

С.М. Гушанский, В.Н. Пуховский, В.С. Потапов

### ПРОГРАММНАЯ РАЗРАБОТКА КВАНТОВОГО ОПТИМИЗАЦИОННОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА\*

*В последнее время наблюдается стремительный рост интереса к квантовым компьютерам. Их работа основана на использовании для вычислений таких квантово-механических явлений, как суперпозиция и запутывание для преобразования входных данных в выходные, которые реально смогут обеспечить эффективную производительность на 3–4 порядка выше, чем любые современные вычислительные устройства, что позволит решать перечисленные выше и другие задачи в натуральном и ускоренном масштабе времени. Данная статья посвящена решению задачи исследования и разработки методов функционирования квантовых алгоритмов и моделей квантовых вычислительных устройств. Квантовый алгоритм, реализованный в работе, позволяет произвести решение транспортной задачи коммивояжера при различной размерности, показывает возможности квантовой теории информации в интерпретации классических задач. Знаменитая транспортная задача коммивояжера является важной категорией проблем оптимизации, которая встречается в различных областях науки и техники. Изучение проблем оптимизации мотивирует разработку передовых методов, более подходящих для современных практических задач. Актуальность данных исследований заключается в математическом и программном моделировании и реализации квантового алгоритма для решения классов задач классического характера. Что станет еще одним шагом вперед в исследованиях элементарной теоретической базы квантового вычислительного устройства и, как следствие, практической, физической реализации этого устройства. Научная новизна данного направления в первую очередь выражается в постоянном обновлении и дополнении поля квантовых исследований по ряду направлений, а компьютерная симуляция квантовых физических явлений и особенностей слабо освещена в мире. Целью работы является компьютерное моделирование квантового алгоритма для решения задачи коммивояжера с использованием метода фазовой оценки, который позволяет оценить собственную фазу унитарного гейта, получившего доступ к квантовому состоянию, пропорционально собственному вектору.*

*Моделирование; квантовый алгоритм; кубит; модель квантового вычислителя; запутывание; суперпозиция; квантовый оператор; сложность алгоритма.*

S.M. Gushanskiy, V.N. Pukhovskiy, V.S. Potapov

### SOFTWARE DEVELOPMENT OF QUANTUM OPTIMIZATION ALGORITHM FOR SOLUTION OF THE TRAVELING SALESMAN PROBLEM

*Recently, there has been a rapid increase interest in quantum computers. Their work is based on the use of quantum mechanical phenomena such as superposition and entanglement to convert input data into output, which can actually provide effective performance by 3–4 orders of magnitude higher than any modern computing device, which will solve the above and others tasks in natural and accelerated time scale. This article is devoted to solving the problem of research and development of methods for the functioning of quantum algorithms and models of quantum computing devices. The quantum algorithm implemented in the work allows to solve the traveling salesman problem with different dimensions, demonstrates the capabilities of quantum information theory in interpreting classical problems. The famous traveling problem of a traveling salesman is an important category of optimization problems that occurs in various fields of science and technology. The study of optimization problems motivates the development of advanced methods that are more suitable for modern practical problems. The relevance of these studies lies in the mathematical and software modeling and implementation of a quantum algorithm for solving classes of*

\* Работа выполнена в рамках проектной части госзадания Минобрнауки России № 2.3928.2017/4.6 в Южном федеральном университете.

*problems of a classical nature. What will be another step forward in the research of the elementary theoretical base of a quantum computing device and, as a result, the practical, physical implementation of this device. The scientific novelty of this area is primarily expressed in the constant updating and addition of the field of quantum research in a number of areas, and computer simulation of quantum physical phenomena and features is poorly covered in the world. The aim of the work is a computer simulation of a quantum algorithm for solving the traveling salesman problem using the phase estimation method, which allows us to estimate our own phase of a unitary gate that has gained access to a quantum state in proportion to its own vector.*

*Modeling; quantum algorithm; qubit; model of a quantum computer; entanglement; superposition; quantum operator; complexity of the algorithm.*

**Введение.** В современной науке и технике постоянно возникает необходимость в решении таких стратегически важных задач, как предсказание погоды и расчет климатических изменений, создание онкологических препаратов, обработка сигналов из Вселенной для поиска внеземных цивилизаций, обработка символической информации, криптоанализ [1], опережающий расчет траекторий движущихся воздушных и космических объектов [2] и другие задачи. Практическая реализация перечисленных задач на современных, даже суперкомпьютерных [3], системах требует недопустимо большого промежутка времени или вообще невозможна.

ТЗК – одна из таких сложных задач класса NP в комбинаторной оптимизации, которая принимает экспоненциальный временной порядок для решения методом грубой силы. Рассмотрим квантовый алгоритм [4] для решения задачи коммивояжера с использованием метода фазовой оценки [5], который позволяет оценить собственную фазу [6] унитарного гейта [7], получившего доступ к квантовому состоянию, пропорционально собственному вектору [8]. Подход к этой задаче основан на кодировании заданных расстояний между городами (фазы).

Для квантовых вычислений необходимы только конечномерные квантовые системы, и для этого достаточно рассмотрения комплексных векторных пространств со скалярным произведением – евклидовых пространств [9].

Состояние квантовой системы и их преобразования можно описать посредством векторов и матриц или, используя более компактные бра и кет обозначения, введенные Дираком [10]. Кет-векторами  $|x\rangle$  [11] обозначают векторы-столбцы и обычно используют для описания квантовых состояний. Введенные в предыдущем разделе функции  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  как раз и являются кет-векторами. Парными бра-векторами  $\langle x|$  обозначают сопряжение и транспонирование кет-векторов  $|x\rangle$ . Иными словами, векторы  $|0\rangle, \langle 0|, |1\rangle, \langle 1|$  в матричной форме представляются следующим образом:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \langle 0| = [1 \ 0], \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \langle 1| = [0 \ 1]. \quad (1)$$

**1. Метод фазовой оценки.** В теории квантовых вычислений алгоритм квантового фазового оценивания (рис. 1) находит много применений в качестве подпрограммы для других алгоритмов [12]. Алгоритм квантовой оценки фазы позволяет оценить собственную фазу унитарного гейта, получившего доступ к квантовому состоянию, пропорционально собственному вектору.

**Задача:** Пусть  $U$  – унитарный оператор, который работает с  $m$  кубитами. Тогда все собственные значения  $U$  имеют абсолютное значение 1. Таким образом, спектр [13] унитарного оператора состоит из  $e^{i\theta}$  фаз. Учитывая собственный вектор  $|\psi\rangle$  такой, что  $U|\psi\rangle = e^{i\theta}|\psi\rangle$ , цель состоит в том, чтобы оценить  $\theta$ . Алгоритм фазовой оценки решает эту проблему. Ход эволюции квантовой системы [14] удобно представлять в виде схем [15], на которых слева направо поочередно ото-

бражается последовательность преобразований, осуществляемых над кубитами. Эволюция отдельного кубита отображается в виде направленного отрезка прямой, разрывающегося обозначениями тех или иных операторов преобразований. Для случая многокубитовой системы [16] имеем совокупность обозначений эволюций отдельных кубитов, связанных между собой по определенным правилам.

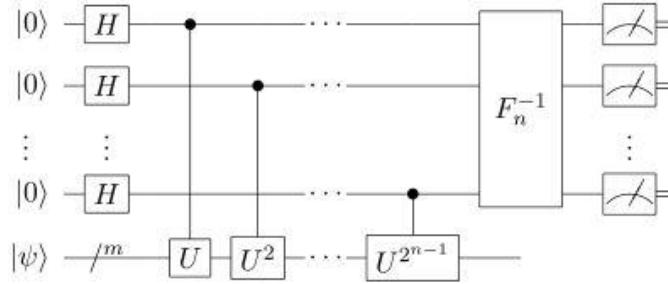


Рис. 1. Квантовая схема алгоритма фазовой оценки

**Описание алгоритма.** Предположим, что мы хотим вычислить значение фазы с точностью до n битов. Мы достигаем этого, подвергая наш собственный вектор  $|\psi\rangle$  последовательности n контролируемых операторов, с последующим обратным квантовым преобразованием Фурье [17]. После контролируемого применения U, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_x e^{ix\theta} |x\rangle \otimes |\psi\rangle. \tag{3}$$

Применяя обратное квантовое преобразование Фурье при n кубитов, получаем

$$\frac{1}{2^n} \sum_y \sum_x e^{-2\pi i x y / 2^n} * e^{ix\theta} |y\rangle \otimes |\psi\rangle = \frac{1}{2^n} \sum_y \frac{e^{i2^n \theta} - 1}{e^{i(\theta - 2\pi y / 2^n)} - 1} |y\rangle \otimes |\psi\rangle. \tag{4}$$

**2. Пример решения алгоритма для ТЗК.** Матрица [18] расстояний для ТЗК, состоящая из четырех городов, определяется

$$D = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & e^{i\varphi_{12}} & e^{i\varphi_{13}} & e^{i\varphi_{14}} \\ e^{i\varphi_{21}} & 1 & e^{i\varphi_{23}} & e^{i\varphi_{24}} \\ e^{i\varphi_{31}} & e^{i\varphi_{32}} & 1 & e^{i\varphi_{34}} \\ e^{i\varphi_{41}} & e^{i\varphi_{42}} & e^{i\varphi_{43}} & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Данная матрица реализована из набора всех возможных путей торговца в обоих направлениях между всеми городами. Из (4) вытекают унитарные матрицы (5), (6), (7), (8) по количеству городов. В (4)  $\varphi_{12} = \varphi_{21} = \pi / 2$ ,  $\varphi_{13} = \varphi_{31} = \pi / 8$ ,  $\varphi_{14} = \varphi_{41} = \pi / 4$ ,  $\varphi_{23} = \varphi_{32} = \pi / 4$ ,  $\varphi_{24} = \varphi_{42} = \pi / 4$ ,  $\varphi_{34} = \varphi_{43} = \pi / 8$ , и унитарная матрица  $U_j$  с j = 1, 2, 3 и 4 выглядят следующим образом

$$U_1 = |00\rangle\langle 00| + e^{i\varphi_{21}} |01\rangle\langle 01| + e^{i\varphi_{31}} |10\rangle\langle 10| + e^{i\varphi_{41}} |11\rangle\langle 11|, \tag{5}$$

$$U_2 = e^{i\varphi_{12}} |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + e^{i\varphi_{32}} |10\rangle\langle 10| + e^{i\varphi_{42}} |11\rangle\langle 11|, \tag{6}$$

$$U_3 = e^{i\varphi_{33}}|00\rangle\langle 00| + e^{i\varphi_{23}}|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + e^{i\varphi_{43}}|11\rangle\langle 11|, \quad (7)$$

$$U_4 = e^{i\varphi_{14}}|00\rangle\langle 00| + e^{i\varphi_{24}}|01\rangle\langle 01| + e^{i\varphi_{34}}|10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|. \quad (8)$$

Построим унитарную матрицу  $U_j$ , разложив его следующим образом:

$$U_j = \begin{bmatrix} e^{ia} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{ib} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ic} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{id} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i(c-a)} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e^{ia} & 0 \\ 0 & e^{ib} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i(d+c-a-b)} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Заметим, что поставив конкретные значения  $a, b, c, d$ , мы можем найти разложение [19] для каждого  $U_1, U_2, U_3, U_4$ . Для оценки фазы нам нужно контролировать  $(U_1 \otimes U_2 \otimes U_3 \otimes U_4)$ , что аналогично  $(C - U_1 \otimes C - U_2 \otimes C - U_3 \otimes C - U_4)$ , где  $C - U_1$  представляет контролируемый [20]  $U_1$ . Для реализации управляемого  $U_j$  мы реализовали каждый элемент в разложении  $U_j$  в уравнении 9. Рис. 3 вытекает из определения  $U_j$ , базирующегося на числе городов и входном сигнале [21] (матрица  $B$ ), определяющем стоимость/расстояние/время или любую другую величину, влияющую на переход из города  $i$  в город  $j$ .

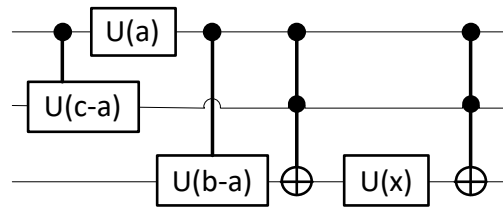


Рис. 3. Реализация управляемых  $U_j$  гейта с использованием одиночных кубитовых унитарных элементов  $U(a)$ .

Здесь мы реализуем управляемый  $U(C-A)$ , который эквивалентен реализации управляемых унитарных элементов, принадлежащих разложению [22]  $A$ . На этом рисунке  $x = (d+c-a-b) / 2$ . На рис. 4 изображена квантовая схема [23], реализующая ТКЗ на основе симулятора IBM [25] и показывающая работоспособность описанной в работе теории.

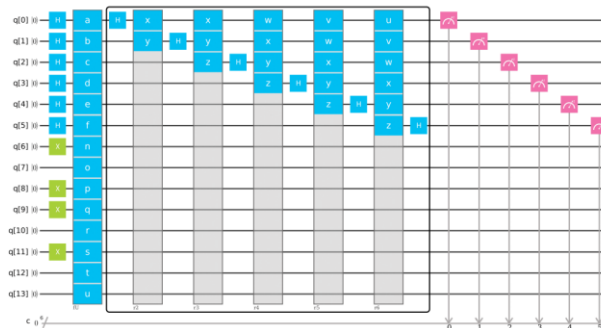


Рис. 4. Квантовая схема, реализующая ТКЗ

**Заключение.** Реализованный в рамках данной работы квантовый алгоритм, позволяющий производить решение транспортной задачи коммивояжера при различной размерности, показывает возможности квантовой теории информации в интерпретации классических задач в квантовое поле. Это становится возможным вследствие трансляции классических элементов в их квантовые аналоги по их функциональной направленности. Эта трансляция была бы невозможной без декомпозиции решаемой задачи и ее подробного анализа и рассмотрения. Данный перевод способствует временному выигрышу решения задачи с помощью фазовых комбинаций собственных значений квантовой системы при построении унитарных операторов в сравнении с классическими типами решения.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Квантовая криптография // Википедия. Дата обновления: 09.12.2016. – URL: <http://ru.wikipedia.org/?oldid=82377595> (дата обращения: 07.03.2017).
2. Трубицын А.А. Расчет траектории движения материальной точки в двумерном (осесимметричном) консервативном поле // Журнал вычислительной математики и математической физики. 30:7 (1990), 1113–1115; U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., 30:4 (1990), 107-109.
3. Arthur Trew (Ed.), Greg Wilson (Ed.). Past, Present, Parallel: A Survey of Available Parallel Computer Systems. – Springer, 1991. – 392 p. – ISBN 9783540196648.
4. Quantum phase estimation algorithm. (2016, Nov 03). In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 05:15, July 27, 2016, from [https://en.wikipedia.org/w/index.php?Title=Quantum\\_phase\\_estimation\\_algorithm&oldid=731732789](https://en.wikipedia.org/w/index.php?Title=Quantum_phase_estimation_algorithm&oldid=731732789).
5. Richard G. Milner A Short History of Spin // Contribution to the XVth International Workshop on Polarized Sources, Targets, and Polarimetry. – Charlottesville, Virginia, USA, September 9-13, 2013. – arXiv:1311.5016.
6. Гушанский С.М., Потапов В.С. Методика разработки и построения квантовых алгоритмов // Информатизация и связь. – 2017. – № 3. – С. 101-104.
7. Гушанский С.М. Поленов М.Ю., Потапов В.С. Реализация компьютерного моделирования системы с частицей в одномерном и двумерном пространстве на квантовом уровне // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2017. – № 3 (188). – С. 223-233.
8. Hales S. Hallgren. An improved quantum Fourier transform algorithm and applications // Proceedings of the 41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science. November 12–14, 2000. – P. 515.
9. Potapov V., Gushanskiy S., Polenov M. The Methodology of Implementation and Simulation of Quantum Algorithms and Processes // 2017 11th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT). – Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2017. – P. 437-441.
10. Lukin M.D. Attractive photons in a quantum nonlinear medium // Ofer Firstenberg, Nature. – October 2013. – Vol. 502.
11. Нильсен М., Чанг И. Квантовые вычисления и квантовая информация = Quantum Computation and Quantum Information. – М.: Мир, 2006.
12. Quantum programming. (2016, Nov 03). In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 17:50, September 20, 2016, from [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Quantum\\_programming&oldid=740376291](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Quantum_programming&oldid=740376291).
13. Wikipedia contributors. (2018, November 27). IBM Q Experience. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 17:28, January 31, 2019, from [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=IBM\\_Q\\_Experience&oldid=87087480](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=IBM_Q_Experience&oldid=87087480).
14. Quantum mechanics. (2017, March 29). In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 15:50, March 30, 2017. – URL: [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Quantum\\_mechanics&oldid=772744105](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Quantum_mechanics&oldid=772744105).
15. Boneh D., Zhandry M. Quantum-secure message authentication codes // In Proceedings of Eurocrypt. – 2013. – P. 592-608.
16. Chris Ferrie. Quantum Physics for Babies. – Brdtk edition. – Sourcebooks Jabberwocky, 2017-05-02. – P. 23-24. – ISBN 9781492656227.

17. Wilde M. From Classical to Quantum Shannon Theory, arXiv:1106.1445.
18. Гузик В.Ф., Гушанский С.М., Потанов В.С. Количественные характеристики степени запутанности // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2016. – № 3 (176). – С. 76-86.
19. Potapov V., Gushansky S., Guzik V., Polenov M. Architecture and Software Implementation of a Quantum Computer Model // *Advances in Intelligent Systems and Computing*. – Springer Verlag, 2016. – Vol. 465. – P. 59-68.
20. Томас Х. Кормен, Чарльз И. Лейзерсон, Рональд Л. Ривест, Клиффорд Штайн. Алгоритмы: построение и анализ = Introduction to Algorithms. – 2-е изд. – М.: Вильямс, 2006. – С. 1296. – ISBN 0-07-013151-1.
21. Оптимизация // Википедия. [2018 – 2018]. Дата обновления: 10.08.2018. – URL: <https://ru.wikipedia.org/?oldid=94448419> (дата обращения: 10.08.2018).
22. Bennett C.H., Shor P.W., Smolin J.A., Thapliyal A.V. Entanglement-assisted Capacity of a Quantum Channel and the Reverse Shannon Theorem // *IEEE Transactions on Information Theory*, 48, 2637. 2002.
23. Kleppner D., Kolenkow R. An Introduction to Mechanics (Second ed.). – Cambridge: Cambridge University Press, 2014. – 49 p.
24. Потанов В.С., Гушанский С.М. Квантовые типы ошибок и методы их устранения, зависимость ошибки от меры и чистоты запутанности // Сб. трудов XIV Всероссийской научной конференции молодых ученых, аспирантов и студентов ИТСАНУ-2016. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – Т. 3. – С. 123-129.

#### REFERENCES

1. Kvantovaya kriptografiya [Quantum cryptography], *Vikipediya* [Wikipedia]. Updated: 09.12.2016. Available at: <http://ru.wikipedia.org/?oldid=82377595> (accessed 07 March 2017).
2. Trubitsyn A.A. Raschet traektorii dvizheniya material'noy tochki v dvumernom (osesimmetrichnom) konservativnom pole [Calculation of the trajectory of a material point in a two-dimensional (axisymmetric) conservative field], *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*. [Journal of computational mathematics and mathematical physics]. 30:7 (1990), 1113-1115; U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., 30:4 (1990), 107-109.
3. Arthur Trew (Ed.), Greg Wilson (Ed.). Past, Present, Parallel: A Survey of Available Parallel Computer Systems. Springer, 1991, 392 p. ISBN 9783540196648.
4. Quantum phase estimation algorithm. (2016, Nov 03). In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 05:15, July 27, 2016, from [https://en.wikipedia.org/w/index.php?Title=Quantum\\_phase\\_estimation\\_algorithm&oldid=731732789](https://en.wikipedia.org/w/index.php?Title=Quantum_phase_estimation_algorithm&oldid=731732789).
5. Richard G. Milner A Short History of Spin, *Contribution to the XVth International Workshop on Polarized Sources, Targets, and Polarimetry. Charlottesville, Virginia, USA, September 9-13, 2013*. arXiv:1311.5016.
6. Gushanskiy S.M., Potapov V.S. Metodika razrabotki i postroeniya kvantovyh algoritmov [Methods of development and construction of quantum algorithms], *Informatizatsiya i svyaz'* [Informatization and communication], 2017, No. 3, pp. 101-104.
7. Gushanskiy S.M. Polenov M.Yu., Potapov V.S. Realizatsiya komp'yuternogo modelirovaniya sistemy s chastitsey v odnomernom i dvumernom prostranstve na kvantovom urovne [Implementation of computer simulation system with a particle in one-dimensional and two-dimensional space on a quantum level] *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2017, No. 3 (188), pp. 223-233.
8. Hales S. Hallgren. An improved quantum Fourier transform algorithm and applications, *Proceedings of the 41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science. November 12-14, 2000*, pp. 515.
9. Potapov V., Gushanskiy S., Polenov M. The Methodology of Implementation and Simulation of Quantum Algorithms and Processes, *2017 11th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT)*. Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2017, pp. 437-441.
10. Lukin M.D. Attractive photons in a quantum nonlinear medium, *Ofer Firstenberg, Nature*. October 2013, Vol. 502.
11. Nil'sen M., CHang I. Kvantovye vychisleniya i kvantovaya informatsiya = Quantum Computation and Quantum Information [Quantum computing and quantum information = Quantum Computation and Quantum Information]. Moscow: Mir, 2006.

12. Quantum programming. (2016, Nov 03). In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 17:50, September 20, 2016, from [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Quantum\\_programming&oldid=740376291](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Quantum_programming&oldid=740376291).
13. Wikipedia contributors. (2018, November 27). IBM Q Experience. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 17:28, January 31, 2019, from [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=IBM\\_Q\\_Experience&oldid=87087480](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=IBM_Q_Experience&oldid=87087480).
14. Quantum mechanics. (2017, March 29). In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 15:50, March 30, 2017. Available at: [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Quantum\\_mechanics&oldid=772744105](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Quantum_mechanics&oldid=772744105).
15. Boneh D., Zhandry M. Quantum-secure message authentication codes, *In Proceedings of Eurocrypt*, 2013, pp. 592-608.
16. Chris Ferrie. Quantum Physics for Babies. Brdbk edition. Sourcebooks Jabberwocky, 2017-05-02, pp. 23-24. – ISBN 9781492656227.
17. Wilde M. From Classical to Quantum Shannon Theory, arXiv:1106.1445.
18. Guzik V.F., Gushanskiy S.M., Potapov V.S. Kolichestvennyye karakteristiki stepeni zaputannosti [Quantitative characteristics of the degree of confusion], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2016, No. 3 (176), pp. 76-86.
19. Potapov V., Gushansky S., Guzik V., Polenov M. Architecture and Software Implementation of a Quantum Computer Model, *Advances in Intelligent Systems and Computing*. Springer Verlag, 2016, Vol. 465, pp. 59-68.
20. Tomas H. Kormen, Charl'z I. Leyzerson, Ronal'd L. Rivest, Klifford Shtayn. Algoritmy: postroenie i analiz = Introduction to Algorithms [Algorithms: construction and analysis = Introduction to Algorithms]. 2<sup>nd</sup> ed. Moscow: Vil'yams, 2006, pp. 1296. ISBN 0-07-013151-1.
21. Optimizatsiya [Optimization], *Vikipediya* [Wikipedia]. [2018 – 2018]. Updated: 10.08.2018. Available at: <https://ru.wikipedia.org/?oldid=94448419> (accessed 10 August 2018).
22. Bennett C.H., Shor P.W., Smolin J.A., Thapliyal A.V. Entanglement-assisted Capacity of a Quantum Channel and the Reverse Shannon Theorem, *IEEE Transactions on Information Theory*, 48, 2637. 2002.
23. Kleppner D., Kolenkow R. An Introduction to Mechanics (Second ed.). Cambridge: Cambridge University Press, 2014, 49 p.
24. Potapov V.S., Gushanskiy S.M. Kvantovye tipy oshibok i metody ih ustraneniya, zavisimost' oshibki ot mery i chistoty zaputannosti [Quantum types of errors and their rectification, the dependence of the error of the measure and purity of entanglement], *Sb. trudov XIV Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii molodyh uchenykh, aspirantov i studentov ITSaIU-2016* [Proceedings of the XIV all-Russian scientific conference of young scientists, postgraduates and students of Itsau-2016]. Rostov-on-Don: Izd-vo YuFU, 2016, Vol. 3, pp. 123-129.

Статью рекомендовал к опубликованию к.т.н., доцент М.Ю. Поленов.

**Гушанский Сергей Михайлович** – Южный федеральный университет; e-mail: smgushanskiy@sfedu.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371656; кафедра вычислительной техники; к.т.н.; доцент.

**Потанов Виктор Сергеевич** – e-mail: vitya-potapov@rambler.ru; кафедра вычислительной техники; аспирант.

**Пуховский Валерий Николаевич** – e-mail: vpuhovskiy@sfedu.ru; кафедра вычислительной техники; к.т.н.; доцент.

**Gushanskiy Sergey Mikhailovich** – Southern Federal University; e-mail: smgushanskiy@sfedu.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371656; the department of computer engineering; cand. of eng. sc.; associate professor.

**Potapov Victor Sergeevich** – e-mail: vitya-potapov@rambler.ru; the department of computer engineering; postgraduate.

**Pukhovskiy Valery Nikolaevich** – e-mail: vpuhovskiy@sfedu.ru; the department of computer engineering; cand. of eng. sc.; associate professor.