УДК 681.332 DOI 10.23683/2311-3103-2018-8-250-262

С.А. Бутенков

СТРУКТУРНАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ ГРАНУЛИРОВАННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ ОБРАБОТКЕ ДАННЫХ НА РЕКОНФИГУРИРУЕМЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Процессы накопления, сжатия, хранения, извлечения, обработки и анализа данных традиционно рассматриваются в различных разделах теоретической информатики. Для решения прикладных задач технической реализации этих этапов работы с данными привлекаются методологически различные подходы, основанные на разнородных математических моделях данных, и, соответственно, технически различные программные и аппаратные средства. При этом оптимизация построения средств обработки данных рассматривается на каждом этапе отдельно и с использованием частных математических моделей данных. Это приводит разработчиков сложных систем обработки данных к ситуации, в которой кроме процессов собственно обработки, необходимо выполнение процессов преобразования форм представления данных для следующего этапа обработки. Такие промежуточные преобразования форматов данных требуют существенного расхода аппаратных ресурсов и времени, особенно в случае больших объемов данных (Big Data). В ряде наших работ введен, разработан и применен в новых вычислительных средствах новый математический аппарат представления и обработки данных, основанный на применении теории алгебраических систем для гранулированного (укрупненного) представления данных. Новый подход реализует идеи машины гранулированных вычислений, введенные Lotfi Zadeh. Он органично включает в себя все указанные этапы работы с данными (на единой математической и алгоритмической основе) и позволяет широко применять в задачах, связанных с хранением и обработкой данных эффективные алгоритмы линейной сложности (жадные алгоритмы). Новое математическое представление данных позволяет естественным образом сжимать данные на всех этапах обработки за счет основных свойств методологии информационной грануляции. Поскольку методы, основанные на максимально типизированных алгоритмах гранулированных вычислений (без циклов и ветвлений) эффективно реализуются на реконфигурируемых высокопроизводительных вычислительных системах, в настоящей работе предложены структурные решения для реализации эффективных алгоритмов обработки гранулированных данных в классе «быстрых алгоритмов» для построенных на реконфигурируемых средствах машин гранулированных вычислений.

Гранулированные вычисления; реконфигурируемая вычислительная система; информационная грануляция; матроид; жадный алгоритм; алгебраическая система.

S.A. Butenkov

DATA STRUCTURE COMPOSITION FOR THE DATA PROCESSING BY THE RECONFIGURABLE COMPUTING SYSTEMS

The processes of accumulation, compression, storage, extraction, processing and analysis of data are traditionally considered in various sections of theoretical informatics. To solve applied problems of technical implementation of these stages of working with data, methodologically different approaches are used, based on heterogeneous mathematical data models, and, accordingly, technically different software and hardware. At the same time, the optimization of the construction of data processing facilities is considered at each stage separately and using particular mathematical data models. This leads the developers of complex data processing systems to a situation in which, in addition to the actual processing, it is necessary to carry out the processes of converting the data presentation forms for the next stage of processing. Such intermediate conversions of data formats require a significant consumption of hardware resources and time, especially in the case of large amounts of data (Big Data). In a number of our works, a new mathematical apparatus for presenting and processing the data, based on the theory of algebraic systems for granular (integrated) data representation, has been introduced, developed and applied in new computing facilities. The new approach implements the ideas of the granular computing machine introduced by Lotfi Zadeh. It *organically includes all the specified stages of working with data (on a uniform mathematical and algorithmic basis) and allows wide use of effective algorithms of linear complexity (greedy algorithms) in tasks related to data storage and processing. A new mathematical representation of data allows the data to be compressed naturally at all stages of processing at the expense of the basic properties of the informational granulation methodology. Since the methods based on the most typed algorithms of granular computations (without cycles and branching) are effectively implemented on reconfigurable high-performance computing systems, the present paper proposes structural solutions for implementing efficient algorithms of processing the granular data in the "fast algorithms"class for the granular computings built by the machines reconfigurable means.*

Granular computing; reconfigurable computing system; information granulation; matroid; greedy algorithm; algebraical system.

1. Введение. В настоящее время требуется все быстрее обрабатывать все большие объемы оцифрованных данных (неважно, собранных из окружающего мира или порожденных при вычислениях, например, на сетках) [1]. Однако, при увеличении числа процессоров производительность не растет пропорционально. Также известно, что алгоритмы обработки данных многоэтапны и эклектичны, т.е. требуют преобразований представления данных между этапами вычислений [2]. Для существенного (на порядки) повышения эффективности СВС при решении сложных вычислительных задач необходимо применять комплексные теоретико-технические решения в общей архитектуре таких систем [3]. Основу для теории дает подход, основанный на неклассических представлениях множеств точек данных и естественном укрупнении информационных единиц обработки данных – информационной грануляции [4, 5]. Обработка гранулированных данных (Granular Computing, GrC) дает алгоритмическую базу высокоэффективных вычислений [2]. Техническую базу для построения архитектуры СВС обеспечивает методология структурных вычислений, во многом избавленная от недостатков фон-неймановской схемы организации вычислений, широко применяемой в СВС в настоящее время [3]. В ряде наших работ введен новый математический аппарат обработки данных, реализующий общие идеи GrC, и дающий алгоритмические решения, эффективно реализуемые на реконфигурируемых вычислительных системах (РВС) [6–9].

2. Цель работы и постановка задачи. В наших работах предложен гибридный путь решения проблемы организации новой структуры СВС, включающий новую математическую модель грануляции данных [10], включающая как алгебру числовых структур [11], так и алгебру нечетких отношений [12], т.е. с применением теории алгебраических систем [13]. Новая методология названа *пространственной грануляцией* [6]. Рисунок 1 показывает реализацию машины гранулированных вычислений, уточняющую общую идею машины вычислений словами по L. Zadeh [11].

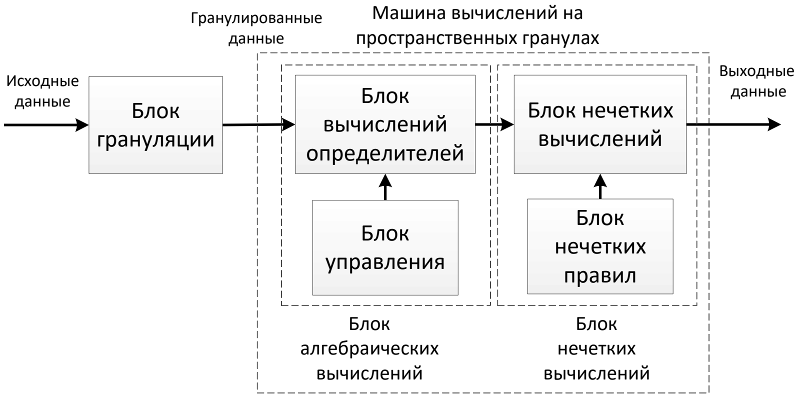

Рис. 1. Архитектура машины гранулированных вычислений на пространственных гранулах [9]

В настоящей работе подводятся итоги разработки новых математических моделей гранулирования данных (блока грануляции) и алгоритмических решений для построения вычислительных структур машины гранулированных вычислений по рис. 1. Она позволяет реализовывать процессы обработки многомерных данных на типовых структурах вычислителей, что крайне эффективно при построении архитектуры РВС.

3. Алгебраические системы, алгебры и модели. Введем основные определения теории алгебраических систем [13], связанные с возможностью формализации теории и методов грануляции, введенных L. Zadeh в виде неформальных определений в [11].

Определение 1. *Алгебраической системой* $\left\langle A, \Omega_F, \Omega_R \right\rangle$ называется объект, состоящий из трех множеств: непустого множества A, множества алгебраических операций Ω_F, определенных на A, и множества отношений Ω_R, определенных на A.

Определение 2. *Отображением* алгебраической системы Υ в алгебраическую систему Ψ называется отображение основного множества A системы Υ в основное множество B системы Ψ.

Определение 3. *Изоморфизмом* алгебраической системы Υ в алгебраическую систему Ψ называется взаимно однозначное отображение основного множества A системы Υ в основное множество B системы Ψ. При этом обе системы должны быть одного типа [13].

Важнейшую роль с точки зрения теории грануляции играет свойство алгебраических систем представляться в виде декартовых произведений более простых систем [14].

Определение 4. *Декартово неразложимой* называется алгебраическая система, которая не изоморфна никакому декартову произведению двух или более неодноэлементных систем.

Определение 5. *Абсолютно декартово неразложимой* называется алгебраическая система, которая не изоморфна никакому собственному декартову произведению.

Следующая теорема [13] показывает фундаментальную роль, которую играют декартовы произведения в теории алгебраических систем.

Теорема 1. Каждая конечная алгебраическая система Υ конечного типа разложима в декартово произведение конечного числа абсолютно декартово неразложимых систем. Одноэлементная алгебраическая система конечного типа тогда и только тогда абсолютно декартово неразложима, когда она имеет не более одного ложного главного предиката.

В [13] показано, что из этой теоремы следует, что при разложении сомножителей в собственные декартовы произведения высоты новых сомножителей меньше высот разлагаемых сомножителей. Отсюда видно, что процесс постепенного разложения сомножителей не может продолжаться бесконечно, что и доказывает данная теорема. С точки зрения теории грануляции эти результаты показывают, что произвольная алгебраическая система конечного типа может быть разложена по элементарным (неприводимым) системам, которые и будут являться гранулами [6, 14].

4. Инкапсуляция пространственными декартовыми гранулами. Введем обозначения, позволяющие различать координаты векторов и их индексацию, в которых контравариантный вектор номера n в пространстве будет обозначаться как ${}^{n}\mathbf{x} = \left({}^{n}x^1, {}^{n}x^2, {}^{n}x^3\right)^T$. Рассмотрим пример покрытия множества (кластера) A точек ${}^{i}X\left({}^{i}x^1, {}^{i}x^2\right), i = 1, 2, ..., N$ данных $\mathbb{R}^2$ декартовой гранулой размерности 2 – ${}^{+}G_2$.

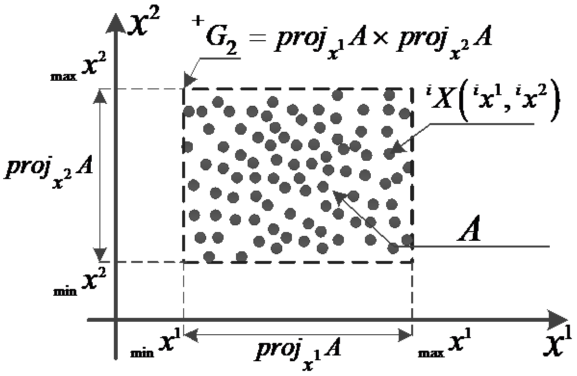

Рис. 2. Покрытие кластера декартовой гранулой по Zadeh [4].

Развивая идеи работы [4], допустим, что точки, входящие в кластер A, неразличимы между собой (по некоторым внешним соображениям и критериям), то мы можем представить сразу все множество точек в виде единой гранулы, проекция которой на числовую ось совпадает с проекцией кластера A. Это позволяет в дальнейшем оперировать не моделями отдельных точек (которых может быть достаточно много на интервале вещественной оси $\mathbb{R}^1$, а одной моделью гранулы, покрывающей этот кластер. Согласно [4], такая гранула называется *декартовой инкапсулирующей гранулой*. Именно такое сжатие данных является целью пространственной грануляции (как конкретизации информационной грануляции по [4]),и позволяет решать ряд практически важных задач хранения и обработки данных как численными, так и интеллектуальными (основанными на правилах) методами [15].

Для случая, когда в $\mathbb{R}^1$ задано некоторое подмножество точек (кластер) данных $A = \left\{{}^{i}x^1\right\}$, $i = 1, 2, ..., m$, допустим, что точки, входящие в кластер, неразличимы между собой (по некоторым внешним соображениям и критериям). Введем типовую модель декартовой инкапсулирующей гранулы для пространства $\mathbb{R}^1$ в виде [6]:

$$ {}^{+}G_1(A) = \begin{vmatrix} \min\left({}^{i}x^1\right) & -1 \\ \max\left({}^{i}x^1\right) & -1 \end{vmatrix}. \tag{1} $$

Соответственно для покрытия кластера в $\mathbb{R}^2$ $B = \left({}^{i}x^1; {}^{i}\mathrm{x}^2\right)$, $i = 1, 2, ..., m$ получим модель вида [6]:

$$ {}^{+}G_2(B) = \begin{vmatrix} \min\left({}^{i}x^1\right) & \min\left({}^{i}x^2\right) & 1 \\ \max\left({}^{i}x^1\right) & \min\left({}^{i}x^2\right) & 1 \\ \max\left({}^{i}x^1\right) & \max\left({}^{i}x^2\right) & 1 \end{vmatrix}. \tag{2} $$

Аналогичным образом в пространстве $\mathbb{R}^3$ для покрытия подмножества точек в $\mathbb{R}^3$ $M=\left({}^ix^1;{}^i\mathrm{x}^2;{}^i\mathrm{x}^3\right)$, $i=1,2,...,m$ получим модель

$$ {}^{+}G_3\left(M\right)=\begin{vmatrix} \min\left({}^ix^1\right) & \min\left({}^ix^2\right) & \min\left({}^ix^3\right) & -1 \\ \max\left({}^ix^1\right) & \min\left({}^ix^2\right) & \min\left({}^ix^3\right) & -1 \\ \max\left({}^ix^1\right) & \max\left({}^ix^2\right) & \min\left({}^ix^3\right) & -1 \\ \max\left({}^ix^1\right) & \max\left({}^ix^2\right) & \max\left({}^ix^3\right) & -1 \end{vmatrix}. \quad (3) $$

Для общих аффинных координат в $\mathbb{R}^n$ введем масштабный множитель σ и получим общую модель гранулы в виде определителя порядка $(n+1)$:

$$ {}^{+}G_n\left(A\right)=\begin{vmatrix} \min\left({}^ix^1\right) & \min\left({}^ix^2\right) & ... & \min\left({}^ix^n\right) & \sigma\left(-1\right)^n \\ \max\left({}^ix^1\right) & \min\left({}^ix^2\right) & ... & \min\left({}^ix^n\right) & \sigma\left(-1\right)^n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \max\left({}^ix^1\right) & \max\left({}^ix^2\right) & ... & \max\left({}^ix^n\right) & \sigma\left(-1\right)^n \end{vmatrix}, \; i=1,2,...,m. \quad (4) $$

или по проекциям (рис. 2) как:

$$ {}^{+}G_n\left(A\right)=\begin{vmatrix} {}^{1}_{\min}x^1 & {}^{1}_{\min}x^2 & ... & {}^{1}_{\min}x^n & \sigma\left(-1\right)^n \\ {}^{1}_{\max}x^1 & {}^{1}_{\min}x^2 & ... & {}^{1}_{\min}x^n & \sigma\left(-1\right)^n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ {}^{1}_{\max}x^1 & {}^{1}_{\max}x^2 & ... & {}^{1}_{\max}x^n & \sigma\left(-1\right)^n \end{vmatrix}. \quad (5) $$

Структура типовой модели (4)-(5) полностью определяет жадный алгоритм построения модели инкапсулирующей гранулы ${}^{+}G_n$, основанный на том свойстве, что введенная модель является матроидом [14].

5. Алгебраические свойства пространственных моделей. Введенные нами выше модели описывают элементы, являющиеся декартовым произведением отрезков на координатных осях (в общем случае – аффинной системы координат). Для построения на них АС по определениям 1–5 определим на них внутренние операции и отношения между элементами [13].

Отношение двух определителей моделей (4), (5) не изменяется при аффинных преобразованиях координат. Следовательно, вводимые нами отношения могут использоваться без введения на исходном пространстве данных метрики. Мы будем рассматривать операции и отношения в декартовой прямоугольной системе координат (ДПСК), потому что благодаря введению в нашу модель (4), (5) аффинного множителя $\sigma>0$, полученные результаты будут справедливы в любой аффинной системе координат [17].

5.1. Операции на моделях гранул. В соответствии с основными свойствами определителя введем унарную операцию умножения на число $\alpha\in\mathbb{R}$. С целью сохранения ориентации модели [17], ограничим $\alpha>0$. Тогда получим:

$$\alpha G_n(A)=\begin{vmatrix}\alpha\,{}_{\min}^{1}x^{1} & {}_{\min}^{1}x^{2} & \dots & {}_{\min}^{1}x^{n} & \sigma(-1)^{n}\\ \alpha\,{}_{\max}^{1}x^{1} & {}_{\min}^{1}x^{2} & \dots & {}_{\min}^{1}x^{n} & \sigma(-1)^{n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha\,{}_{\max}^{1}x^{1} & {}_{\max}^{1}x^{2} & \dots & {}_{\max}^{1}x^{n} & \sigma(-1)^{n}\end{vmatrix}=\dots=\begin{vmatrix}{}_{\min}^{1}x^{1} & {}_{\min}^{1}x^{2} & \dots & {}_{\min}^{1}x^{n} & \alpha\sigma(-1)^{n}\\ {}_{\max}^{1}x^{1} & {}_{\min}^{1}x^{2} & \dots & {}_{\min}^{1}x^{n} & \alpha\sigma(-1)^{n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ {}_{\max}^{1}x^{1} & {}_{\max}^{1}x^{2} & \dots & {}_{\max}^{1}x^{n} & \alpha\sigma(-1)^{n}\end{vmatrix}. \quad (6)$$

Отметим, что для значений $\alpha < 0$ операция (6) не является аффинной [17].

Бинарной операцией на множестве моделей гранул является сложение двух гранул ${}^{i}G_n$ и ${}^{j}G_n$ (суммирование определителей их моделей). Сложение возможно только в том случае, если они имеют общую проекцию и совпадающую грань [9]. Так, для $\mathbb{R}^2$, выполняется условие первого рода:

$${}^{i}G_2+{}^{j}G_2=\begin{vmatrix}{}_{\min}^{i}x^{1} & {}_{\min}^{i}x^{2} & 1\\ {}_{\max}^{i}x^{1} & {}_{\min}^{i}x^{2} & 1\\ {}_{\max}^{i}x^{1} & {}_{\max}^{i}x^{2} & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}{}_{\min}^{j}x^{1} & {}_{\min}^{i}x^{2} & 1\\ {}_{\max}^{j}x^{1} & {}_{\min}^{i}x^{2} & 1\\ {}_{\max}^{j}x^{1} & {}_{\max}^{i}x^{2} & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}{}_{\min}^{i}x^{1}+{}_{\min}^{j}x^{1} & {}_{\min}^{i}x^{2} & 1\\ {}_{\max}^{i}x^{1}+{}_{\max}^{j}x^{1} & {}_{\min}^{i}x^{2} & 1\\ {}_{\max}^{i}x^{1}+{}_{\max}^{j}x^{1} & {}_{\max}^{i}x^{2} & 1\end{vmatrix} \quad (7)$$

Геометрический смысл операции сложения гранул, удовлетворяющих условию (7), иллюстрируется на рис. 3.

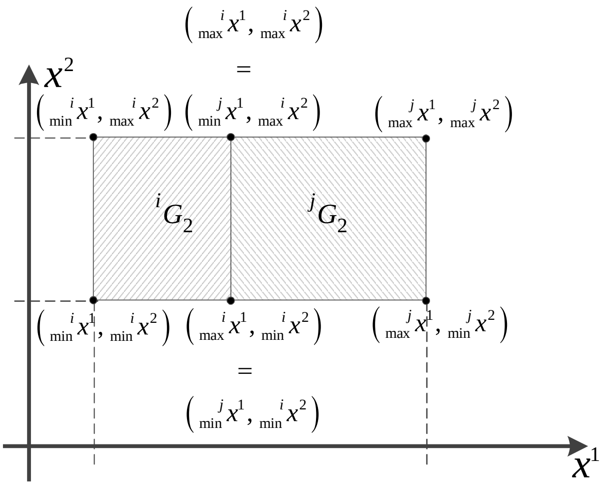

Рис. 3. Сложение горизонтальных пространственных гранул в $\mathbb{R}^2$

Условие второго рода для $\mathbb{R}^2$ определяется в виде:

$${}^{i}G_2+{}^{j}G_2=\begin{vmatrix}{}_{\min}^{i}x^{1} & {}_{\min}^{i}x^{2} & 1\\ {}_{\max}^{i}x^{1} & {}_{\min}^{i}x^{2} & 1\\ {}_{\max}^{i}x^{1} & {}_{\max}^{i}x^{2} & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}{}_{\min}^{j}x^{1} & {}_{\min}^{i}x^{2} & 1\\ {}_{\max}^{j}x^{1} & {}_{\min}^{i}x^{2} & 1\\ {}_{\max}^{j}x^{1} & {}_{\max}^{i}x^{2} & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}{}_{\min}^{i}x^{1}+{}_{\min}^{j}x^{1} & {}_{\min}^{i}x^{2} & 1\\ {}_{\max}^{i}x^{1}+{}_{\max}^{j}x^{1} & {}_{\min}^{i}x^{2} & 1\\ {}_{\max}^{i}x^{1}+{}_{\max}^{j}x^{1} & {}_{\max}^{i}x^{2} & 1\end{vmatrix}. \quad (8)$$

Геометрический смысл операции сложения гранул, удовлетворяющих условию (8), иллюстрируется на рис. 4.

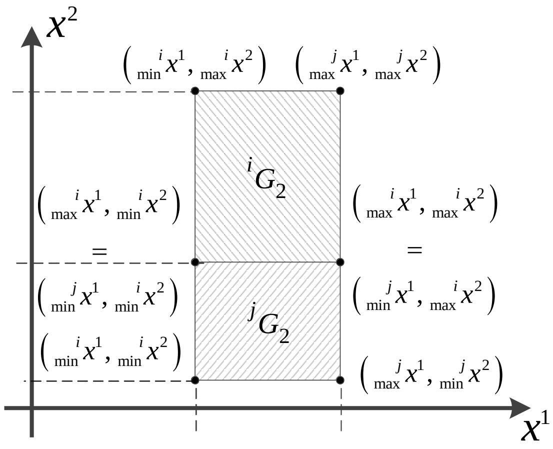

Рис. 4. Сложение вертикальных пространственных гранул в $\mathbb{R}^2$

Введем также n-арную операцию *инкапсуляции* m гранул, определяемая общей формулой модели (4). Так, в $\mathbb{R}^2$ для инкапсуляции гранул $\left\{{}^{i}G_2\right\}$, $i = 1, 2, ..., m$ на плоскости можно получить общую формулу вида:

$$
{}^{+}G_2\left({}^{1}G_2, {}^{2}G_2, ..., {}^{m}G_2\right) = \begin{vmatrix} \min\left({}_{\min}^{1}x^1, ..., {}_{\min}^{m}x^1\right) & \min\left({}_{\min}^{1}x^2, ..., {}_{\min}^{m}x^2\right) & 1 \\ \max\left({}_{\max}^{1}x^1, ..., {}_{\max}^{m}x^1\right) & \min\left({}_{\min}^{1}x^2, ..., {}_{\min}^{m}x^2\right) & 1 \\ \max\left({}_{\max}^{1}x^1, ..., {}_{\max}^{m}x^1\right) & \max\left({}_{\max}^{1}x^2, ..., {}_{\max}^{m}x^2\right) & 1 \end{vmatrix}. \quad (9)
$$

Геометрический смысл инкапсуляции гранул (9) поясняет рис. 5.

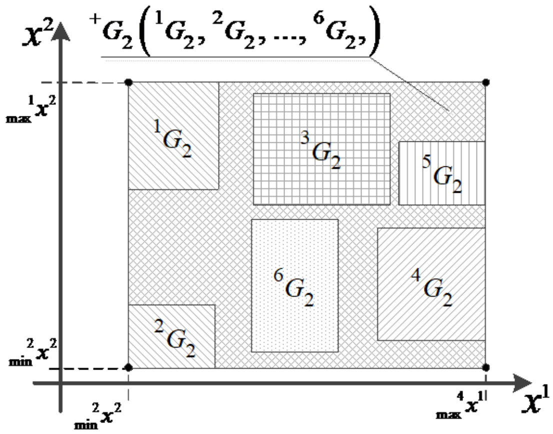

Рис. 5. Инкапсуляция пространственных гранул в $\mathbb{R}^2$

Здесь результатом выполнения операции является двумерная инкапсулирующая гранула

$$
{}^{+}G_2\left({}^{1}G_2, {}^{2}G_2, \ldots, {}^{6}G_2\right) = \begin{vmatrix} \min\left({}_{\min}^{1}x^1, \ldots, {}_{\min}^{6}x^1\right) & \min\left({}_{\min}^{1}x^2, \ldots, {}_{\min}^{6}x^2\right) & 1 \\ \max\left({}_{\max}^{1}x^1, \ldots, {}_{\max}^{6}x^1\right) & \min\left({}_{\min}^{1}x^2, \ldots, {}_{\min}^{6}x^2\right) & 1 \\ \max\left({}_{\max}^{1}x^1, \ldots, {}_{\max}^{6}x^1\right) & \max\left({}_{\max}^{1}x^2, \ldots, {}_{\max}^{6}x^2\right) & 1 \end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix} {}_{\min}^{2}x^1 & {}_{\min}^{2}x^2 & 1 \\ {}_{\max}^{4}x^1 & {}_{\min}^{2}x^2 & 1 \\ {}_{\max}^{4}x^1 & {}_{\max}^{1}x^2 & 1 \end{vmatrix}. \tag{10}
$$

Используя аффинные свойства определителя модели (4), мы можем также определить ряд бинарных нечетких отношений между гранулами.

5.2 Нечеткие отношения на моделях декартовых гранул. На основании модели инкапсулирующей гранулы (5) и операции инкапсуляции (10) можно построить меру сходства двух гранул в $\mathbb{R}^n$ в виде [19]:

$$
SIM\left({}^{i}G_n, {}^{j}G_n\right) = \frac{\begin{vmatrix} {}_{\min}^{i}x^1 & {}_{\min}^{i}x^2 & \ldots & {}_{\min}^{i}x^n & \sigma(-1)^n \\ {}_{\max}^{i}x^1 & {}_{\min}^{i}x^2 & \ldots & {}_{\min}^{i}x^n & \sigma(-1)^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ {}_{\max}^{i}x^1 & {}_{\max}^{i}x^2 & \ldots & {}_{\max}^{i}x^n & \sigma(-1)^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} {}_{\min}^{j}x^1 & {}_{\min}^{j}x^2 & \ldots & {}_{\min}^{j}x^n & \sigma(-1)^n \\ {}_{\max}^{j}x^1 & {}_{\min}^{j}x^2 & \ldots & {}_{\min}^{j}x^n & \sigma(-1)^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ {}_{\max}^{j}x^1 & {}_{\max}^{j}x^2 & \ldots & {}_{\max}^{j}x^n & \sigma(-1)^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \min\left({}_{\min}^{i}x^1, {}_{\min}^{j}x^1\right) & \min\left({}_{\min}^{i}x^2, {}_{\min}^{j}x^2\right) & \ldots & \min\left({}_{\min}^{i}x^n, {}_{\min}^{j}x^n\right) & \sigma(-1)^n \\ \max\left({}_{\max}^{i}x^1, {}_{\max}^{j}x^1\right) & \min\left({}_{\min}^{i}x^2, {}_{\min}^{j}x^2\right) & \ldots & \min\left({}_{\min}^{i}x^n, {}_{\min}^{j}x^n\right) & \sigma(-1)^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \max\left({}_{\max}^{i}x^1, {}_{\max}^{j}x^1\right) & \left({}_{\max}^{i}x^2, {}_{\max}^{j}x^2\right) & \ldots & \left({}_{\max}^{i}x^n, {}_{\max}^{j}x^n\right) & \sigma(-1)^n \end{vmatrix}}. \tag{11}
$$

Введенная функция SIM гранул ${}^{i}G_n$ и ${}^{j}G_n$ является ограниченной монотонной функцией принадлежности на геометрических объектах в $\mathbb{R}^n$ и определяет симметричное и рефлексивное отношение между двумя моделями гранул, т.е. нечеткое отношение сходства [19].

Важнейшей чертой отношения (11) является его аффинность. Значение SIM, сохраняется при любых аффинных преобразованиях пространства $\mathbb{R}^n$ за счет введения аффинного множителя σ согласно (4), что позволяет использовать (11) в задачах классификации и кластеризации данных произвольной природы, в частности, не имеющих метрики – например, в цветовом пространстве [16].

Геометрический смысл применения нечеткого отношения (11) для общего случая перекрывающихся гранул в $\mathbb{R}^2$ поясняет рис. 6.

Диаграмма Эйлера на рис. 6 показывает основные подмножества результата инкапсуляции двух произвольных гранул в $\mathbb{R}^2$, отношение площадей которых которые может быть использовано для определения сходства формы, взаимного положения и ориентации двух гранул [19]. Так, можно показать, что:

- при ${}^{i}G_2 \cap {}^{j}G_2 = \varnothing$ гранулы ${}^{i}G_n$ и ${}^{j}G_n$ не пересекаются,
- при ${}^{+}G_2 \big/ \left({}^{i}G_2 \cup {}^{j}G_2\right) = \varnothing$ ${}^{i}G_n$ и ${}^{j}G_n$ касаются стороной,

а также получить полную таксономию взаимного положения гранул для пространства размерности n [19].

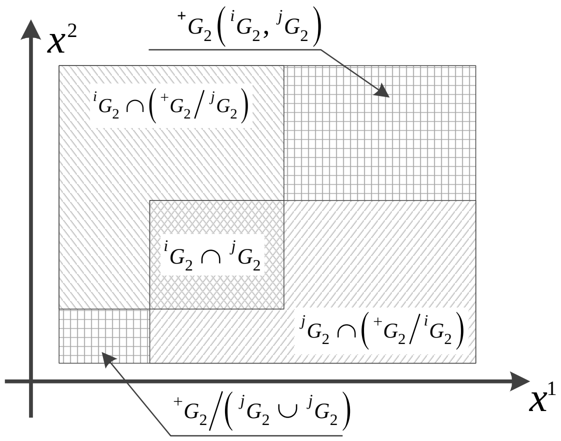

Рис. 6. Таксономия сходства пространственных гранул в $\mathbb{R}^2$

Эти соотношения могут использоваться для решения стандартных задач вычислительного интеллекта, а также описания формы и положения объектов [16] или для классификации гранулированных изображений [7].

6. Вычислительные аспекты моделей пространственной грануляции. Введенная основная формула модели пространственной гранулы (11) и основные операции алгебраической системы на гранулах (6)-(11) показывает, что основной операцией при обработке данных с помощью машины гранулированных вычислений по Рис. 1 является вычисление определителя специального вида (4). С вычислительной точки зрения сложность вычисления определителя порядка n пропорциональна n^2, т.е. существенно возрастает с ростом размерности моделей данных [8]. Учитывая тот факт, что определители наших моделей (1)-(3) строятся по проекциям кластера в пространстве $\mathbb{R}^n$, для них существуют упрощенные (*быстрые*) алгоритмы вычисления [14]. Так, для модели в $\mathbb{R}^1$ (1) можно ввести структуру вычислений, представленную на рис. 7 [14].

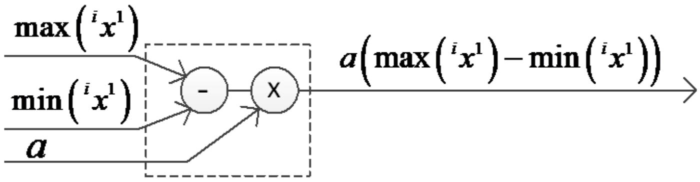

Рис. 7. Вычислительная структура модели (1)

Она представляет собой аналог “бабочки”, получаемой при построении алгоритмов БПФ [7]. Для модели в $\mathbb{R}^2$ (2) на основе рис. 7 мы получим структуру из двух “бабочек” (см. рис. 2).

С увеличением порядка определителя модели структура вычисления собирается из “бабочек” предыдущего порядка по рис. 8. Так, для $\mathbb{R}^3$ модель (4) получим следующую структуру (рис. 9).

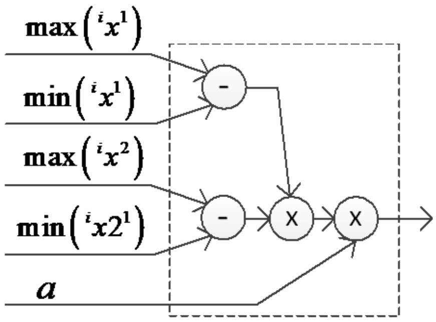

Рис. 8. Вычислительная структура модели (2)

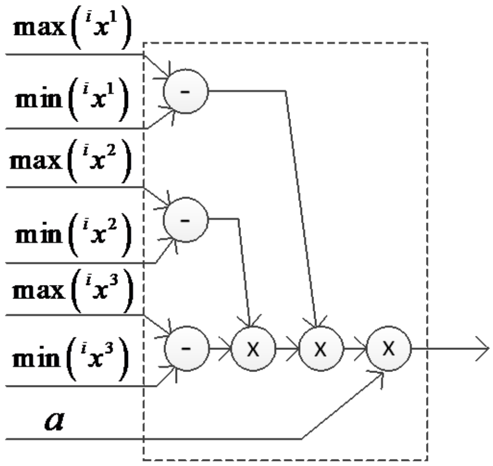

Рис. 9. Вычислительная структура модели (3)

Подсчет числа операций введенной структуры “бабочки” показывает, что сложность вычислений определителей по “быстрым” вычислительным структурам растет с ростом порядка модели n *линейно*, а не квадратично, как для произвольного определителя при использовании схемы Гаусса [3]. Это открывает перспективы для реализации типовой структуры машины гранулированных вычислений на основе ПЛИС (рис. 1) с помощью каскадирования “бабочек” [8].

Заключение. В ряде наших работ была предложена и успешно развита и применена методология представления больших данных с помощью пространственных гранул (Space Granulation [18]), которая основывается на новой математической модели представления данных, более сложной, чем известные алгебры данных [10]. Она является алгебраической системой (АС) [13] и позволяет выполнять все этапы работы с большими данными на единой математической и алгоритмической основе, обеспечивая естественное сжатие данных без необходимости их последующей распаковки [20]. Также наши модели инвариантны к аффинным преобразованиям и некоторым типам криволинейных координат [15] и не требуют использования метрического пространства, что важно в абстрактных данных [13]. Они вычислительно эффективны за счет естественного сжатия данных (экономия ресурса памяти [15]) и за счет линейности сложности алгоритмов (экономия ресурса времени вычислений [14]).

Как следствие, предложенная методология позволяет строить эффективные вычислительные средства, решающие все задачи обработки больших данных на основе единой машины гранулированных вычислений [8]. Это существенно экономит аппаратные расходы на обработку данных и сигналов на ПЛИС. При реализации на ПЛИС новый подход позволяет использовать типовые структуры "бабочек" подобно алгоритмам БПФ [14].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Lin T.Y., Yao Y.Y. and Zadeh L.A.* (eds.). Data Mining, Rough Sets and Granular Computing. – Physica-Verlag, Heidelberg, 2002.
2. *Lin T.Y.* Granular Computing: Structures, Representations, Applications and Future Directions // In: the Proc. of 9th International Conference, RSFDGrC 2003, Chongqing, China, May 2003, Lecture Notes on Artificial Intelligence LNAI 2639, Springer-Verlag, 16-24.
3. *Каляев И.А., Левин И.И., Семерников Е.А., Шмойлов В.И.* Реконфигурируемые мультиконвейерные вычислительные структуры. – Ростов-на-Дону: Изд.-во ЮНЦ РАН, 2009. – 344 с.
4. *Zadeh L.A.* Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic // Fuzzy Sets and Systems. – 1997. – Vol. 90. – P. 111-127.
5. *Yao Y.Y.* Granular computing: basic issues and possible solutions // Proceedings of the 5th Joint Conference on Information Sciences, 2000. – P. 186-189.
6. *Бутенков С.А., Жуков А.Л.* Информационная грануляция на основе изоморфизма алгебраических систем // Сб. трудов Международной алгебраической конференции, посвященной 80-летию со дня рождения А.И. Кострикина, Нальчик, 12-18 июля 2009 г. – С. 206-209.
7. *Butenkov S.* Granular Computing in Image Processing and Understanding // In Proceedings of IASTED International Conference on Artificial Intelligence and Applications "AIA 2004", Innsbruk, Austria, February 10-14, 2004.
8. *Бутенков С.А.* Методы информационной грануляции в параллельных вычислениях // Материалы 3-й Всероссийской научно-технической конференции «СКТ-2014», 29 сентября-4 октября 2014 г., Дивноморское, Геленджик. – Т. 1. – С. 99-104.
9. *Butenkov S., Zhukov A., Nagorov A., Krivsha N.* Granular Computing Models and Methods Based on the Spatial Granulation // XII Int. Symposium «Intelligent Systems», INTELS'16, 5-7 October 2016, Moscow, Russia. Elsevier Procedia Computer Science. 103. – 2017. – P. 295-302.
10. *Pedrysz W.* Granular Computing – the emerging paradigm // Journal of Uncertain Systems. – 2007. – Vol. 1, No. 1. – P. 38-61.
11. *Zadeh L.A.* From Computing with Numbers to Computing with Words – From Manipulation of Measurements to Manipulation of Perceptions // IEEE Transactions on Circuits and Systems. – 1999. – Vol.45. – P. 105-119.
12. *Zadeh L.A.* Soft computing and fuzzy logic // IEEE Software. – 1994. – Vol. 11, Nos. 1-6. – P. 48-56.
13. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 392 с.
14. *Krivsha N., Krivsha V., Beslaneev Z., Butenkov S.* Greedy algorithms for Granular Computing Problems in Spatial Granulation Technique // XII Int. Symposium «Intelligent Systems», INTELS'16, 5-7 October 2016, Moscow, Russia. Elsevier Procedia Computer Science. – 2017. – Vol. 103. – P. 303-307.
15. *Butenkov S.A.* The development of Intelligent Data Analysis paradigm for the Theory of Information Granulation // Proceedings of IV International Conference "Integrated models and Soft Computing in Artificial Intellect", Colomna, May 28-30 2007. – Vol. 1. – P. 188-194.
16. *Butenkov S.A.* Robust Representation and Processing for weakly structured information // In Proceedings of IEEE-sponsored International Conference on Artificial Intelligence "AIS 2004", Divnomorskoe, Russia, September 5-10, 2004. – P. 89-91.
17. *Бутенков С.А.* Неметрический подход в задачах грануляции данных // Научные труды SWorld. – Вып. 4 (41). – Иваново: Научный мир, 2015. – 104 с. – Т. 2. – С. 91-99.
18. *Рогозов Ю.И., Бутенков С.А., Нагоров А.Л., Бесланеев З.О.* Модели данных на основе теории информационной грануляции // Труды Пятой Международной конференции «Системный анализ и информационные технологии» САИТ-2013, Красноярск, 19-25 сентября 2013 г. – Т. 2. – С. 395-398.

19. *Бутенков С.А., Кривша В.В., Аль-Доуяни С.Х.С.* Построение системы нечетких отношений взаимного положения на декартовых гранулах // Труды международной научно-технической конференции «Искусственные интеллектуальные системы» (IEEE AIS'06). – М.: Физматлит, 2006. – Т. 2. – С. 99-105.
20. *Ватолин Д., Ратушняк А., Смирнов М., Юкин В.* Методы сжатия данных. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2003. – 384 с.

REFERENCES

1. *Lin T.Y., Yao Y.Y. and Zadeh L.A.* (eds.). Data Mining, Rough Sets and Granular Computing. Physica-Verlag, Heidelberg, 2002.
2. *Lin T.Y.* Granular Computing: Structures, Representations, Applications and Future Directions, In*: the Proc. of 9th International Conference, RSFDGrC 2003, Chongqing, China, May 2003, Lecture Notes on Artificial Intelligence LNAI 2639, Springer-Verlag, 16-24*.
3. *Kalyaev I.A., Levin I.I., Semernikov E.A., Shmoylov V.I.* Rekonfiguriruemye mul'tikonveyernye vychislitel'nye struktury [Multiconference reconfigurable computing structure]. Rostov-on-Don: Izd.-vo YuNTS RAN, 2009, 344 p.
4. *Zadeh L.A.* Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic, *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, Vol. 90, pp. 111-127.
5. *Yao Y.Y.* Granular computing: basic issues and possible solutions, *Proceedings of the 5th Joint Conference on Information Sciences, 2000*, pp. 186-189.
6. *Butenkov S.A., Zhukov A.L.* Informatsionnaya granulyatsiya na osnove izomorfizma algebraicheskikh sistem [Information granulation based on isomorphism of algebraic systems], *Sb. trudov Mezhdunarodnoy algebraicheskoy konferentsii, posvyashchennoy 80-letiyu so dnya rozhdeniya A.I. Kostrikina, Nal'chik, 12-18 iyulya 2009 g.* [Proceedings of the international algebraic conference, devoted to the 80th anniversary of the birth of A. I. Kostrikin, on July 12-18, 2009], pp. 206-209.
7. *Butenkov S.* Granular Computing in Image Processing and Understanding, *In Proceedings of IASTED International Conference on Artificial Intelligence and Applications "AIA 2004", Innsbruk, Austria, February 10-14, 2004*.
8. *Butenkov S.A.* Metody informatsionnoy granulyatsii v parallel'nykh vychisleniyakh [Methods of information granulation in parallel computing], *Materialy 3-y Vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «SKT-2014», 29 sentyabrya-4 oktyabrya 2014 g., Divnomorskoe, Gelendzhik* [.Materials of the 3rd all-Russian scientific and technical conference "SKT-2014", September 29-October 4, 2014, Divnomorskoye, Gelendzhik], Vol. 1, pp. 99-104.
9. *Butenkov S., Zhukov A., Nagorov A., Krivsha N.* Granular Computing Models and Methods Based on the Spatial Granulation, *XII Int. Symposium «Intelligent Systems», INTELS'16, 5-7 October 2016, Moscow, Russia. Elsevier Procedia Computer Science. 103*, 2017, pp. 295-302.
10. *Pedrysz W.* Granular Computing – the emerging paradigm, *Journal of Uncertain Systems*, 2007, Vol. 1, No. 1, pp. 38-61.
11. *Zadeh L.A.* From Computing with Numbers to Computing with Words – From Manipulation of Measurements to Manipulation of Perceptions, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1999, Vol. 45, pp. 105-119.
12. *Zadeh L.A.* Soft computing and fuzzy logic, *IEEE Software*, 1994, Vol. 11, Nos. 1-6, pp. 48-56.
13. *Mal'tsev A.I.* Algebraicheskie sistemy [Algebraic system]. Moscow: Nauka, 1970, 392 p.
14. *Krivsha N., Krivsha V., Beslaneev Z., Butenkov S.* Greedy algorithms for Granular Computing Problems in Spatial Granulation Technique, *XII Int. Symposium «Intelligent Systems», INTELS'16, 5-7 October 2016, Moscow, Russia. Elsevier Procedia Computer Science*, 2017, 103, pp. 303-307.
15. *Butenkov S.A.* The development of Intelligent Data Analysis paradigm for the Theory of Information Granulation, *Proceedings of IV International Conference "Integrated models and Soft Computing in Artificial Intellect", Colomna, May 28-30 2007*, Vol. 1, pp. 188-194.
16. *Butenkov S.A.* Robust Representation and Processing for weakly structured information, *In Proceedings of IEEE-sponsored International Conference on Artificial Intelligence "AIS 2004", Divnomorskoe, Russia, September 5-10, 2004,* pp. 89-91.

17. *Butenkov S.A.* Nemetricheskiy podkhod v zadachakh granulyatsii dannykh [Non-metric approach in data granulation problems], *Nauchnye trudy SWorld* [Scientific works of SWorld], Issue 4 (41). Ivanovo: Nauchnyy mir, 2015, 104 p, Vol. 2, pp. 91-99.
18. *Rogozov Yu.I., Butenkov S.A., Nagorov A.L., Beslaneev Z.O*. Modeli dannykh na osnove teorii informatsionnoy granulyatsii [Data models based on the theory of information granulation], *Trudy Pyatoy Mezhdunarodnoy konferentsii «Sistemnyy analiz i informatsionnye tekhnologii» SAIT-2013, Krasnoyarsk, 19-25 sentyabrya 2013 g.* [Proceedings of the Fifth international conference "System analysis and information technologies" SAIT-2013, Krasnoyarsk, 19-25 September 2013], Vol. 2, pp. 395-398.
19. *Butenkov S.A., Krivsha V.V., Al'-Douyani S.KH.S.* Postroenie sistemy nechetkikh otnosheniy vzaimnogo polozheniya na dekartovykh granulakh [Construction of a system of fuzzy relations of mutual position on Cartesian granules], *Trudy mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «Iskusstvennye intellektual'nye sistemy» (IEEE AIS'06)* [Proceedings of the international scientific and technical conference "Artificial intelligent systems" (IEEE AIS'06)]. Moscow: Fizmatlit, 2006, Vol. 2, pp. 99-105.
20. *Vatolin D., Ratushnyak A., Smirnov M., Yukin V.* Metody szhatiya dannykh [Data compression methods]. Moscow: DIALOG-MIFI, 2003, 384 p.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор А.В. Боженюк.

Бутенков Сергей Андреевич – ООО “Научно-исследовательский центр СуперЭВМ и нейрокомпьютеров”; e-mail: saabmount@gmail.com; 347922, г. Таганрог, пер. Итальянский, 106; тел.: +79281420088; с.н.с.; к.т.н.; доцент.

Butenkov Sergey Andreeyevitch – Research Center of Supercomputers and Neurocomputers; e-mail: saabmount@gmail.com; phone: +79281420088; senior researcher; cand. of eng. sc.; associate professor.