^2\right)\right) - p\gamma_1 = H. \tag{7}$$

Условие (4) совместно с первым уравнением (1) позволяют получить четвертый интеграл системы (1)–(3):

$$M_1 = C_1. \tag{8}$$

Преобразуем полученные интегралы относительно величин, входящих в соотношения (3):

$$B_1\omega_1\gamma_1 + B_2(\omega_2\gamma_2 + \omega_3\gamma_3) + r\left(\frac{I_P - T}{\Omega}P\gamma_1{}^2 - B_1\gamma_1\right) = K, \tag{9}$$

$$B_1\omega_1^2 + B_2\left(\omega_2^2 + \omega_3^2\right) - 2P\gamma_1 + 2r\omega_1\left(\frac{I_P - T}{\Omega}P\gamma_1 - B_1\right) = H\,, \tag{10}$$

$$M_1 = B_1(\omega_1 - r) + r\frac{(I_P - T)P}{\Omega}\gamma_1 = C_1\,. \tag{11}$$

Несмотря на то, что найдено только четыре интеграла системы (1)–(3), в соответствии с теоремой Якоби о последнем множителе, этого достаточно для получения основных переменных задачи в функциях дуговой координаты. В качестве вспомогательных соотношений можно использовать кинематические формулы Эйлера:

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = \dot\psi\cos\vartheta + \dot\varphi\,, \qquad \gamma_1 = \cos\vartheta\,,\\
&\omega_2 = \dot\psi\sin\vartheta\sin\varphi + \dot\vartheta\cos\varphi\,,\ \ \gamma_2 = \sin\vartheta\sin\varphi\,,\\
&\omega_3 = \dot\psi\sin\vartheta\cos\varphi - \dot\vartheta\sin\varphi\,,\ \ \gamma_3 = \sin\vartheta\cos\varphi\,.
\end{aligned} \tag{12}$$

Соотношения (12) определяют углы Эйлера между подвижным и естественным базисами для деформированного состояния стержня.

С помощью интегралов (9) – (11) и соотношений (12), как показано в [14], можно получить выражения для величин $M_i, \omega_i, \gamma_i$ как функций дуговой координаты. В частности, для величины $\omega_1$ получаем выражение:

$$\omega_1 = \frac{1}{B_1}(C_1 + rB_1) + r\frac{(T - I_P)P}{B_1\Omega}\nu\,. \tag{13}$$

**Обсуждение.** Следствием соотношения (13) является ограниченность кручения $\omega_1$ в процессе деформации [14]:

$$\frac{1}{B_1}(C_1 + rB_1) - r\frac{(T - I_P)P}{B_1\Omega} \le \omega_1 \le \frac{1}{B_1}(C_1 + rB_1) + r\frac{(T - I_P)P}{B_1\Omega}\,. \tag{14}$$

Нахождение всех девяти переменных системы уравнений (1) как функций дуговой координаты фактически позволяет получить обобщение решения системы уравнений Кирхгофа в рамках классической теории упругости для случая интегрируемости Лагранжа.

Следует отметить, что приведенный результат хотя и представляет самостоятельный математический интерес, на самом деле является ключевым этапом более общей задачи, состоящей в определении пространственной конфигурации упругого одномерного объекта (стержня), масштабы которого, как показано выше, могут варьироваться в диапазоне от нано- до макро- размеров. Собственно получение аналитического решения системы уравнений Кирхгофа необходимо для последующего построения на основе компонентов решения уравнений, связывающих в конечном виде микропараметры исследуемого материала или объекта, возникающими внутри объекта или материала напряжениями и деформациями с пространственной конфигурацией объекта. На пути решения указанной задачи возникает ряд трудностей, связанных непосредственно с положениями нелинейной теории стержней.

Система уравнений деформации стержня форме Кирхгофа объединяет в себе локальные геометрические характеристики стержня и его интегральные силовые параметры (силы и моменты). Поэтому в зависимости от постановки задачи для интегрирования исходной системы необходимо привлекать различные дополнительные уравнения. В то же время, нахождение явных зависимостей силовых и локальных геометрических характеристик от дуговой координаты недостаточно для корректного описания пространственной геометрии деформируемого объекта. На наш взгляд, последнее является ключевой проблемой.

Особое место при определении геометрических характеристик пространственных конфигураций стержневых систем занимают случаи замкнутых конфигураций. Интерес к замкнутым конфигурациям объясняется широким распространением замкнутых стержневых систем в технических устройствах и механизмах [7].

При этом, в ряде случаев образование именно замкнутых конфигураций, наоборот, является нежелательным, примером чего могут служить космические тросовые системы, где состояние замкнутости является критическим случаем. Задача определения условий замкнутости возникает и в случае исследования пространственных конфигураций биополимеров [13–15]. В связи с этим в работах [13–15] был развит метод определения условий образования замкнутых конфигураций упругих стержней и их систем, позволяющий идентифицировать как физические параметры самой системы, необходимые для получения замкнутых конфигураций, так и характеристики внешних воздействий, обеспечивающих образование таких конфигураций. Предложенный метод основывается на специальных уравнениях, описывающих геометрию деформированного стержня [7]. Для построения указанной системы достаточно знать решение системы уравнений Эйлера–Кирхгофа, описывающей деформацию стержня.

Важным этапом исследования пространственной геометрии деформируемого стержня и, в частности, определения условий возникновения замкнутых конфигураций, является нахождение нулей так называемых характеристических полиномов специального вида. Эти полиномы возникают в процессе перехода от прямых зависимостей динамических переменных от дуговой координаты непосредственно к уравнениям, описывающим геометрию деформированного состояния.

В свою очередь, вычисление нулей указанных полиномов выполняется при помощи метода, изложенного в [7, 8]. В ходе программной реализации этого метода встроена проверка на степень приближения данного полинома к нулю и по этому критерию отбираются приближения нулей. Метод вычисления нулей из [7, 8] выбран на том основании, что он не требует априорной информации о границах корней и не включает ограничений на вид коэффициентов.

**Программный комплекс численного моделирования.** Для решения задачи нахождения нулей характеристических полиномов системы уравнений деформации (1) работе использован  с соответствующей адаптацией к применяемым математическим моделям метод определения границ нулей полинома и их последующего вычисления помощью сортировки [16–18].

Дополнительным преимуществом рассматриваемого метода является произвольность степени полинома и вида его коэффициентов в границах допустимой разрядности соответствующей программной среды, возможность определения нулей без априорной информации об ограничениях на коэффициенты.

Решение указанной задачи реализуется на основе сортировки слиянием. Известные схемы последней [16–18] для этой цели модифицируются. На основе матриц сравнения (МС) [18] при выполнении модифицированного слияния достигается максимальный параллелизм, устойчивость, прямая и обратная адресация к входным и выходным индексам. Представленная ниже сортировка не перемещает ключи, используя перемещение их индексов, не ограничена целой степенью двойки для числа элементов. В качестве средства формального описания алгоритмов используется язык Object Pascal, их реализация дана в среде Delphi 7.

Применительно к задаче определения условий замкнутости стержня и характера его конфигурации необходимость использования описанного выше метода локализации и вычисления нулей полинома диктуется, как уже было сказано, спецификой исследуемых в [13–15] моделей.

Остановимся кратко на основных уравнениях, описывающих, в соответствии с [7], геометрию деформированного стержня. Эти уравнения получены в цилиндрической системе координат и описывают ось деформированного стержня. Обозначим систему координат $(\alpha, \rho, \zeta)$, тогда уравнения оси стержня имеют вид:

$$\rho^2 = \frac{1}{P^2}\,[(M+\lambda)\times\gamma\,]^2 \tag{18}$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = P\frac{K\gamma_1 - (M_1+\lambda_1)}{M_\rho{}^2} \tag{19}$$

$$\frac{d\zeta_3}{ds} = \tau\cdot\gamma = \gamma_1. \tag{20}$$

Рассмотрим в трехмерном пространстве две поверхности и: первая определяется уравнениями (1) и (2), вторая – уравнениями (1) и (3). Первая поверхность является цилиндрической поверхностью. Ее образующая параллельна силе $P$. Направляющая совпадает с проекцией оси стержня на плоскость, перпендикулярную концевой силе $P$. Данную проекцию обозначим П.

Другая поверхность получена за счет вращения вокруг оси $O\zeta_3$ кривой, обозначаемой через N. Уравнения этой кривой в плоскости $\mathrm{O}\zeta_2\zeta_3$ получаются из (18) и (19) с помощью замены $\rho \to \zeta_2$. Ось стержня представляем как линию пересечения двух описанных поверхностей. С точки зрения качественного анализа основные свойства поверхностей и оси стержня вполне определяются свойствами двух плоских кривых: проекции П и меридиана N. В дальнейших исследованиях геометрического характера основным моментом будет анализ на точных решениях уравнений Эйлера–Кирхгофа свойств кривых П и N в зависимости от значений свободных параметров, входящих в уравнения этих кривых.

Правые части уравнений (18)–(20) для известных решений задачи будут иметь определённую структуру, в частности, координаты $\rho, \alpha$, $\zeta_3$ могут быть представлены в виде функций вспомогательной переменной $t$:

$$\alpha = \alpha(t), \quad \rho = \rho(t), \quad \zeta_3 = \zeta_3(t). \tag{21}$$

Отличать параметризацию (21) от естественной будем лишь в случае, когда связь между дуговой координатой $s$ и вспомогательной переменной $t$ имеет вид не интегрируемого в элементарных функциях соотношения

$$\frac{dt}{ds} = \sqrt{f(t)}, \tag{22}$$

где $f(t)$ – непрерывная функция.

Как показано в [7], соотношение (22) выполняется для всех точных решений системы уравнений Кирхгофа.

Заметим, что периодический характер зависимости между дуговой координатой и переменной $t$ является особенностью рассматриваемых уравнений. В уравнения оси деформированного стержня входят, в зависимости от рассматриваемого точного решения системы уравнений Кирхгофа, полиномы третьей или четвертой степени, нули которых фактически определяют области существования тех или иных конфигураций стержня при деформации.

Интегрирование уравнений (19) и (20) приводит к появлению зависимостей между цилиндрическими и дуговой координатой в виде эллиптических функций. Последнее удобно с точки зрения исследования соответствующих проекций упругой линии, поскольку их поведение определяется теоремами 1 и 2, установленными в [7]. В то же время, отсутствие явных зависимостей для всех переменных задачи и ограничение областей существования необходимых пространственных (в том числе и замкнутых) корнями характеристических полиномов не дает однозначной информации о свойствах коэффициентов указанных полиномов. В этой связи параметрический анализ конфигураций стержня программно совмещен с процедурой интегрирования уравнений (19), (20).

**Заключение.** Приведенный подход к исследованию пространственной геометрии деформируемых упругих стержней отличается универсальностью в том смысле, что с его помощью можно определять условия существования не только замкнутых, но и необходимых произвольных конфигураций. Кроме того, данный метод позволяет решать задачу идентификации параметров деформированного объекта, исходя из установившейся конфигурации. Причем глубина такой идентификации будет определяться исключительно степенью решения задачи установления уравнений связи между геометрическими, силовыми и физико-химическими характеристиками исследуемого объекта. Предложенный метод является универсальным для всех случаев интегрируемости системы уравнений Кирхгофа как в рамках классической теории упругости, так и при различных дополняющих гипотезах, что показано на примере модели естественно закрученного стержня.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Панин В.Е.* Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов. – Новосибирск: Наука; СО РАН, 1995. – Т. 1. – 297 с.; Т. 2. – 317 с.
2. *Кривцов А.М., Морозов Н.Ф.* Аномалии механических характеристик наноразмерных объектов // Доклады РАН. – 2001. – Т. 381, № 3. – С. 825-827.
3. *Mescheryakov Y.I., Divakov A.K.* Multiscale kinetics of microstructure and strain-rate dependence of materials // DYMAT J. – 1994. – No. 4. – P. 271-287.
4. *Рит М.* Наноконструирование в науке и технике. Введение в мир нанорасчета. – М. – Ижевск: RCD, 2005. – 159 с.
5. *Кравчук А.С.* О моделях и решении задач механики наноконтакта // Математическое моделирование систем и процессов. – 2007. – № 15. – С. 123-141.
6. *Фомин В.М., Головнев И.Ф.* Молекулярно-динамические исследования термомеханических свойств наноструктур // Механика – от дискретного к сплошному / отв. ред. В.М. Фомин. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. – С. 8-87.
7. *Илюхин А.А.* Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. – Киев, «Наукова думка», 1979. – 216 с.
8. *Устинов Ю.А.* Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров. – М., 2003. – 128 с.
9. *Лурье А.И., Джанелидзе Г.Ю.* Задача Сен-Венана для стержней, близких к призматическим // ДАН. – 1939. – Т. XXIV, № 1–№ 3.
10. *Джанелидзе. Г.Ю.* Соотношения Кирхгофа для естественно закрученных стержней и их приложения // Труды Ленинградского политехнического института. – 1946. – № 1.
11. *Кугушев Е.И., Старостин Е.Л.* Математическая модель образования трёхмерной структуры ДНК // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 1997. – № 77.
12. *Козлов Н.Н., Кугушев Е.И., Сабитов Д.И., Энеев Т.М.* Компьютерный анализ процессов структурообразования нуклеиновых кислот // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2002. – № 19. – № 42.
13. *Илюхин А.А., Тимошенко Д.В.* Новый метод определения условий замкнутости молекул ДНК // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2006. – Т. 13. – Вып. 2. – С. 322-324.

14. *Илюхин А.А., Тимошенко Д.В.* Математическая модель замкнутых молекул ДНК // Известия Саратовского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2008. – Т. 8.. – Вып. 3. – С. 32-40.
15. *Тимошенко Д.В.* Применение уравнения Шредингера к исследованию пространственных конфигураций молекул ДНК // Материалы XIV Международной конференции «Ломоносов» ». – М., 2007. – С. 75-79.
16. *Ромм Я.Е.* Локализация и устойчивое вычисление нулей многочлена на основе сортировки. I // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 1. – С. 165-183.
17. *Ромм Я.Е.* Локализация и устойчивое вычисление нулей многочлена на основе сортировки. II // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 2. – С. 161-175.
18. *Ромм Я.Е.* Параллельная сортировка слиянием по матрицам сравнений. I // Кибернетика и системный анализ. – 1994. – № 5. – С. 3-23.
19. *Mindlin R.D.* Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity // Int. J. Solids Struct. – 1965. – Vol. 1, No. 4. – P. 417-438.
20. *Allen M.P., Tildesley D.J.* Computer Simulation of Liquids. – N.Y.: Clarenden Press, Oxford, 1987. – 385 p.
21. *Rapaport D.C.* The Art of Molecular Dynamics Simulation. – 2nd ed. – Cambridge University Press, 2004. – 564 p.

REFERENCES

1. *Panin V.E.* Fizicheskaya mezomekhanika i komp'yuternoe konstruirovanie materialov [Physical mesomechanics and computer design of materials]. Novosibirsk: Nauka; SO RAN, 1995, Vol. 1, 297 p.; Vol. 2, 317 p.
2. *Krivtsov A.M., Morozov N.F.* Anomalii mekhanicheskikh kharakteristik nanorazmernykh ob"ektov [Anomalies in the mechanical characteristics of nanosized objects], *Doklady RAN* [Report RAS], 2001, T. 381, No. 3, pp. 825-827.
3. *Mescheryakov Y.I., Divakov A.K.* Multiscale kinetics of microstructure and strain-rate dependence of materials, *DYMAT J*., 1994, No. 4, pp. 271-287.
4. *Rit M.* Nanokonstruirovanie v nauke i tekhnike. Vvedenie v mir nanorascheta [Nanoconstruction in science and technology. Introduction in the world of nano-calculation]. Moscow – Izhevsk: RCD, 2005, 159 p.
5. *Kravchuk A.S.* O modelyakh i reshenii zadach mekhaniki nanokontakta [On models and solving problems of nanocontact mechanics], *Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov* [Mathematical Modeling of Systems and Processes], 2007, No. 15, pp. 123-141.
6. *Fomin V.M., Golovnev I.F.* Molekulyarno-dinamicheskie issledovaniya termomekhanicheskikh svoystv nanostruktur [Molecular-dynamic studies of thermomechanical properties of nanostructures], Mekhanika – ot diskretnogo k sploshnomu [Mechanics - from discrete to continuous], ed. V.M. Fomin. Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2008, pp. 8-87.
7. *Ilyukhin A.A.* Prostranstvennye zadachi nelineynoy teorii uprugikh sterzhney [Spatial problems of the nonlinear theory of elastic rods]. Kiev, «Naukova dumka», 1979, 216 p.
8. *Ustinov Yu.A.* Zadachi Sen-Venana dlya psevdotsilindrov [The tasks of St. Venant for pseudocylinders]. Moscow, 2003, 128 p.
9. *Lur'e A.I., Dzhanelidze G.Yu.* Zadacha Sen-Venana dlya sterzhney, blizkikh k prizmaticheskim [The problem of Saint-Venant for rods close to prismatic], *DAN* [Academy of Sciences Reports], 1939, Vol. XXIV, No. 1–No. 3.
10. *Dzhanelidze. G.Yu.* Sootnosheniya Kirkhgofa dlya estestvenno zakruchennykh sterzhney i ikh prilozheniya [Kirchhoff's relations for naturally twisted rods and their applications] *Trudy Leningradskogo politekhnicheskogo institute* [Proceedings of the Leningrad Polytechnic Institute], 1946, No. 1.
11. *Kugushev E.I., Starostin E.L.* Matematicheskaya model' obrazovaniya trekhmernoy struktury DNK [Mathematical model of the formation of the three-dimensional structure of DNA.], *Preprint IPM im. M.V. Keldysha RAN* [KIAM Preprint to them. MV Keldysh of the Russian Academy of Sciences], 1997, No. 77.
12. *Kozlov N.N., Kugushev E.I., Sabitov D.I., Eneev T.M.* Komp'yuternyy analiz protsessov strukturoobrazovaniya nukleinovykh kislot [Computer analysis of the processes of nucleic acid structure formation], *Preprint IPM im. M.V. Keldysha RAN* [KIAM Preprint to them. MV Keldysh of the Russian Academy of Sciences], 2002, No. 19, No. 42.

13. *Ilyukhin A.A., Timoshenko D.V.* Novyy metod opredeleniya usloviy zamknutosti molekul DNK [A new method for determining the conditions for the closure of DNA molecules], *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [Review of applied and industrial mathematics], 2006, Vol. 13, Issue 2, pp. 322-324.
14. *Ilyukhin A.A., Timoshenko D.V.* Matematicheskaya model' zamknutykh molekul DNK [Mathematical model of closed DNA molecules], *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Proceedings of the Saratov University. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer science], 2008, Vol. 8, Issue 3, pp. 32-40.
15. *Timoshenko D.V.* Primenenie uravneniya SHredingera k issledovaniyu prostranstvennykh konfiguratsiy molekul DNK [Application of the Schrödinger equation to the study of spatial configurations of DNA molecules], *Materialy XIV Mezhdunarodnoy konferentsii «Lomonosov»»* [Materials of the XIV International Conference "Lomonosov"]. Moscow, 2007, pp. 75-79.
16. *Romm Ya.E.* Lokalizatsiya i ustoychivoe vychislenie nuley mnogochlena na osnove sortirovki. I [Localization and stable calculation of zeros of a polynomial on the basis of sorting. I], *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and system analysis], 2007, No. 1, pp. 165-183.
17. *Romm Ya.E.* Lokalizatsiya i ustoychivoe vychislenie nuley mnogochlena na osnove sortirovki. II [Localization and stable calculation of zeros of a polynomial on the basis of sorting. II], *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and system analysis], 2007, No. 2, pp. 161-175.
18. *Romm Ya.E.* Parallel'naya sortirovka sliyaniem po matritsam sravneniy. I [Parallel sorting by merging by comparison matrices. I], *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and system analysis], 1994, No. 5, pp. 3-23.
19. *Mindlin R.D.* Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity, *Int. J. Solids Struct*., 1965, Vol. 1, No. 4, зз. 417-438.
20. *Allen M.P., Tildesley D.J.* Computer Simulation of Liquids. N.Y.: Clarenden Press, Oxford, 1987, 385 p.
21. *Rapaport D.C.* The Art of Molecular Dynamics Simulation. 2nd ed. Cambridge University Press, 2004, 564 p.


Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор А.И. Жорник.

**Тимошенко Дмитрий Владимирович** – Южный федеральный университет; e-mail: dmitrytim@sfedu.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634271636; кафедра высшей математики; к.ф.-м.н.; доцент.

**Куповых Геннадий Владимирович** – e-mail: kupovykh@sfedu.ru; кафедра высшей математики; зав. кафедрой; д.ф.-м.н.; профессор.

**Илюхин Александр Алексеевич** – Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал) ФГБОУ ВО «РГЭУ (РИНХ)», e-mail: aleilykhin@yandex.ru; г. Таганрог, ул. Инициативная, 48; кафедра математики, д.ф.-м.н., профессор.

**Timoshenko Dmitry Vladimirovich** – Southern Federal University; e-mail: dmitrytim@sfedu.ru; 347928, the city of Taganrog, per. Nekrasovsky, 44; phone: +78634271636; the department of higher mathematics; cand. of phys.-math. sc.; associate professor.

**Kupovykh Gennady Vladimirovich** – e-mail: kupovykh@sfedu.ru; the department of higher mathematics; head department; dr. phys.-math. sc.; professor.

**Ilyukhin Alexander Alekseevich** – Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) FGBOU IN "RGEU (RINH)", e-mail: aleilykhin@yandex.ru; 48, Initsiativnaya street, Taganrog, Russia; the department of mathematics; dr. phys.-math. sc.; professor.